Н. И. КАРЯКИН
К. Н. БЫСТРОВ
П. С. КИРЕЕВ

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ

Н. И. КАРЯКИН, К. Н. БЫСТРОВ, П. С. КИРЕЕВ

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1962

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый «Краткий справочник по физике» ставит своей целью дать практическим работникам, соприкасающимся с вопросами физики, студентам высших технических учебных заведений, преподавателям вузов, техникумов и средних школ краткое пособие, охватывающее все основные разделы современной физики.

В основном справочник соответствует действующей программе по физике для втузов. Необходимость подобного издания диктуется все возрастающей ролью физики в жизни страны. В то же время отсутствует достаточно краткое и полное пособие, которое могло бы оказать помощь лицам, ранее изучавшим физику, в их повседневной работе.

Настоящий справочник ни в коей мере не может заменить систематический курс физики, да авторы и не ставили этой задачи. В нем обращено особое внимание на определения физических понятий и величин, излагаются идеи основных физических экспериментов, явления и факты, приводятся наиболее важные соотношения между величинами без подробных математических выкладок.

В справочнике отсутствуют подробные таблицы значений физических величин, которые можно найти в таких изданиях, как, например, «Справочник физика-экспериментатора» Кэя и Лэби, «Физико-технический справочник» под редакцией К. П. Яковлева и т. п.

При отборе материала, вносимого в «Справочник», авторы ставили задачу более подробно изложить вопросы физики, ставшие актуальными в последние годы. Поэтому в нем отдельные вопросы элементарного курса физики изложены сжато, а в некоторых случаях и вообще опущены, в то время как вопросы атомной и ядерной физики, зонной теории кристаллов и полупроводников и некоторые другие изложены более подробно. Для понимания многих разделов современной физики необходимо знание основ квантовой механики, поэтому авторы отводят им значительное место.

Настоящее издание является одним из первых опытов подобного рода. Прекрасная книга «Основные формулы физики» под редакцией Д. Мензела предназначена для сравнительно узкого круга специалистов в данной области, а широко распространенное издание «Основные законы физики» А. Хенделя охватывает лишь программу элементарного курса физики.

Раздел первый справочника написан Н. И. Карякиным, разделы II—IV К. Н. Быстровым, разделы V—IX П. С. Киреевым.

Авторы будут признательны за указания возможных погрешностей данного издания и за пожелания в выборе материала и форме его изложения.

Н. Карякин,
К. Быстров,
П. Киреев

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

Механика

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ

§ 1. Система отсчета

Механика есть наука о движениях и силах. Механика имеет дело с простейшей формой движения, которое состоит в изменении взаимного положения тел или частей тела друг относительно друга с течением времени; движение такой формы называется **механическим движением**.

Движение материальных тел происходит в пространстве и во времени. Пространство и время неотделимы от движущейся материи, они являются объективно реальными формами ее бытия.

«В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени» (В. И. Ленин. Соч., т. 14, издание четвертое, стр. 162).

Рис. 1

Положение тела может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Поэтому при изучении движения материальных тел их положение в пространстве относят к какому-либо определенному телу, например к Земле, Солнцу или к другим предметам, неизменно связанным с ними. Тело, относительно которого рассматривается изучаемое движение, называют телом отсчета. Обычно с таким телом неизменно связывают какую-либо систему координат, например, прямоугольную, которую также называют **системой отсчета** или **системой ориентировки**.

В выбранной системе координат положение каждой точки движущегося тела определяется тремя координатами.

На рис. 1 изображена правая прямоугольная система координат; это означает, что если положительное направление оси x переходит кратчайшим путем, т. е. вращением на угол в 90°, в положительное направление оси y, то положительное направление оси z должно быть обращено в ту сторону, с которой вращение кажется положительным, т. е. противоположным движению часовой стрелки.

Вращение от оси x к оси y с одновременным поступательным продвижением в направлении оси z определяет **правый винт**.

§ 2. Единицы мер и системы мер

Под измерением всякой физической величины понимают сравнение этих физических величин с однородными величинами, принятыми за е д и н и ц у.

Всякая скалярная величина состоит из абсолютного числа, указывающего, сколько раз в данной величине содержится величина, принятая за единицу, и из н а и м е н о в а н и я или р а з м е р н о с т и единицы.

Единицы измерений определяются образцовыми — эталонными телами, хранящимися в Международном бюро мер и весов. Современное определение эталонов основных единиц изложено в разделе десятом.

Существует несколько абсолютных систем единиц, отличающихся выбором тех величин, которые приняты за основные и для которых установлены специальные эталоны.

Все размерности величин, встречающиеся в механике, могут быть выведены из трех основных единиц. В технической системе мер основными единицами являются: длина (L), сила (F) и время (T). Это — так называемая система LFT. В качестве эталонов в этой системе служат: эталон длины — линейка из иридиевой платины, хранящаяся в Международном бюро мер и весов, длина которой принята за 1 *м*; за эталон силы принята та сила, с которой земной шар притягивает тело массой в 1 *кг* на широте 45°, и за эталон времени принимается время, равное $\frac{1}{86\,400}$ средних солнечных суток. Эта единица времени носит название с е к у н д ы.

В механике обычно употребляется система единиц, в основу которой положены единицы длины (L), массы (M) и времени (T). Это — так называемая система LMT.

Эталоны длины и времени в этой системе единиц выбираются так же, как и в системе LFT, а за эталон массы принята масса тела из иридиевой платины, хранящегося в Международном бюро мер и весов и называемого к и л о г р а м м о м. Масса в 1 *кг* близка к массе 1 000 *см*^{3} чистой воды при 4° С.

В зависимости от выбора единиц длины, массы и времени в физике употребляется так называемая «абсолютная система единиц», в которой за основные единицы приняты следующие:

единица длины — 1 сантиметр (1 *см*),
единица массы — 1 грамм (1 *г*),
единица времени — 1 секунда (1 *сек*).

Эта система сокращенно называется СГС-системой.

В физике и технике применяются и две другие «абсолютные системы», в которых все единицы отличаются от единиц системы СГС только «масштабами».

В первой из них за основные единицы принимаются:
единица длины — 1 метр (1 *м*),
единица массы — 1 тонна (1 *т*),
единица времени — 1 секунда (1 *сек*).

Эта «абсолютная система» называется МТС-системой.

Во второй системе за основные единицы принимаются:
единица длины — 1 метр (1 *м*),
единица массы — 1 килограмм-масса (1 *кг*),
единица времени — 1 секунда (1 *сек*).

Эта система называется МКС-системой.

У нас в СССР в настоящее время в науке и технике ГОСТами установлены следующие системы механических единиц (ГОСТ 7664—61):

а) система МКС (практическая), основными единицами которой являются: метр, килограмм-масса, секунда;

б) система СГС (физическая), основными единицами которой являются: сантиметр, грамм-масса, секунда;

в) система МКГСС (техническая) основными единицами которой являются: метр, килограмм-сила, секунда.

Система МКС (практическая)

Название величины	Определяющее уравнение	Единицы измерения		
		название	сокращенные обозначения, установленные ГОСТом	размерность
Площадь	$S = l^2$	квадратный метр	$м^2$	$м^2$
Объем	$V = l^3$	кубический метр	$м^3$	$м^3$
Скорость	$v = \frac{l}{t}$	—	$\frac{м}{сек}$	$м \cdot сек^{-1}$
Ускорение	$a = \frac{v}{t}$	—	$\frac{м}{сек^2}$	$м \cdot сек^{-2}$
Сила [1]	$F = ma$	ньютон	$н$	$м \cdot кг \cdot сек^{-2}$
Давление (напряжение)	$p = \frac{F}{S}$	—	$\frac{н}{м^2}$	$м^{-1}\ кг\ сек^{-2}$
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	—	$\frac{кг}{м^3}$	$м^{-3}\ кг$
Удельный вес	$d = \frac{P}{V}$	—	$\frac{н}{м^3}$	$м^{-2}\ кг\ сек^{-2}$
Удельный объем	$v = \frac{V}{m}$	—	—	$м^3\ кг^{-1}$
Импульс силы	$k = Ft$	—	—	$м\ кг\ сек^{-1}$
Количество движения	$K = mv$	—	—	$м\ кг\ сек^{-1}$
Работа [2]	$A = Fl$	джоуль	$дж$	$м^2\ кг\ сек^{-2}$
Мощность	$N = \frac{A}{t}$	ватт	$вт$	$м^2\ кг\ сек^{-3}$
Момент силы	$M = Fl$	—	—	$м^2\ кг\ сек^{-2}$
Импульс момента силы	$L = Mt$	—	—	$м^2\ кг\ сек^{-1}$
Момент инерции	$I = ml^2$	—	$кгм^2$	$м^2\ кг$
Момент количества движения	$L = I\omega$	—	—	$м^2\ кг\ сек^{-1}$
Динамическая вязкость	$\eta = \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta v}$	—	$\frac{н \cdot сек}{м^2}$	$м^{-1}\ кг\ сек^{-1}$
Кинематическая вязкость	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	—	$\frac{м^2}{сек}$	$м^2\ сек^{-1}$
Частота [3]	$f = \frac{1}{T}$	герц	$гц$	$сек^{-1}$
Угловая скорость	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	—	$\frac{рад}{сек}$	$сек^{-1}$
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$	—	$\frac{рад}{сек^2}$	$сек^{-2}$

[1] Силу тяжести принято обозначать буквой P, ускорение силы тяжести буквой g.

[2] В тех же единицах, что и работа, измеряется энергия.

[3] Частота обозначается буквами f или ν.

Система СГС (физическая)

Название величины	Определяющее уравнение	Единицы измерения: название	Единицы измерения: сокращенные обозначения, установленные ГОСТом	Единицы измерения: размерность
Площадь	$S = l^2$	квадратный сантиметр	$см^2$	$см^2$
Объем	$V = l^3$	кубический сантиметр	$см^3$	$см^3$
Скорость	$v = \frac{l}{t}$	—	$\frac{см}{сек}$	$см\ сек^{-1}$
Ускорение	$a = \frac{v}{t}$	—	$\frac{см}{сек^2}$	$см\ сек^{-2}$
Сила	$F = ma$	дина	$дин$	$см\ г\ сек^{-2}$
Давление	$p = \frac{F}{S}$	бар	$\frac{дин}{см^2}$	$см^{-1}\ г\ сек^{-2}$
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	—	$\frac{г}{см^3}$	$см^{-3}\ г$
Удельный вес	$d = \frac{P}{V}$	—	$\frac{дин}{см^3}$	$см^{-2}\ г\ сек^{-2}$
Удельный объем	$v = \frac{V}{m}$	—	—	$см^3\ г^{-1}$
Импульс силы	$k = Ft$	—	—	$см\ г\ сек^{-1}$
Количество движения	$K = mv$	—	—	$см\ г\ сек^{-1}$
Работа	$A = Fl$	эрг	$эрг$	$см^2\ г\ сек^{-2}$
Мощность	$N = \frac{A}{t}$	—	$\frac{эрг}{сек}$	$см^2\ г\ сек^{-3}$
Момент силы	$M = Fl$	—	—	$см^2\ г\ сек^{-2}$
Импульс момента силы	$L = Mt$	—	—	$см^2\ г\ сек^{-1}$
Момент инерции	$I = ml^2$	—	—	$см^2\ г$
Момент количества движения	$L = I\omega$	—	—	$см^2\ г\ сек^{-1}$
Динамическая вязкость	$\eta = \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta v}$	пуаз	$пз$	$см^{-1}\ г\ сек^{-1}$
Кинематическая вязкость	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	—	—	$см^2\ сек^{-1}$
Частота	$f = \frac{1}{T}$	герц	$гц$	$сек^{-1}$
Угловая скорость	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	—	—	$сек^{-1}$
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$	—	—	$сек^{-2}$

Система МКГСС (техническая)

Название величины	Определяющее уравнение	Единицы измерения: название	Единицы измерения: сокращенные обозначения, установленные ГОСТом	Единицы измерения: размерность
Площадь	$S = l^2$	квадратный метр	$м^2$	$м^2$
Объем	$V = l^3$	кубический метр	$м^3$	$м^3$
Скорость	$v = \frac{l}{t}$	—	$\frac{м}{сек}$	$м\ сек^{-1}$
Ускорение	$a = \frac{v}{t}$	—	$\frac{м}{сек^2}$	$м\ сек^{-2}$
Масса	$m = \frac{F}{a}$	т. е. м.	$\frac{кГ\ сек^2}{м}$	$м^{-1}\ кГ\ сек^2$
Давление	$p = \frac{F}{S}$	—	$\frac{кГ}{м^2}$	$м^{-2}\ кГ$
Удельный вес	$d = \frac{P}{V}$	—	$\frac{кГ}{м^3}$	$м^{-3}\ кГ$
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	—	$\frac{кГ\ сек^2}{м^4}$	$м^{-4}\ кГ\ сек^2$
Удельный объем	$v = \frac{V}{m}$	—	—	$м^4\ кГ^{-1}\ сек^{-2}$
Импульс силы	$k = Ft$	—	—	$кГ\ сек$
Количество движения	$K = mv$	—	—	$кГ\ сек$
Работа	$A = Fl$	килограммометр	$кГм$	$мкГ$
Мощность	$N = \frac{A}{t}$	—	$\frac{кГм}{сек}$	$мкГ\ сек^{-1}$
Момент силы	$M = Fl$	—	—	$мкГ$
Импульс момента силы	$L = Mt$	—	—	$мкГ\ сек$
Момент инерции	$I = ml^2$	—	—	$мкГ\ сек^2$
Момент количества движения	$L = I\omega$	—	—	$мкГ\ сек$
Динамическая вязкость	$\eta = \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta v}$	—	—	$м^{-2}\ кГ\ сек$
Кинематическая вязкость	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	—	—	$м^2\ сек^{-1}$
Частота	$f = \frac{1}{T}$	герц	$гц$	$сек^{-1}$
Угловая скорость	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	—	$\frac{рад}{сек}$	$сек^{-1}$
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$	—	$\frac{рад}{сек^2}$	$сек^{-2}$

Размерности и обозначения важнейших величин, встречающихся в указанных трех системах, приведены в таблицах.

T — это время одного полного колебания, измеряется в секундах.

Ниже приводятся определения тех производных единиц, которые получили особое название.

Ньютон — сила, которая массе в 1 *кг* сообщает ускорение в 1 *м/сек*^{2}.

Джоуль — работу, которую совершает сила в 1 *н* на пути в 1 *м*.

Ватт — мощность, при которой за 1 *сек* совершается работа в 1 *дж*.

Герц — частота, при которой совершается одно колебание за 1 *сек*.

Приводим определение тех единиц измерения, которые в системе СГС получили особое название.

Дина — сила, которая массе в 1 *г* сообщает ускорение в 1 *см/сек*^{2}.

Бар — давление, при котором сила в 1 *дин* равномерно распределена по площади в 1 *см*^{2}.

Эрг — работа, которую совершает сила в 1 *дин* на пути в 1 *см*.

Пуаз — вязкость, при которой на 1 *см*^{2} слоя жидкости (газа) действует сила в 1 *дин* при поперечном градиенте скорости, равном $1\,\frac{см}{сек}/1\ см$.

Приводим определения тех единиц, которые в системе МКГСС получили особое название.

Т. е. м. — техническая единица массы — масса, которой сила в 1 *кГ* сообщает ускорение в 1 *м/сек*^{2}.

Килограммометр — работа, которую совершает сила в 1 *кГ* на пути в 1 *м*.

Необходимо иметь в виду, что символами *кГ* и *кг* — обозначаются единицы разных физических величин из различных систем единиц:

кг — единица массы в системе МКС (практической), а *кГ* — единица силы в системе МКГСС (технической).

§ 3. Векторы

Элементы вектора, единичный вектор. В механике широко применяются методы векторного исчисления.

Основным преимуществом этих методов перед координатным является то обстоятельство, что векторные формулы не изменяются при переходе от одной системы к другой.

Векторной величиной, или просто вектором, называется величина, вполне определяющаяся своим численным значением и направлением в пространстве*.

Такие физические величины, как скорость, ускорение и сила, могут дать представление о векторах.

Аналитически вектор вполне определяется тремя своими проекциями на оси координат.

Если дан вектор $\mathbf{r}$, то известны его модуль r и направление, которое определяется направляющими косинусами.

Проекции вектора $\mathbf{r}$ (координаты вектора) на оси координат следующие:

$$r_x = r\cos\left(\widehat{\mathbf{r}x}\right),$$

$$r_y = r\cos\left(\widehat{\mathbf{r}y}\right),$$

$$r_z = r\cos\left(\widehat{\mathbf{r}z}\right).$$

---

* Векторные величины в тексте обозначены полужирными буквами, на рисунках—буквами со стрелками.



1В. Зак. 1783



Возведя в квадрат эти равенства и сложив их, имеем:

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = r^2.$$

Отсюда определяем модуль вектора **r**:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}.$$

Направляющие косинусы через проекции вектора выражаются соотношениями:

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}x}) = \frac{r_x}{r} = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}y}) = \frac{r_y}{r} = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}z}) = \frac{r_z}{r} = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}.$$

Рис. 2

Рис. 3

Вектор, по направлению своему совпадающий с направлением данного вектора и имеющий численное значение (модуль), равное единице, называется **единичным вектором** данного вектора.

Единичный вектор, принадлежащий данному вектору (рис. 2), принято иногда обозначать той же буквой, что и данный вектор, но с показателем 0:

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0.$$

Единичные векторы по направлению координатных осей принято обозначать через **i**, **j**, **k**; тогда составляющие векторы по осям координат будут:

$$\mathbf{a}_x = a\cos(\widehat{\mathbf{a}x})\,\mathbf{i},$$

$$\mathbf{a}_y = a\cos(\widehat{\mathbf{a}y})\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{a}_z = a\cos(\widehat{\mathbf{a}z})\,\mathbf{k}.$$

Скалярное произведение. Скалярное, или внутреннее, произведение двух векторов **a** и **b** есть скалярная величина, равная произведению их модулей a и b на косинус угла $(\widehat{\mathbf{ab}})$ между ними. Операция скалярного умножения обозначается обычно так: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

По определению $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos(\widehat{\mathbf{ab}})$, т. е. скалярное произведение двух векторов есть произведение длины одного из них на проекцию другого на направление первого (рис. 3).

Скалярное произведение векторов обладает свойствами, аналогичными свойствам произведения двух скаляров.

А именно, согласно определению, имеет место коммутативный закон:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

ассоциативный закон (по отношению к умножению на скаляр):

$$(n\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = n(\mathbf{ab}) = n\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

и выполняется свойство дистрибутивности (т. е. распределительности) относительно суммы векторов, т. е.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

Условие перпендикулярности двух векторов a и b, модули которых отличны от нуля, есть

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0.$$

Если векторы a и b имеют одинаковое направление, то скалярное произведение этих векторов равно произведению их модулей:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab.$$

Скалярное произведение двух одинаковых векторов равно квадрату модуля одного из них:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a^2.$$

Следовательно, модуль

$$a=|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

Для скалярных произведений каждых двух из единичных векторов i, j, k имеют место равенства:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1,$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0.$$

Согласно дистрибутивному и ассоциативному законам, скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$$

принимает вид:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos(\widehat{\mathbf{ab}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Отсюда имеем выражение косинуса угла между векторами a и b:

$$\cos(\widehat{\mathbf{ab}})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{ab}.$$

Условие перпендикулярности векторов a и b имеет вид:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Скалярное произведение в механике. Если точка приложения силы F (величины F) перемещается на отрезок s в направлении единичного вектора s°, образующем с направлением силы угол ϑ, то выражение

$$F\cos\vartheta=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}^\circ$$

представляет проекцию силы F на направление s°, и

$$A=Fs\cos\vartheta=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$$

есть работа, совершенная силой при перемещении $\mathbf{s}=s\mathbf{s}^\circ$.

Векторное произведение. Векторное произведение двух векторов a и b есть вектор, модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними, а направление его перпендикулярно к плоскости, проходящей через оба вектора, и обращено в ту сторону, с которой вращение по кратчайшему пути от a к b представляется происходящим против часовой стрелки. Модуль векторного произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ численно равен площади параллелограмма со сторонами a и b (рис. 4).

Операция векторного умножения обозначается обычно так:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \text{или} \quad [\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$$

Если $\mathbf{c}^\circ$ — единичный вектор указанного направления, то по определению

$$\mathbf{c} = ab \sin(\widehat{\mathbf{ab}})\, \mathbf{c}^\circ.$$

Для векторного произведения имеет место ассоциативный закон по отношению к умножению на скаляр:

$$(n\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = n(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = n\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Векторное умножение обладает свойством дистрибутивности по отношению к сумме двух векторов:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

При перестановке сомножителей **a** и **b** направление вектора — произведения изменяется на обратное:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

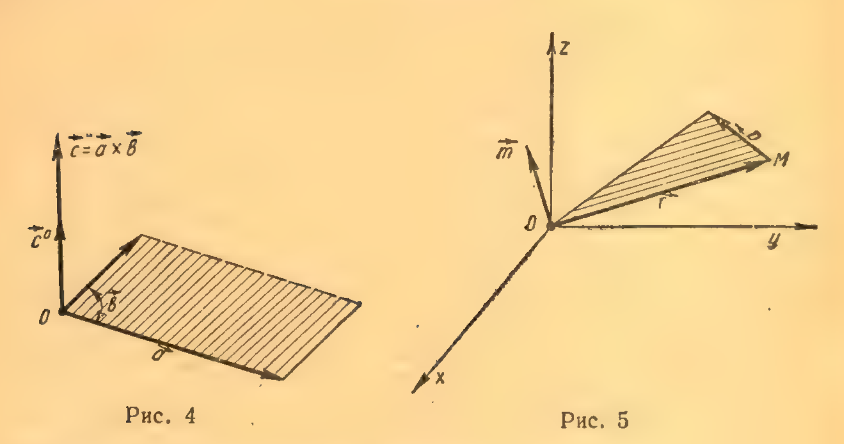


Рис. 4

Рис. 5

Различные случаи векторного умножения:

при $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

$$\sin(\widehat{\mathbf{ab}}) = 0, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0;$$

при $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

$$\sin(\widehat{\mathbf{ab}}) = 0, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0;$$

при $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

$$\sin(\widehat{\mathbf{ab}}) = 1, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab\mathbf{c}^\circ,$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab,$$

т. е. : 1) если векторы параллельны (коллинеарны), то их векторное произведение равно нулю;

2) векторный квадрат вектора равен нулю;

3) модуль векторного произведения двух взаимно перпендикулярных векторов равен произведению их модулей.

Для единичных векторов **i**, **j**, **k**, направленных по осям координат, векторные произведения каждых двух из этих единичных векторов имеют значения:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k};\quad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}.$$

Для двух векторов: $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$

векторное произведение равно:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\mathbf{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\mathbf{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\mathbf{k},$$

или

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Момент вектора. Пусть одна из точек O твердого тела неподвижно закреплена. Положение какой-либо точки относительно точки M может быть определено радиусом-вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

Моментом вектора $\mathbf{a}$ относительно точки O называется векторное произведение радиуса - вектора $\mathbf{r}$, проведенного из точки O к началу M данного вектора $\mathbf{a}$, на этот вектор $\mathbf{a}$ (рис. 5), т. е.

$$\mathbf{m}=\mathbf{r}\times\mathbf{a}.$$

По определению:

$$\mathbf{m}=\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

Дифференцирование вектора по скалярному аргументу. Если координаты вектора $\mathbf{a}$, отнесенного к постоянному базису, являются функциями аргумента t, то и сам вектор $\mathbf{a}$ представляет собой функцию этого аргумента t, т. е.

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(t).$$

Если t получит приращение Δt, то вектор $\mathbf{a}$ получит приращение

$$\Delta\mathbf{a}=\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{a}(t).$$

Производной вектора $\mathbf{a}$ по скалярному аргументу t называется вектор, определяемый равенством:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{a}(t)}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

Бесконечно малый вектор $d\mathbf{a}$ называется направленным элементом дуги или линии, а его модуль $|d\mathbf{a}|$ — элементом дуги.

Если вектор $\mathbf{a}$ выражен через проекции, т. е. если

$$\mathbf{a}(t)=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k},$$

то его дифференцирование можно произвести следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{da_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{da_z}{dt}\mathbf{k},$$

т. е. производная вектора по скалярному параметру t есть вектор, проекции которого равны производным от проекций дифференцируемого вектора по тому же параметру.

Дифференциал единичного вектора перпендикулярен к дифференцируемому вектору. Кроме того (рис. 6),

$$|d\mathbf{a}^\circ| = |\mathbf{a}^\circ| d\varphi = d\varphi.$$

Так как $\mathbf{a} = a\mathbf{a}^\circ$, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}^\circ + \frac{d\mathbf{a}^\circ}{dt}a.$$

Это уравнение показывает, что производная от вектора по скалярному аргументу t есть вектор, равный сумме двух взаимно перпендикулярных векторов, один из которых, $\frac{da}{dt}\mathbf{a}^\circ$, характеризует изменение вектора по модулю, а второй, $\frac{d\mathbf{a}^\circ}{dt}a$, — изменение его по направлению (рис. 7).

Классификация векторов. В зависимости от свойств физических величин, изображаемых векторами, векторы разделяются на:

1) свободные или несвязанные,

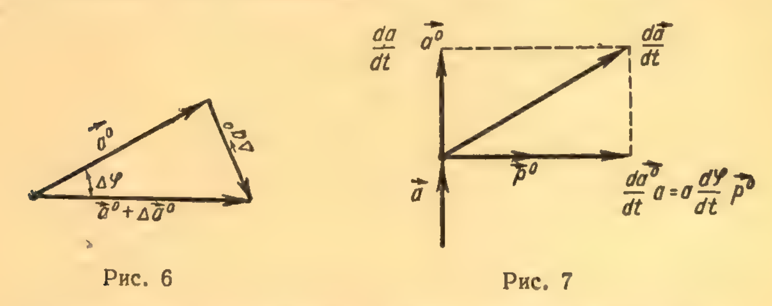


Рис. 6 Рис. 7

2) скользящие (или связанные с линией своего действия),

3) неподвижные (или приложенные в точке или связанные с точкой своего приложения).

Свободный вектор изображает такую векторную величину, которая может быть отнесена к любой точке пространства, не теряя при этом своего первоначального физического смысла. Так, например, скорость поступательного движения тела есть свободный вектор, потому что она может быть отнесена к любой точке. Свободный вектор определяется тремя числами — своими проекциями.

Скользящий вектор изображает такую величину, которая, не теряя своего первоначального физического или механического смысла, может быть отнесена к любой из точек, лежащих на прямой ее действия.

Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу.

Неподвижный вектор изображает такую физическую величину, которая может быть отнесена лишь к одной определенной точке пространства и теряет свое первоначальное физическое значение, будучи отнесена ко всякой другой точке пространства. Так, скорость движущейся точки представляет собой вектор, связанный с этой точкой.

Неподвижный вектор, таким образом, определяется шестью числами: тремя проекциями вектора и тремя координатами точки приложения.

§ 4. Элементы теории поля

Часть пространства, ограниченная или неограниченная, точкам которого отнесены по некоторому закону числовые значения какой-либо скалярной величины, называется скалярным полем. Часть пространства, каж-

дой точке которого отнесен по некоторому закону вектор, называется векторным полем.

Функция, определяющая это закономерное отнесение, называется функцией поля. Будем предполагать, что в окрестности некоторой точки она однозначна, непрерывна и дифференцируема.

Примеры скалярных полей из области физики — распределение температуры или потенциала в пространстве; примеры векторных полей — силовые поля и поля скоростей; примеры тензорных полей — поля деформаций и напряжений.

Скалярное поле. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат скалярное поле задано функцией $V(x, y, z)$. Все точки, в которых эта функция имеет постоянное значение, заполняют поверхность

$$V(x, y, z) = C.$$

Давая C различные значения, получим семейство поверхностей, называемых поверхностями уровня скалярного поля.

При переходе от точки $P(x, y, z)$ поля к соседней точке $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ одной и той же поверхности уровня изменение функции поля равно нулю.

Исследуем более общий случай изменения функции V при переходе от точки поля P, радиус-вектор которой $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, к какой-либо соседней точке P', радиус-вектор которой

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} = \mathbf{i}(x + dx) + \mathbf{j}(y + dy) + \mathbf{k}(z + dz).$$

Функция V получит изменение dV:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Выражение для dV можно представить в виде скалярного произведения

$$dV = \left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)(\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz),$$

вторым сомножителем которого является бесконечно малый вектор

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz,$$

идущий от точки P к точке P'. Первый сомножитель зависит только от положения P; он называется градиентом поля в точке P:

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Таким образом, можно записать

$$dV = \operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{r}.$$

При вычислениях пользуются другим обозначением:

$$\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z} = \nabla V,$$

где ∇ (читается *набла*) является символом дифференциального оператора:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Этот оператор обладает формальными свойствами вектора, с его помощью изменение скалярного поля можно представить в виде:

$$dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla V. \qquad (*)$$

Градиент ∇V однозначно отнесен каждой точке скалярного поля и определяет векторное поле.

Градиент ∇V есть вектор, направление которого совпадает с направлением нормали к поверхности уровня. При перемещении от какой-либо точки поверхности уровня, которой соответствует значение поля, равное V, в направлении ее нормали на отрезок $d\mathbf{r}$ к поверхности более высокого уровня $V + dV$ векторы ∇V и $d\mathbf{r}$ должны быть, согласно (*), направлены в одну и ту же сторону.

Таким образом, *градиент направлен по нормали к поверхности уровня и идет от поверхности более низкого к поверхности более высокого уровня.*

Обозначая единичный вектор нормали, идущей в направлении возрастающих значений V, через $\mathbf{n}$ и полагая $d\mathbf{r} = \mathbf{n}dn$, выражение (*) можно переписать так:

$$dV = \mathbf{n} \cdot \nabla V dn = |\nabla V| dn.$$

Модуль градиента равен:

$$|\nabla V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \frac{dV}{dn}.$$

Инварианты векторного поля — дивергенция и ротация. Пусть имеется векторное поле

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z) = V(\mathbf{r}) = \mathbf{i}\,u(x, y, z) + \mathbf{j}\,v(x, y, z) + \mathbf{k}\,w(x, y, z).$$

Так как символический вектор ∇ так же, как и действительный вектор, имеет инвариантный характер, то и все произведения, образованные из ∇ и вектора V, так же, как и произведения двух действительных векторов, имеют смысл, не зависящий от системы координат.

Дивергенцией вектора $\mathbf{V}$ называется скалярное произведение ∇ на вектор поля $\mathbf{V}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w),$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Дивергенция векторного поля является скаляром.

Ротацией или ротором вектора $\mathbf{V}$ называется векторное произведение ∇ на вектор поля $\mathbf{V}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w) = \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Векторное произведение $\nabla \times \mathbf{V}$ точно так же, как и векторное произведение двух обыкновенных векторов, можно представить в форме определителя:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ u, & v, & w \end{vmatrix}$$

При вычислении этого определителя формальные произведения элементов второй и третьей строк надо заменить соответствующими частными производными.

Двукратное применение оператора ∇. При двукратном применении оператора ∇ получается ряд замечательных соотношений. Образуем

$$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

из этого видно, что ∇^2 можно рассматривать как символ некоторой скалярной операции. Положим

$$\nabla^2 = \Delta.$$

Символ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называют *дифференциальным оператором Лапласа*. Он приложим как к скалярным полям, так и к векторным.

Примеры дивергенции и ротации

Дивергенция. То место в потоке, в котором жидкость появляется, называется *источником*. Место, в котором жидкость исчезает, называется *стоком* или отрицательным источником. Источники могут быть точечными или непрерывно распределенными.

Производительностью источника называется количество жидкости, доставляемое им в единицу времени.

Компонент скорости $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ в направлении оси x (рис. 8) доставляет за время dt избыток вытекающей жидкости над втекающей (через соответствующие грани) равный

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz\,dt - u\,dy\,dz\,dt = \frac{\partial u}{\partial x}\,d\tau\,dt,$$

где

$$d\tau = dx\,dy\,dz.$$

Избыток, доставляемый всеми компонентами скорости, имеет значение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau\,dt = \operatorname{div}\mathbf{v}\,d\tau\,dt.$$

Этот избыток равен количеству жидкости $e\,d\tau\,dt$, доставляемому за время dt источниками, содержащимися в рассматриваемом элементе объема; следовательно, для жидкости с постоянной плотностью $\rho = 1$, плотность источников равна $e = \operatorname{div}\mathbf{v}$.

Тем самым дано гидродинамическое толкование дивергенции поля, вектор которого $\mathbf{v}$ был принят за скорость жидкости неизменной плотности ρ (несжимаемая жидкость).

Рис. 8

Ротация. Механическое толкование ротации. Ротация скорости $\mathbf{v}$ любой точки твердого тела равна удвоенной угловой скорости твердого тела.

Если твердое тело, у которого одна из точек O неподвижна, вращается вокруг оси, проходящей через точку O, с угловой скоростью $\omega = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$, где ξ, η, ζ — координаты угловой скорости, то скорость какой-либо

точки M тела равна $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, идущий из точки O к точке M.

Ротация скорости $\mathbf{v}$ имеет значение

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \xi, & \eta, & \zeta \\ x, & y, & z \end{vmatrix},$$

или

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \eta z - \zeta y & \zeta x - \xi z & \xi y - \eta x \end{vmatrix} = 2\xi\mathbf{i} + 2\eta\mathbf{j} + 2\zeta\mathbf{k}, \text{ т. е. } \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Следовательно, угловая скорость равна

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — вектор поля скоростей точек твердого тела.

§ 5. Скорость и ускорение

Скоростью материальной точки, совершающей любое движение, называется предел средней скорости $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, т. е. производная от радиуса вектора $\mathbf{r}$ по времени t:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Вектор скорости точки в данный момент $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ направлен по касательной к ее траектории. Модуль скорости

$$|\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt},$$

где ds — элемент дуги траектории.

Ускорением $\mathbf{w}$ материальной точки, совершающей любое движение, называется предел среднего ускорения $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, т. е. производная от вектора скорости $\mathbf{v}$ по времени:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Вектор ускорения $\mathbf{w}$ направлен в сторону вогнутости траектории и лежит в соприкасающейся плоскости, касательной к траектории в данной точке; его направление совпадает с направлением $d\mathbf{v}$.

§ 6. Сила

Представление о силе возникло из опыта. Под силой понимается мера механического воздействия (в данный момент времени) на материальную точку (частицу) со стороны других материальных объектов (тел или полей), характеризующая величину и направление этого воздействия.

Механическое воздействие на материальную точку проявляется в изменении состояния движения этой точки. Силу можно представить вектором,

исходящим из точки, к которой она приложена; направление этого вектора совпадает с направлением действия силы, а его длина пропорциональна величине силы.

Если векторная сумма двух сил, приложенных к одной материальной частице, равна нулю, то наличие измеряемых этими силами воздействий не отражается на механическом движении соответствующей материальной точки;

Упругие постоянные твердых веществ

Вещество	Модуль объемн. сжатия, 10^{11} *дин/см²*	Модуль Юнга, 10^{11} *дин/см²*	Модуль жесткости, 10^{11} *дин/см²*	Отношение Пуассона
Металлы				
Алюминий	7,5	7,0	2,5	0,34
Висмут	3,0	3,2	1,2	0,33
Вольфрам	30,0	39,0	15,0	—
Железо (сварочн.)	16,0	21,0	7,7	0,28
Золото	16,5	8,0	2,8	0,42
Кадмий	4,2	5,0	2,1	0,30
Магний	3,3	4,1	1,7	—
Медь	13,5	11,0	4,4	0,34
Никель	17,0	21,0	7,8	0,30
Олово	5,3	5,3	1,9	0,33
Платина	24,5	17,0	6,3	0,39
Свинец	4,1	1,6	0,6	0,44
Серебро	10,5	7,7	2,8	0,37
Тантал	—	19,0	—	—
Цинк	3,5	8,0	3,6	0,23
Чугун	9,5	11,0	5,0	0,27
Сплавы				
Бронза	9,0	10,5	3,7	0,36
Бронза фосфористая	—	12,0	4,4	0,38
Латунь	6,0	9,0	3,5	0,35
Нейзильбер	15,0	11,0	4,5	0,37
Сталь (литье)	17,0	20,0	7,5	0,28
Сталь (отпущенная)	16,0	22,0	8,0	0,28
Прочие материалы				
Древесина:				
деловая	—	0,9	—	—
деловая дуб.	—	1,3	—	—
деловая тик.	—	1,7	—	—
Кварц (нити)	1,5	5,4	3,0	—
Каучук	—	0,05	0,00015	0,48
Стекло (крон)	5,0	6,0	2,5	0,25

Примечание. Упругие постоянные образца зависят в значительной мере от его предыдущей обработки, кристаллической структуры и т. д., так что значения их, приводимые в таблице, следует расценивать как приближенные.

такие силы называются уравновешенными. На этом основан так называемый статический метод измерения величины силы при помощи ее уравновешивания другой силой. Для измерения силы служат приборы, называемые динамометрами, при помощи которых измеряемая сила уравновешивается упругой силой, величина которой отсчитывается указателем на заранее проградуированной шкале.

Динамически сила измеряется по произведенному ею ускорению.

В механике различают три типа сил:

1) силы взаимного притяжения между телами, действующие на расстоянии. Это так называемые силы всемирного тяготения или гравитационные силы. Примером этих сил может служить притяжение тел Землей;

2) силы, возникающие при непосредственном соприкосновении тел и обусловленные деформацией соприкасающихся тел. Это так называемые упругие силы. Примерами сил этого типа могут служить силы, действующие на тело со стороны сжатой или растянутой пружины. К этой же категории относится и сила, с которой веревка действует на привязанный к ее концу груз, или сила, с которой действует стол на лежащий на нем груз, и т. д. Правда, деформации этих тел, например, растяжение веревки или прогиб стола, часто бывают незаметны. Но упругие силы, о которых идет речь, всегда обусловлены деформациями, происшедшими при соприкосновении тел. Абсолютно жестких (недеформируемых) тел в природе нет;

3) третий тип сил — это также силы, возникающие при непосредственном соприкосновении тел, но обусловленные не общей деформацией соприкасающихся тел, а явлениями, происходящими непосредственно около поверхности соприкосновения. Примером сил этого типа могут служить силы трения.

Силу можно рассматривать как одно из первичных понятий механики наряду с другим основным понятием — массы. Между этими понятиями существует тесная связь, устанавливаемая основным законом динамики, данным И. Ньютоном в 1687 г. в его сочинении «Математические начала натуральной философии».

Согласно этому закону сила $\mathbf{F}$, приложенная к материальной точке, движущейся относительно инерциальной системы координат с ускорением $\mathbf{w}$, связана с массой m этой частицы соотношением:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w}.$$

Одностороннего действия одного тела на другое не существует. Всякое действие связано с противодействием; в природе всегда имеет место взаимодействие тел. Согласно третьему закону Ньютона, действие и противодействие равны по величине и направлены противоположно друг другу.

Уравнение $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$ позволяет установить размерность силы:

$$[\mathbf{F}] = MLT^{-2},$$

где M — символ массы,
L — длины,
T — времени.

В системе СГС за единицу силы принимают силу, сообщающую телу массой в 1 *г* ускорение в 1 *см/сек*^{2}.

Эта единица силы называется диной (*дин*). В технической системе единиц МКГСС сила является основной мерой и за единицу силы принимается та сила, с которой земной шар притягивает тело массой в 1 *кг* на уровне моря на широте 45°. Эта единица силы называется килограмм-сила (сокращенно обозначается 1 *кГ*).

На любое тело на поверхности Земли действует сила, сообщающая телу постоянное ускорение, если его падению не препятствует другое тело. Ускорение силы тяжести g в одном и том же месте не зависит от веса и вещества падающего тела.

Ускорение g свободного падающего тела у полюсов равно $\approx 9{,}83$ *м/сек²*, а у экватора — 9,78 *м/сек²*. При расчетах обычно этим различием пренебрегают и считают величину ускорения одинаковой для всех широт, равным $g = 9{,}81$ *м/сек²*.

Для вычисления ускорения силы тяжести g в зависимости от географической широты местности φ, а следовательно, и для определения веса тел на высоте уровня моря ($P = mg$) Международным геодезическим конгрессом в 1930 г. принята формула

$$g = 978{,}049\,(1 + 0{,}005288 \sin^2\varphi - 0{,}000006 \sin^2 2\varphi).$$

Значения ускорений силы тяжести для различных широт (на высоте уровня моря) приведены в следующей таблице:

$\varphi°$	g в *см/сек²*	$\varphi°$	g в *см/сек²*
0	978,05	50	981,08
10	978,20	60	981,92
20	978,65	70	982,61
30	979,34	80	983,06
40	980,18	90	983,22

§ 7. Масса

М а с с а — есть мера инертности тел и их гравитационных свойств. Инертность тела проявляется при его ускорении. Поэтому массу можно измерять опытным путем на основании 2-го закона Ньютона.

Для двух материальных частиц с массами m и m_1, на которые действуют силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_1$, имеем:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w},$$

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{w}_1.$$

Положим, что $m = m_1$, тогда, деля первое равенство на второе, найдем:

$$\frac{w}{w_1} = \frac{F}{F_1},$$

т. е. для одной и той же материальной частицы ускорения пропорциональны действующим силам.

При $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$ имеем:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{w_1}{w},$$

т. е. одна и та же сила сообщает разным материальным частицам ускорения, обратно пропорциональные их массам.

Наконец, если $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$, то

$$\frac{F}{F_1} = \frac{m}{m_1},$$

т. е. если две частицы имеют равные ускорения, то силы, действующие на частицы, пропорциональны их массам.

Так как практически ускорение силы тяжести на земной поверхности можно считать постоянным, то массу тела можно считать пропорциональной его весу.

Для одного и того же тела можно написать:

$$P = m_g g; \quad F = m_i w.$$

В первом случае масса является мерой гравитационного взаимодействия данного тела с другими, и ее поэтому называют тяжелой массой и обозначают m_g. Во втором случае масса является мерой инертности, а поэтому ее называют инертной массой и обозначают через m_i.

Так как при свободном падении различные тела имеют одинаковые ускорения, то из этого следует вывод о численном равенстве инертной и тяжелой массы:

$$m_i = m_g = m.$$

Это соотношение считается одним из надежнейших выводов современной науки. Оно было положено в 1916 г. А. Эйнштейном в основу общей теории относительности.

Удельный вес есть вес тела объемом в 1 единицу:

$$\gamma = \frac{P}{V},$$

где P — вес, а V — объем однородного тела.

При неоднородных телах

$$\gamma = \frac{dP}{dV}.$$

Удельная масса или плотность есть масса объемной единицы

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где m — общая масса тела.

Удельным объемом называется объем единицы массы

$$v = \frac{V}{m}.$$

Следовательно, $\rho v = 1$.

Плотности

(в $г/см^3$ при обычной комнатной температуре, 17—23°C)

Алюминий	2,70
Барий	3,5
Бериллий	1,84
Бор	2,33
Ванадий	5,6
Висмут	9,78
Вольфрам (проволока)	19,3
Галлий	5,93
Германий	5,46
Молибден	10,1
Мышьяк (металл.)	5,73
Натрий	0,97
Неодим	6,96
Никель	8,8
Олово	7,3
Осмий	22,5
Железо	
» (чистое)	7,88
» (сварное)	7,85
» (чугун)	7,6
» (сталь)	7,7
Золото	19,3
Индий	7,28
Иридий	22,42
Йод	4,94
Кадмий	8,65
Рубидий	1,53
Рутений	12,3
Самарий	7,75
Свинец	11,34
Селен (аморфн.)	4,8
Сера (аморфн.)	1,92
Серебро	10,5
Стронций	2,56
Калий	0,86
Кальций	1,54
Кобальт	8,7
Кремний (аморфн.)	2,35
Лантан	6,15
Литий	0,534
Магний	1,74
Марганец	7,41
Медь	8,89
Торий	11,3
Углерод	
» (графит)	2,22
» (алмаз)	3,514
Уран	18,7
Фосфор	
» (желтый)	1,83
» (красный)	2,20

Палладий	12,2	Сурьма	6,62	Хром	6,92
Платина	21,45	Таллий	11,86	Цезий	1,87
Празеодим	6,48	Тантал	16,6	Церий	6,80
Родий	12,44	Теллур (кристал.)	6,25	Цинк	7,1
Ртуть (тверд. —39°C)	14,19	Титан	4,5	Цирконий	6,4

Сплавы

Бронза	8,8—8,9
» (колокольная)	8,7
» (фосфористая)	8,8
Инвар	8,00
Константан	8,88
Латунь	8,4—8,7
Магналиум (магниевоалюминиевый сплав)	2,0—2,5
Манганин	8,50
Металл Вуда	9,5—10,5
Сталь	7,8

Различные вещества

Асбест	2,0—2,8	Лед (при 0°C)	0,917
Древесина:		Парафин	0,9
бальза	0,12—0,20	Плавленый кварц	2,1—2,2
бук	0,7—0,9	Пробка	0,22—0,26
вяз	0,5—0,6	Слюда	2,6—3,2
дуб	0,6—0,9	Стекло	2,4—2,8
красное дерево	0,6—0,8	Целлулоид	1,4
тик	0,7—0,9	Эбонит	1,15
ясень	0,6—0,8		

Жидкости (при 15° C)

Анилин	1,2	Нормальная		Нормальная	
Ацетон	0,792	» $\frac{1}{2} H_2SO_4$	1,0304	» KCl	1,0446
Бензин	0,899	» HCl	1,0162	Скипидар	0,87
Вода морская	1,025	» HNO_3	1,0322	Спирт метил.	0,810
Глицерин	1,26	» NaOH	1,0414	» этил	0,791
Керосин	0,8	» NCl	1,0388	Эфир	0,736
Масло		» KOH	1,048		
» оливковое	0,92				
» смазочное	0,90—0,92				

Газы (в *г/л* при норм. усл.)

Азот	1,251	Двуокись углерода	1,9768	Окись углерода	1,2502
Аммиак	0,7708	Кислород	1,429	Сероводород	1,539
Аргон	1,783	Криптон	3,68	Фтор	1,69
Бром	7,139	Ксенон	5,85	Хлор	3,220
Водород	0,0899	Метан	0,7167	Хлористый водород	1,639
Воздух	1,2928	Неон	0,900		
Гелий	0,1785				

§ 8. Материальная точка

Под материальной точкой понимают в механике такое тело, размерами и формой которого можно пренебречь в данной задаче.

Одно и то же реальное тело, в зависимости от постановки задачи, может рассматриваться либо как материальная точка, либо как тело конечных размеров.

Например, рассматривая задачу о полете артиллерийского снаряда, в первом приближении можно пренебречь его формой и размерами и рассматривать снаряд как материальную точку.

Земной шар в его движении около Солнца можно рассматривать как материальную точку потому, что размеры орбиты земного шара весьма велики по сравнению с диаметром земного шара.

§ 9. Основные законы движения по Ньютону

Соотношения между основными понятиями механики определяются аксиомами или принципами, которые были впервые сформулированы И. Ньютоном в его сочинении «Математические принципы натуральной философии», вышедшем в Лондоне в 1687 г.

1-й закон. Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку приложенные силы не заставят его изменить это состояние.

Этот закон называется законом инерции, он был открыт Галилеем. Сущность этого закона заключается в том, что механическое движение не может возникнуть из ничего, а только в результате взаимодействия тел.

Первый закон Ньютона является определением инерциальных систем координат (систем отсчета).

Если m — масса точки, а $\mathbf{v}$ — вектор ее скорости, то произведение $m\mathbf{v}$ есть количество движения (импульс) материальной точки. Изменение количества движения точки может произойти только в результате взаимодействия с другими телами, т. е. под действием силы.

2-й закон. Изменение количества движения точки пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Выбирая должным образом единицы массы, скорости и силы, второй закон Ньютона можно представить математически в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F};$$

В этой формулировке Ньютона 2-й закон пригоден и в механике тел с переменной массой в том числе и в релятивистской механике.

При постоянной массе:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F},$$

т. е. произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей силе.

Это уравнение называют основным законом динамики материальной точки.

В скалярной форме основное уравнение динамики можно представить тремя уравнениями составляющих:

$$m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x;$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} F_y;$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

где F_x, F_y, F_z — компоненты вектора силы по осям координат x, y, z.

Если сила, приложенная к телу, есть его вес P, то основное уравнение динамики принимает вид:

$$mg = P.$$

3-й закон. Действие всегда вызывает равное и противоположное противодействие, иначе — воздействия двух тел друг на друга всегда равны и направлены в противоположные стороны:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2.$$

Если какое-нибудь тело, взаимодействуя с другим телом, изменит его количество движения, то и оно претерпит от второго тела в своем собственном количестве движения то же самое изменение, но обратно направленное, ибо воздействия этих тел друг на друга равны.

§ 10. Инерциальная система отсчета. Принцип относительности Галилея

Инерциальной системой отсчета называется такая система, относительно которой все материальные точки без воздействия на них сил находятся в состоянии равномерного прямолинейного движения или покоятся, т. е. ускорения этих точек относительно инерциальной системы равны нулю.

В классической механике инерциальными системами являются системы, которые движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно.

В качестве инерциальной системы отсчета нередко выбирают систему, связанную с Солнцем и звездами.

Система координат, жестко связанная с Землей, движется относительно упомянутой «неподвижной» с ускорением, совершая суточное и годичное движение. Пренебрегая, однако, ускорением Земли, так как оно сказывается только в специальных случаях, можно пользоваться в качестве системы отсчета S-координатной системой, жестко связанной с Землей, и, в частности, относить все движения к стенам помещения, в котором производятся опыты.

Принцип относительности Галилея утверждает, что невозможно путем механических опытов, произведенных в системе S', движущейся равномерно и прямолинейно относительно системы S, обнаружить это движение. Например, в вагоне, движущимся равномерно и прямолинейно, тела падают вертикально по отношению к стенкам с ускорением g. Отсюда можно сделать следующее заключение: все системы отсчета, движущиеся равномерно и прямолинейно, эквивалентны в отношении законов механики.

Пусть система S' движется относительно системы S со скоростью v. Предположим для простоты рассуждений, что скорость направлена по оси x вправо.

Пусть материальная точка находится в покое относительно системы S. Обозначим ее координату через x, y, z. Если сперва начало координат обеих систем S и S' совпадали, а через промежуток времени t начало координат системы S' переместилось по оси x на расстояние vt, то, очевидно, координата материальной точки x', отсчитанная в системе S', будет связана с координатой x соотношением

$$x' = x - vt.$$

Так как движение системы S происходит только по оси x, то остальные координаты связаны соотношением:

$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

Зная координаты материальной точки x', y', z' в движущейся системе, можно найти с помощью этих соотношений координаты в системе S. Это преобразование координат называется преобразованием Галилея.

Предположим, что на материальную точку в системе S' начинает действовать некоторая сила F', тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$F'_x = m\ddot{x}';$$

$$F'_y = m\ddot{y}',$$

$$F'_z = m\ddot{z}'.$$

Воспользовавшись преобразованием Галилея, находим, что

$$m\ddot{x}' = m\ddot{x};$$

$$m\ddot{y}' = m\ddot{y};$$

$$m\ddot{z}' = m\ddot{z},$$

т. е. данная сила сообщает материальной точке в системе S' такое же ускорение, какое она сообщает в системе S.

Законы Ньютона справедливы в инерциальных системах координат и являются инвариантными при преобразованиях Галилея.

Полученный вывод носит название принципа относительности классической механики.

§ 11. Момент силы и пара сил

При исследовании законов движения и равновесия материальной точки, твердого тела и вообще любых механических систем часто приходится пользоваться понятием момента силы относительно какой-либо точки (полюса).

Моментом силы **F** относительно какой-либо точки O (рис. 9) называется вектор **M**, модуль которого $|\mathbf{M}| = Fa$, т. е. равен произведению величины силы на длину перпендикуляра a, или численно равен удвоенной площади треугольника, заштрихованного на рис. 9.

Вектор момента направлен перпендикулярно к плоскости этого треугольника. Момент может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, будет ли **F** производить вращение около O по часовой стрелке или — против часовой стрелки. Вектор-момент **M** силы **F** относительно точки O равен векторному произведению радиуса-вектора **r** точки приложения силы на вектор силы **F**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Если из полюса O, как начальной точки, провести прямоугольную координатную систему x, y, z и на эти координатные оси спроектировать **M**, то три прямоугольных составляющих M_x, M_y, M_z вектора **M** выразятся слагающими X, Y, Z силы **F** и координатами x, y, z начальной точки вектора **F** следующим образом:

$$M_x = Zy - Yz;$$

$$M_y = Xz - Zx;$$

$$M_z = Yx - Xy.$$

Эти три уравнения равнозначны упомянутому выше векторному уравнению, как это вытекает из изображения векторного произведения с помощью единичных векторов **i**, **j**, **k** в виде определителей:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

M_x является моментом проекции силы **F** на плоскость yz относительно точки O; его называют также моментом силы **F** относительно оси x; соответственно M_y — момент силы **F** относительно оси y и M_z — момент силы **F** относительно оси z.

Момент какой-либо силы относительно любой оси получается следующим образом: силу проектируют на плоскость, перпендикулярную к оси, и определяют момент проекции силы относительно точки, в которой ось пересекает плоскость.

Две силы, равные между собою, но противоположно и параллельно направленные **F** и — **F**, называются п а р о й с и л. Величина пары сил определяется ее вектором момента **M**, величина которого равна площади параллелограмма, построенного на этих силах **F** и — **F**. Направление вектора **M**

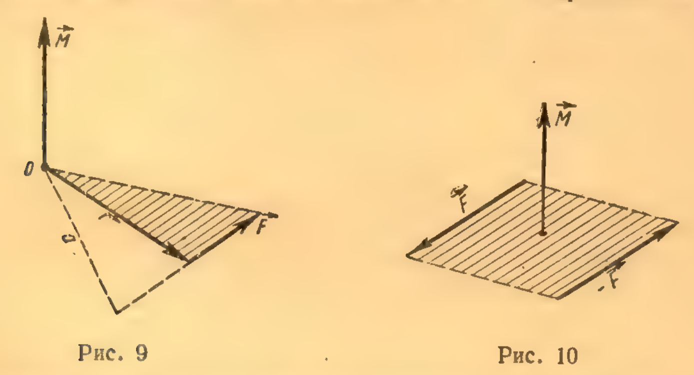


Рис. 9 Рис. 10

перпендикулярно к плоскости параллелограмма; при этом вектор момента снабжается стрелкой так, чтобы направление вращения пары сил и направление самого вектора определяли бы правый винт (рис. 10).

Момент пары сил выражается суммой моментов обеих сил **F** и — **F** для любого полюса. В противоположность моменту одной силы, для момента пары сил неважно задание полюса, ибо сумма моментов отдельных сил пары всегда дает площадь упомянутого выше параллелограмма.

Вектор момента пары является свободным вектором, т. е. его можно перемещать в любом параллельном ему направлении, тогда как вектор силы есть вектор, скользящий по отношению к линии действия силы.

Две пары сил с одинаковыми площадями параллелограммов и одинаковым направлением вращения в одной и той же или различных параллельных друг другу плоскостях равнозначны. При различных направлениях вращения они взаимно уничтожаются.

§ 12. Работа и мощность

Если на прямолинейно движущееся тело действует в направлении его движения постоянная сила **F**, то произведение $A = Fs$ называется работой силы $|\mathbf{F}| = F$ на пути $|\mathbf{s}| = s$. В том случае, когда вектор силы **F** и вектор перемещения **s** образуют между собою угол φ, то работа силы равна произведению величины этой силы на проекцию перемещения на направление силы или произведению величины перемещения на величину проекции силы:

$$A = Fs\cos\varphi = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}.$$

Работа может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, образуют ли **F** и **s** острый или тупой угол. Если сила и путь взаимно перпендикулярны, то работа силы равна нулю.

Если точка приложения силы перемещается по любому криволинейному пути или при прямолинейном пути непрерывно меняется величина или направление силы, то общую работу получают суммированием всех элементарных работ:

$$A = \int dA = \int F \cos \varphi ds = \int \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int (X dx + Y dy + Z dz).$$

При графическом изображении работы обычно принимают абсциссу за путь точки приложения силы, а ординату — за соответствующие составляющие силы по направлению пути; площадь, заключенная между кривой и осью абсцисс, дает работу, произведенную на данном пути.

Если твердое тело перемещается вокруг оси O на угол φ (в дуговых единицах) и момент относительно оси вращения равен M_0, то работа момента равна:

$$A = M_0 \varphi = M \cos \alpha \varphi,$$

где α — угол, образуемый вектором момента $\mathbf{M}$ (относительно какой-либо точки на оси вращения) и осью вращения O.

Мощностью силы называется отношение работы к данному промежутку времени:

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{или} \quad N = \frac{A}{t},$$

если работа A прямо пропорциональна времени, т. е. N остается во времени постоянной. Если сила $\mathbf{F}$ постоянна и точка приложения силы перемещается по прямолинейному пути с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ по направлению силы, то

$$N = Fv.$$

Если $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$ образуют угол α, то

$$N = Fv \cos \alpha;$$

то же справедливо для производительности при вращении какого-либо твердого тела:

$$N = M_0 \omega = M\omega \cos \alpha,$$

где ω — угловая скорость вращения, а $M_0 = M \cos \alpha$ — момент вращения относительно оси вращения.

В технической системе мер за размерность производительности принимают $N = FLT^{-1}$, за единицу — 1 *мкГ сек*$^{-1}$; в физической — $N = ML^2T^{-3}$ или 1 *эрг сек*$^{-1}$; 10^{10} *эрг сек*$^{-1}$ называют 1 *киловатт* (*квт*)=1000 *ватт* (*вт*). Наиболее употребительная в технике для измерения производительности единица есть лошадиная сила

$$1 \text{ (л. с.)} = 75 \text{ мкГ сек}^{-1} = 0{,}735 \text{ квт},$$

$$1 \text{ (квт)} = 1{,}36 \text{ л. с.} \approx 102 \text{ мкГ сек}^{-1},$$

$$1 \text{ мкГ сек}^{-1} \approx 9{,}81 \text{ вт}.$$

§ 13. Кинетическая энергия

Если $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки массой m, то равенство

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

выражает кинетическую энергию материальной точки.

Если твердое тело массой m совершает только поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}$, то его кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} mv^2$. Если твердое тело совершает только вращательное движение вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω, то

$$T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2,$$

где I_0 — момент инерции относительно оси вращения O.

Кинетической энергией системы T называют сумму кинетических энергий материальных точек, образующих систему:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

СТАТИКА

§ 14. Основные законы статики

Закон параллелограмма сил. Равнодействующая $\mathbf{R}$ двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, приложенных в одной точке, по величине и направлению равна диагонали параллелограмма, построенного на данных силах $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 11).

В векторном изображении имеем:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Теорема о перенесении сил, приложенных к твердому телу. Всякое материальное тело можно представить состоящим из материальных точек.

Материальное тело, в котором расстояния между любыми двумя точками остаются постоянными во все время движения, называется абсолютно твердым телом. Абсолютно твердое тело сохраняет свою геометрическую форму неизменной, независимо от воздействия других тел. Пренебрежение деформациями тел при изучении механического движения является гипотезой, положенной в основу изучения статики и динамики.

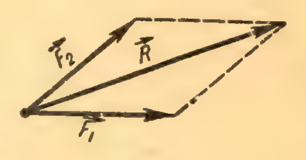


Рис. 11

Для науки о сопротивлении материалов идеальное представление о твердом теле обычно непригодно.

Силы, приложенные к твердому телу, можно перемещать вдоль линий их действия.

§ 15. Сложение и разложение сил, приложенных к твердому телу

Система сил, приложенных в одной точке. Сходящиеся силы. Если несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ приложены в одной точке твердого тела или, что то же, линии действия сил пересекаются в одной точке, то последовательным применением правила параллелограмма сил можно все силы сложить в одну равнодействующую. Сначала с помощью параллелограмма сил складываются две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ в одну равнодействующую, последняя таким же образом складывается с $\mathbf{F}_3$ и т. д., пока все имеющиеся силы не будут приведены к одной равнодействующей. Этот способ

определения равнодействующей сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$,... сводится к построению силового многоугольника (рис. 12), при этом заданные силы последовательно и в произвольном порядке откладываются по величине и направлению таким образом, чтобы направления стрелок на сторонах многоугольника совпадали с направлениями сил. Величина и направление равнодействующей, приложенной в точке приложения действующих сил, получается как замыкающая сторона силового многоугольника (рис. 12).

Этот способ сложения сил называется графическим или геометрическим сложением. На основании правила сложения векторов имеем:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots$$

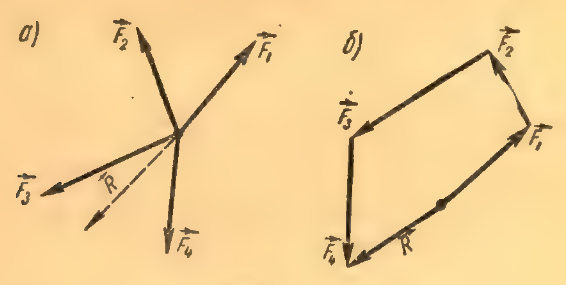


Рис. 12

Условие равновесия сил в векторной форме имеет вид:

$$\mathbf{R} = 0,$$

т. е. равновесие имеет место в том случае, если силовой многоугольник сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... будет замкнутым.

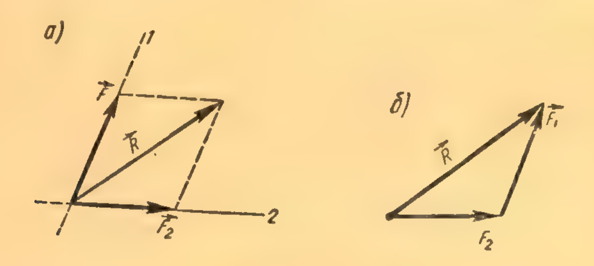


Рис. 13

Условия равновесия в координатной форме имеют вид:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0.$$

Две силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если они равны по величине и направлены в противоположные стороны. Три силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если они расположены в одной плоскости и при сложении дают замкнутый треугольник.

Разложение заданной силы **R** по двум направлениям, имеющим с **R** общую точку, разрешимо лишь в плоскости. Для решения пользуются параллелограммом сил, причем через конечную точку **R** проводят параллели к заданным направлениям *1* и *2*, которые и определяют на этих направлениях отрезки, являющиеся составляющими данной силы **R**. Полученные таким образом слагающие вполне заменяют силу **R** (рис. 13, *а*, *б*).

В пространстве сила R может быть разложена по трем любым направлениям, имеющим общую точку с R. Задача о разложении силы в пространстве решается так же, как и разложение силы в плоскости.

Для направлений больше двух в плоскости и больше трех в пространстве — задача неопределенна.

Система сил, лежащих в одной плоскости, действующая на твердое тело. Приведение к одной равнодействующей силе или к одной равнодействующей паре. Пользуясь теоремой перенесения сил для твердого тела, сначала складывают две силы плоской системы в одну равнодействующую, для чего их перемещают вдоль по линиям их действия до точки их пересечения и здесь складывают по правилу параллелограмма сил, затем таким же

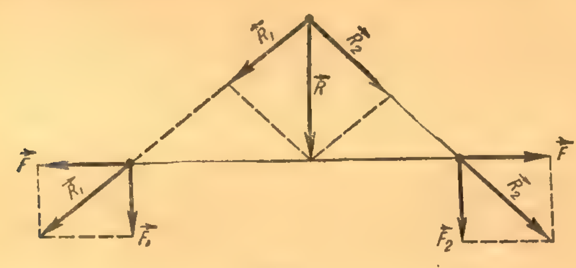


Рис. 14

образом полученную равнодействующую складывают с третьей силой и получают вторую равнодействующую и т. д. В результате приходят к одной общей равнодействующей

$$R = \sum F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots.$$

В некоторых случаях такое построение равнодействующей приводит к паре сил, а именно тогда, когда в результате на параллельных линиях остаются две равные по величине и противоположно направленные силы.

Две параллельные силы F_1 и F_2 (рис. 14), не образующие пары сил, складываются в одну равнодействующую таким образом: по одной и той же линии прикладывают две равные по величине, но противоположно направленные силы F_1 и F и находят R_1 как равнодействующую сил F и F_1 и R_2 для F_2 и $-F$. Теперь R_1 и R_2 уже не параллельны и для них легко находят равнодействующую R, являющуюся одновременно и равнодействующей для F_1 и F_2.

§ 16. Аналитический метод исследования системы сил

При параллельном перенесении силы F в положение F' на расстояние a получаем момент $M = Fa$ (рис. 15) пары сил F и силу $-F'$.

Этим положением пользуются как вспомогательной теоремой для аналитического исследования плоской системы сил. Избирают любую точку в плоскости системы сил и все силы переносят параллельно самим себе в эту точку, при этом каждый раз, в силу параллельного перенесения, возникает момент, равный моменту силы относительно выбранной точки, как полюса. Все проходящие через эту точку силы геометрически складывают в одну равнодействующую $R = \sum F_i$, а моменты всех сил приводят к результирующему моменту

$$M = \sum M_i.$$

При аналитическом методе применяют прямоугольную систему координат, расположенную в плоскости системы сил с начальной точкой в моментном полюсе. Если составляющие F_i обозначить через X_i и Y_i, а координаты точки ее приложения обозначить через x_i, y_i, то равнодействующая **R** определяется двумя составляющими:

$$X = \sum X_i \quad \text{и} \quad Y = \sum Y_i.$$

Результирующий момент M всех сил относительно начальной точки координатной системы, как моментного полюса, равен

$$M = \sum M_i = \sum (Y_i x_i - X_i y_i).$$

X_i, Y_i и M_i называются тремя составляющими или компонентами заданной системы сил.

При выборе другого моментного полюса равнодействующая **R** не меняется, в то время как M, вообще говоря, меняется. Три составляющие системы сил соответствуют трем степеням свободы перемещения, каковыми обладает тело, совершающее плоское движение.

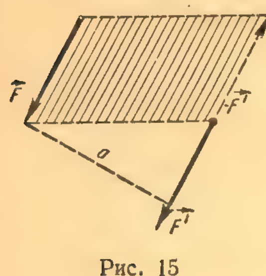


Рис. 15

Из равенства $M_i = Y_i x_i - X_i y_i$ следует, что момент силы $\mathbf{F}_i$ равен сумме моментов ее прямоугольных составляющих (X_i, Y_i). Отсюда следует закон моментов: **момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих сил плоской системы сил.**

Если плоская система сил находится в равновесии, то все три ее составляющие должны быть равны нулю, т. е. действительны три условия равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum (Y_i x_i - X_i y_i) = 0.$$

Последнее уравнение справедливо для любого моментного полюса. Три условия равновесия можно также получить, если для трех различных моментных полюсов положить сумму статических моментов всех сил равной нулю.

С и с т е м а с и л в п р о с т р а н с т в е: а) Сложение пар сил и векторов моментов, приложенных к твердому телу. Если к твердому телу приложено несколько пар сил, плоскости которых расположены как угодно, то их можно привести к одной результирующей паре сил. Для этой цели отдельные пары сил выражают векторами их моментов M_i. Векторы моментов, как и векторы сил, с помощью многоугольника векторов можно складывать в равнодействующий вектор-момент **M**:

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i.$$

В координатной форме это равенство распадается на три следующие:

$$M_x = \sum (M_x)_i = \sum (Z_i y_i - Y_i z_i);$$
$$M_y = \sum (M_y)_i = \sum (X_i z_i - Z_i x_i);$$
$$M_z = \sum (M_z)_i = \sum (Y_i x_i - X_i y_i).$$

M_x, M_y, M_z — три составляющие результирующего вектора момента **M**.

б) Общая система сил в пространстве. Для сложения любой системы сил, действующих на твердое тело, поступают так же, как и при системе сил, лежащих в плоскости. Избирают произвольную точку, в которую параллельно переносят все силы и складывают их в равнодействующую $\mathbf{R} = \sum \mathbf{R}_i$, проходящую через данную точку. При параллельном перенесении появляются еще пары сил, векторы моментов которых складываются, согласно вышеуказанному, в результирующий момент $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$.

Отсюда видно, что любую систему сил в пространстве можно привести к сосредоточенной силе (главному вектору) $\mathbf{R} = \sum \mathbf{R}_i$, приложенной в любой заданной точке, и к результирующему моменту (главный момент) $M = \sum M_i$. При выборе другого полюса главный вектор не меняется, главный же момент при этом, вообще говоря, меняется.

При изображении пространственной системы сил в координатах поступают так же, как и для системы сил, приложенных в плоскости.

Приведение любой системы сил к равнодействующей $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}_i$, приложенной в заданной точке O, и к результирующему моменту $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M}_i$ можно в прямоугольной координатной системе с начальной точкой O выразить следующими шестью составляющими системы сил:

$$X = \sum X_i; \quad Y_i = \sum Y_i; \quad Z = \sum Z_i;$$
$$M_x = \sum (M_x)_i = \sum (Z_i y_i - Y_i z_i);$$
$$M_y = \sum (M_y)_i = \sum (X_i z_i - Z_i x_i);$$
$$M_z = \sum (M_z)_i = \sum (Y_i x_i - X_i y_i).$$

Здесь X_i, Y_i, Z_i есть составляющие $\mathbf{F}_i$, а x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения $\mathbf{F}_i$, которая может быть произвольно выбрана на линии действия F_i.

Эти шесть составляющих системы сил в пространстве соответствуют шести степеням свободы тела в пространстве. Для случая равновесия системы сил в пространстве необходимо, чтобы главный вектор $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ и главный момент $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$ исчезали бы для любой точки, принятой за моментный полюс, а в координатной системе: *шесть составляющих системы сил должны равняться нулю.*

§ 17. Принцип возможных (виртуальных) перемещений

Виртуальным перемещением точки называется бесконечно малое возможное перемещение, которое точка могла бы иметь при наложенных на нее связях.

Принцип возможных (виртуальных) перемещений устанавливает необходимое и достаточное условие равновесия механических систем точек. Он формулируется следующим образом.

Для равновесия системы материальных точек с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил при любом виртуальном перемещении была равна нулю.

В векторной форме принцип возможных перемещений выражается равенством:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

где $\delta \mathbf{r}_i$ — виртуальное перемещение точки приложения силы $\mathbf{F}_i$. В координатах это равенство имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0.$$

§ 18. Виды равновесия

Равновесие называется устойчивым, если тело, выведенное бесконечно малым отклонением из положения равновесия, вновь самостоятельно приходит в положение равновесия.

Пример. Неоднородный шар с эксцентрично расположенным центром тяжести находится на горизонтальной плоскости в устойчивом равновесии, если центр тяжести лежит по вертикали ниже геометрического центра шара.

Равновесие называется неустойчивым, если тело, выведенное бесконечно малым отклонением из положения равновесия, не возвращается больше в первоначальное положение равновесия, но стремится к другому положению устойчивого равновесия.

Пример. Неоднородный шар с эксцентрично расположенным центром тяжести находится на горизонтальной плоскости в неустойчивом равновесии, если центр тяжести лежит на вертикали выше центра шара.

Равновесие называется безразличным, когда силы остаются в равновесии также и в новом положении тела.

Пример. Однородный шар на горизонтальной плоскости. Центр тяжести и центр шара совпадают, т. е. при любом смещении снова наступает равновесие. Потенциальная энергия при этом не изменяется, так как центр тяжести не поднимается и не опускается.

Признаком того или другого равновесия может быть потенциальная энергия. Если составляющие X, Y, Z силы $\mathbf{F}$, точка приложения которой имеет координаты x, y, z, могут быть представлены как частные производные функции $V(x, y, z)$ по x, y, z, т. е. если

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

то функция V называется потенциальной энергией; она представляет функцию, зависящую только от положения точки приложения силы. Потенциальная энергия тела весом P есть $V = Ph$, где h есть высота подъема тела над любой горизонтальной плоскостью, принятой за нулевое положение.

В состоянии равновесия производные V по координатам должны быть равны нулю, т. е. V должно иметь предельное значение либо быть постоянным. *Если V максимум — равновесие неустойчивое; если V минимум — равновесие устойчивое, при V постоянном для всех соседних положений — равновесие безразличное.*

§ 19. Центр масс и центр тяжести

Центр масс системы материальных точек с массами m_1, m_2 и т. д., общая масса которой $m = m_1 + m_2 + \ldots = \sum m_i$, определяется из уравнения

$$m\mathbf{r} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots = \sum m_i\mathbf{r}_i,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс, имеющий начало в произвольной точке O, а $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор материальной точки m_i с началом в той же точке O.

Сумма распространяется на все материальные точки системы (рис. 16).

Если приведенное выше уравнение для центра масс отнести к другой точке пространства O', из которой проведены радиусы-векторы $\mathbf{r}_i' = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i$, то имеем:

$$m\mathbf{r}' = \sum m_i\mathbf{r}_i' = \sum m_i(\mathbf{a} + \mathbf{r}_i) = m(\mathbf{a} + \mathbf{r}).$$

Этим равенством доказывается, что радиус-вектор $\mathbf{r}'$ определяет положение того же центра масс, что и радиус-вектор $\mathbf{r}$. Таким образом, положение центра масс C не зависит от выбора полюса. Центр масс называют также центром тяжести.

Выражение $m\mathbf{r}$ называют моментом m относительно O; соответственно $m_i\mathbf{r}_i$ называют моментом m_i относительно O. Если полюс совпадает с центром масс, то $\mathbf{r} = 0$. Следовательно, для центра масс как полюса, имеем:

$$\sum m_i\mathbf{r}_i = 0.$$

При однородном распределении масс вместо суммы моментов отдельных материальных точек имеем интеграл:

$$m\mathbf{r} = \int \mathbf{r}\, dm,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки массы dm.

Силы тяжести можно рассматривать как такую систему параллельных сил, которая, согласно основному уравнению динамики, пропорциональна массам, так что равнодействующая сил тяжести должна всегда проходить через центр масс, как бы ни вращать тело. На этом основании центр масс называется также центром тяжести.

Для определения центра тяжести тела с объемом V принимают, что тело однородно, т. е. равномерно заполнено массой, и определяют центр тяжести этой равномерно распределенной массы. При постоянной всюду плотности массы ρ имеем для $m = V\rho$ и $m_i = V_i\rho$

$$V\mathbf{r} = \sum V_i \mathbf{r}_i.$$

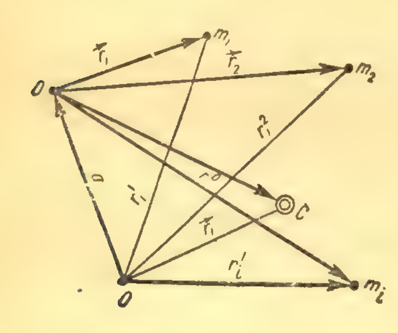


Рис. 16

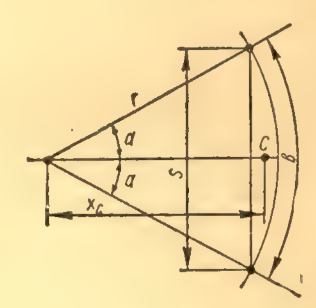


Рис. 17

Если x_C, y_C, z_C суть координаты центра масс, а x_i, y_i, z_i — координаты отдельных материальных точек, то имеем:

$$mx_C = \sum m_i x_i;$$
$$my_C = \sum m_i y_i;$$
$$mz_C = \sum m_i z_i.$$

Если $x_C = 0$, т. е. плоскость yz проходит через центр тяжести, то $\int x dm = 0$. Обычно расстояние x_C центра тяжести масс от плоскости (например плоскости yz) находят из равенства $mx_C = \int x dm$.

Если однородная фигура или тело, имеет плоскость симметрии или ось симметрии, то центр тяжести совпадает с одной из ее точек.

Определение центра тяжести различных тел. Центры тяжести поверхности вращения F или тела вращения V определяются, если заданы меридианная линия $y = f(x)$ с осью вращения, как осью x и элементом линии

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Прежде всего центр тяжести лежит на оси x, являющейся, согласно понятию симметрии, прямой центра тяжести. Если поверхность вращения или тело вращения располагаются между координатами x_1 и x_2, то для положения центра тяжести имеем:

для поверхности вращения:

$$F x_C = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} xy\,ds, \quad \text{или} \quad x_C = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy\,ds}{\int_{x_1}^{x_2} y\,ds}.$$

Для тела вращения:

$$V x_C = \pi \int_{x_1}^{x_2} xy^2\,dx, \quad \text{или} \quad x_C = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy^2\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx}.$$

Положение центра тяжести для технически важнейших линий, поверхностей и тел. В нижеследующих чертежах и формулах центр тяжести везде обозначен буквою C.

Прямая. Центр тяжести находится на середине прямой.

Периметр треугольника. Если A, B, C середины сторон a, $в$, c, то центр тяжести находится в центре круга, вписанного в треугольник A, B, C. Расстояние центра тяжести от стороны треугольника a равно

$$x_C = \frac{h_a}{2}\,\frac{b+c}{a+b+c},$$

где h_a — высота, соответствующая стороне a.

Периметр параллелограмма. Центр тяжести находится на пересечении диагоналей.

Дуга круга (рис. 17). Центр тяжести находится на прямой, делящей пополам центральный угол от центра на расстоянии, равном

$$x_C = \frac{r_s}{b} = \frac{r \sin\alpha}{\alpha}.$$

Треугольник. Центр тяжести находится на пересечении медиан. Расстояние до C от одной из сторон равно одной трети соответствующей высоты

Если x_1, y_1, z_1; x_2, y_2; z_2; x_3, y_3, z_3 — координаты вершин треугольника, то координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \quad y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);$$

$$z_C = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Параллелограмм. Центр тяжести находится на пересечении диагоналей.

Трапеция. Центр тяжести находится на прямой, соединяющей середину M и N параллельных сторон a и b (рис. 18). Расстояния h_a и h_b равны:

$$h_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b};$$

$$h_b = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b};$$

отсюда следует построение: на продолжениях параллельных сторон откладываем $BE = a$ и $GF = b$; EF пересекает MN в точке C — центре тяжести.

Круговой сектор (рис. 19) с углом

$$\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$x_C = \frac{2}{3}\, r \frac{s}{b} = \frac{2}{3}\, \frac{r \sin \alpha}{\alpha};$$

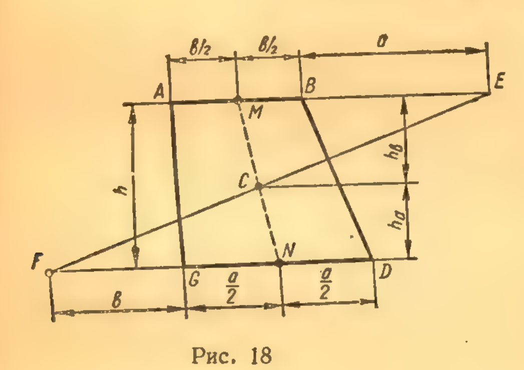


Рис. 18

Рис. 19

для площади полукруга

$$x_C = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = 0{,}4244\, r.$$

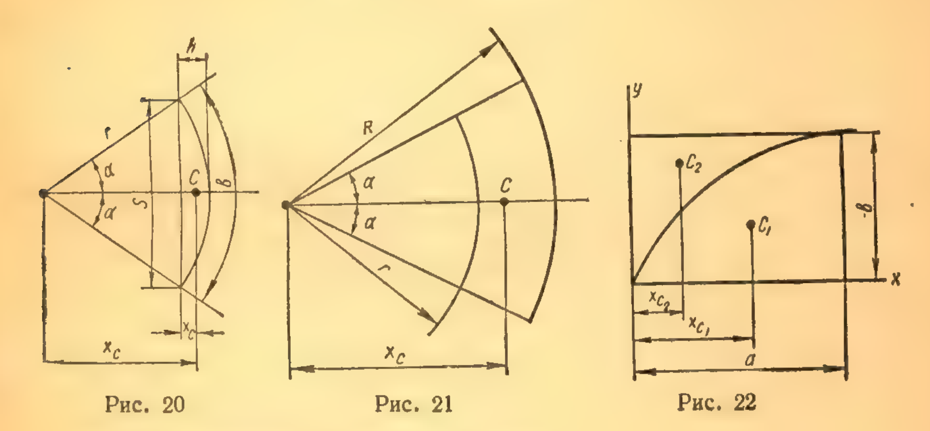


Рис. 20 Рис. 21 Рис. 22

Для площади четверти круга (квадранта):

$$x_C = \frac{4}{3}\, \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, r = 0{,}6002\, r.$$

Для площади шестой части круга (секстанта)

$$x_C = \frac{2}{\pi}\, r = 0{,}6366\, r.$$

Круговой сегмент (рис. 20)

$$x_C = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Часть кругового кольца (рис. 21)

$$x_C = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Площадь параболы (рис. 22)

$$x_{C_1} = \frac{3}{5} a, \quad y_{C_1} = \frac{3}{8} b,$$

$$x_{C_2} = \frac{3}{10} a, \quad y_{C_2} = \frac{3}{4} b.$$

§ 20. Моменты инерции

Моменты инерции и моменты центробежные для тела. Осевым моментом I_A тела относительно оси A называется сумма произведений из массы частиц dm на квадрат расстояния a этих частиц от оси A:

$$I_A = \int a^2 \, dm \quad \text{или} \quad I_A = \sum a_i^2 m_i.$$

Полярным моментом инерции I_0 тела относительно полюса 0 называется сумма произведений из массы частиц dm на квадрат расстояния r от полюса 0:

$$I_0 = \int r^2 \, dm \quad \text{или} \quad I_0 = \sum r_i^2 m_i.$$

Момент инерции всегда величина положительная, размерность его *мкГ сек*^{2}.

Момент инерции можно также писать в виде:

$$I = mi^2, \quad \text{где} \quad m = \sum m_i, \quad \text{либо} \quad m = \int dm$$

— общая масса тела, а i называется радиусом инерции. Чтобы в этом случае получить момент инерции, равный моменту инерции тела, нужно предположить, что общая масса тела сосредоточена в одной точке на расстоянии i от оси или полюса (приведенная масса).

Для трех осей A_1, A_2, A_3, пересекающихся под прямым углом в одной точке O, справедлива следующая зависимость между полярным моментом инерции I_0 и суммой трех осевых моментов инерции:

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}).$$

Если I_C — момент инерции тела с массой m относительно оси, проходящей через центр тяжести, I_A — момент инерции относительно оси параллельной, удаленной на расстояние a, то

$$I_A = I_C + ma^2.$$

Соответственная зависимость существует между полярным моментом инерции I_0 для любой точки O и полярным моментом инерции $(I_0)_C$ для центра тяжести, находящегося от О на расстоянии a:

$$I_0 = (I_0)_C + ma^2.$$

При осях параллельных момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, наименьший.

Если I_1 и I_2 — моменты инерции двух тел относительно двух параллельных осей, проходящих через центры тяжести, то момент инерции общего тела, составленного из данных относительно новой параллельной оси, проходящей через общий их центр тяжести, определяется по формуле:

$$I = I_1 + I_2 + \frac{a^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где a означает расстояние между полярными осями центров тяжести масс m_1 и m_2.

Центробежный момент тела, отнесенный к двум плоскостям, есть произведение массы частицы dm на расстояния x, y от этой частицы до обеих плоскостей:

$$I_{xy} = \int xy\,dm, \quad \text{или} \quad I_{xy} = \sum x_i y_i m_i.$$

Центробежный момент может быть положительным, отрицательным или нулем. Он имеет ту же размерность, что и момент инерции.

Для тела, центр тяжести которого совпадает с нулевой точкой прямоугольной координатной системы xyz, имеем центробежные моменты I_{yz}, I_{zx}, I_{xy}; относительно параллельно расположенной координатной системы $x'\ y'\ z'$, в которой координаты центра тяжести тела a, b, c, имеем соответствующие центробежные моменты:

$$I_{yz'} = I_{yz} + mbc, \quad I_{zx'} = I_{zx} + mca,$$
$$I_{zy'} = I_{xy} + mab.$$

Пусть в прямоугольной системе координат I_x, I_y, I_z будут три осевых момента инерции, а I_{xy}, I_{yz} и I_{zx} — три центробежных момента инерции, тогда можно определить момент инерции I_A для оси, проходящей через нулевую точку и образующей с координатными осями углы α, β, γ:

$$I_A = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta -$$
$$- 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Для каждой точки тела существует прямоугольная координатная система, для которой три центробежных момента инерции I_{xy}, I_{yz} и I_{xz} равны нулю; эти три оси называются главными осями, а соответствующие им моменты инерции — главными моментами инерции, которые обычно обозначаются через A, B и C ($A > B > C$). Момент инерции I_A для оси, образующей углы α, β и γ с главными осями инерции, равен:

$$I_A = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Если тело имеет плоскость симметрии, то каждая прямая, к ней перпендикулярная, представляет главную ось инерции. Если тело имеет ось симметрии то эта ось представляет одну из трех главных осей инерции для каждой из ее точек.

Если по оси отложить от начала координат отрезок $\frac{1}{\sqrt{I_A}}$, то конечные точки отрезка лежат на эллипсоиде, главные оси которого совпадают с главными осями инерции, этот эллипсоид называют эллипсоидом инерции, его уравнение

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

Величины главных осей будут $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{B}}$ и $\frac{1}{\sqrt{C}}$.

Эллипсоид инерции для центра тяжести называется центральным эллипсоидом; его главные оси называются также свободными осями тела.

В теории волчка наряду с эллипсоидом инерции важную роль играет также эллипсоид количества вращения. Он имеет то же направление главных осей, что и эллипсоид инерции, и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\xi^2}{A}+\frac{\eta^2}{B}+\frac{\zeta^2}{C}=1.$$

Величины главных осей его относятся, следовательно, как $\sqrt{A}:\sqrt{B}:\sqrt{C}$, т. е. являются обратными величинами соответственным главным осям эллипсоида инерции.

Моменты инерции плоских фигур. Осевым или экваториальным моментом инерции плоской фигуры относительно оси x, лежащей в этой же плоскости, называется сумма произведений из элементов площади dF на квадрат расстояния этих элементов от оси x:

$$I_x=\int y^2\,dF.$$

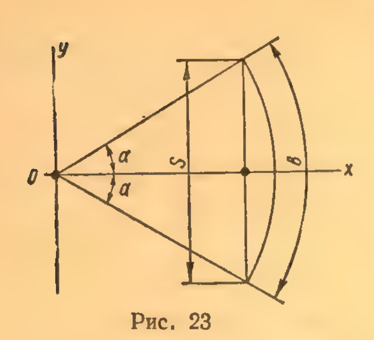


Рис. 23

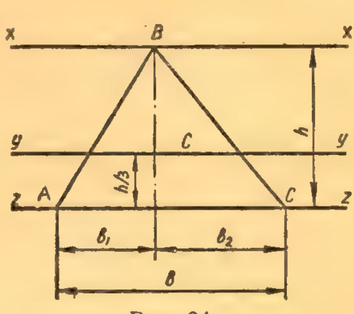


Рис. 24

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно полюса 0, расположенного в плоскости, называется сумма произведений из элементов площади dF на квадрат расстояния r этих элементов от полюса 0:

$$I_0=\int r^2\,dF.$$

Центробежным моментом плоской фигуры относительно двух расположенных в плоскости осей называется сумма произведений из элементов площади dF на произведение кратчайших расстояний x и y этих элементов от обеих осей:

$$I_{xy}=\int xy\,dF.$$

Если принять O за начало прямоугольной системы координатных осей, то для полярного момента инерции будем иметь:

$$I_0=\int r^2\,dF=\int (x^2+y^2)\,dF=I_x+I_y,$$

где I_x и I_y осевые моменты инерции площади относительно осей x и y.

Если I_C — момент инерции площади F относительно оси, проходящей через центр тяжести, I_x — момент инерции относительно параллельной оси x, удаленной на расстоянии a, то:

$$I_x=I_C+a^2F,$$

Моменты инерции важнейших линий и поверхностей. Тела и фигуры предполагаются однородными

$$M = \frac{P}{g},$$

где M — общая масса тела; g — ускорение силы тяжести и P — вес тела. Индексы при I означают ось, относительно которой вычисляется момент инерции; γ_l — вес единицы длины; γ_S — вес единицы площади.

Прямая линия длиною l; одна конечная точка лежит на оси, другая на расстоянии r от оси;

$$I = \frac{\gamma_l}{g}\, l\, \frac{r^2}{3} = M\frac{r^2}{3}.$$

Дуга круга с радиусом r и центральным углом 2α (рис. 23):

$$I_x = \frac{\gamma_l}{g}\cdot\frac{r^3}{2}(\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha) = M\frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha}\right),$$

$$I_y = \frac{\gamma_l}{g}\cdot\frac{r^3}{2}(\operatorname{arc} 2\alpha + \sin 2\alpha) = M\frac{r^2}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha}\right),$$

$$I_{p0} = \frac{l}{g}\, r^3 \operatorname{arc} 2\alpha = Mr^2.$$

Полная окружность: $2\alpha = 360°$, $\operatorname{arc} 2\alpha = 2\pi$:

$$I_{p0} = \frac{\gamma_l}{g}\, r^3\, 2\pi = Mr^2;$$

$$I_x = I_y = \frac{\gamma_l}{g}\, r^3\pi = \frac{Mr^2}{2}.$$

Треугольник; C — центр тяжести треугольника (рис. 24):

$$I_x = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{bh^3}{4} = M\frac{h^2}{2}; \quad I_y = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{bh^3}{36} = M\frac{h^2}{18};$$

$$I_z = \frac{\gamma_S}{g}\cdot\frac{bh^3}{12} = M\frac{h^2}{6},$$

$$I_H = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{h\left(b_1^3 + b_2^3\right)}{12} = M\frac{b_1^3 + b_2^3}{6b};$$

$$I_{pB} = \frac{\gamma_S}{g}\left(\frac{bh^3}{4} + \frac{h\left(b_1^3 + b_2^3\right)}{12}\right);$$

$$I_{pC} = \frac{\gamma_S}{g}\left(\frac{bh^3}{36} + \frac{h\left(b_1^3 + b_2^3\right)}{12} - \frac{bh\,(b_2 - b_1)^2}{18}\right) = M\frac{a^2 + b^2 + c^2}{36}.$$

Для любой оси, проходящей через центр тяжести, справедливо:

$$I_C = M\left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right)/12,$$

где l_1, l_2, l_3 — расстояния вершин от оси.

Равнобедренный треугольник $b_1 = b_2 = \frac{b}{2}$:

$$I_н = \frac{\gamma_S}{g} \cdot \frac{b^3 h}{48}; \quad I_{PB} = \frac{\gamma_S}{g} \cdot \frac{bh(12h^2 + b^2)}{48};$$

$$I_{PC} = \frac{\gamma_S}{g} \frac{bh(4h^2 + 3b^2)}{144}.$$

Параллелограмм (рис. 25):

$$I_D = \frac{\gamma_S}{g} \frac{DD_1^3 \sin^3 \varphi}{48} = M \frac{D_1^2 \sin^2 \varphi}{24}$$

Ромб:

$$I_D = \frac{\gamma_S}{g} \cdot \frac{DD_1^3}{48} = M \frac{D_1^2}{24}.$$

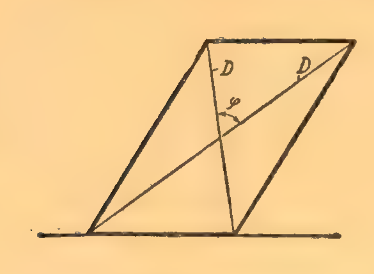


Рис. 25

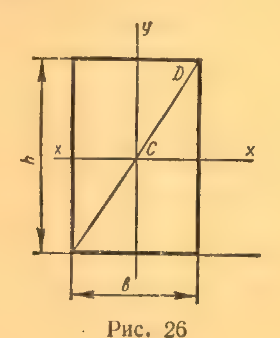


Рис. 26

Прямоугольник (рис. 26):

$$I_D = \frac{\gamma_S}{g} \frac{D^4 \sin^3 \varphi}{48} = M \frac{D^2 \sin^2 \varphi}{24},$$

$$I_x = \frac{\gamma_S}{g} \frac{bh^3}{12} = M \frac{h^2}{12}, \quad I_y = \frac{\gamma_S}{g} \frac{b^3 h}{12} = M \frac{b^2}{12},$$

$$I_z = \frac{\gamma_S}{g} \frac{bh^3}{3} = M \frac{h^2}{3};$$

$$I_{PC} = \frac{\gamma_S}{g} \frac{bh(b^2 + h^2)}{12} = M \frac{b^2 + h^2}{12}.$$

Квадрат со стороной a:

$$I_x = I_y = I_D = \frac{\gamma_S}{g} \frac{a^4}{12} = M \frac{a^2}{12};$$

$$I_a = \frac{\gamma_S}{g} \frac{a^4}{3} = M \frac{a^2}{3};$$

$$I_{PC} = \frac{\gamma_S}{g} \frac{a^4}{6} = M \frac{a^2}{6}.$$

Равнобедренная трапеция (рис. 27):

$$I_a = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{h^3(a+3b)}{12} = M\,\frac{h^2}{6}\,\frac{a+3b}{a+b},$$

$$I_b = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{h^3(3a+b)}{12} = M\,\frac{h^2}{6}\,\frac{3a+b}{a+b},$$

$$I_m = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{h}{48}\,\frac{a^4-b^4}{a-b} = M\,\frac{a^2+b^2}{24},$$

$$I_c = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{h^3}{36}\,\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b} = M\,\frac{h^2}{18}\,\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}.$$

Круг (любого диаметра):

$$I_d = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi r^4}{4} = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi d^4}{64} = M\,\frac{r^2}{4},$$

$$I_{PO} = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi r^4}{2} = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi d^4}{32} = M\,\frac{r^2}{2}.$$

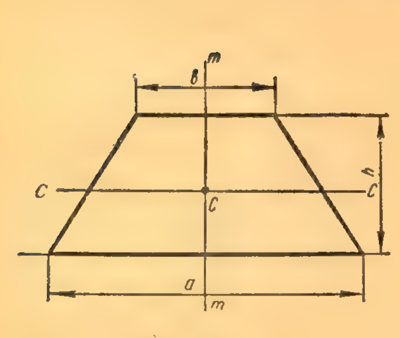


Рис. 27

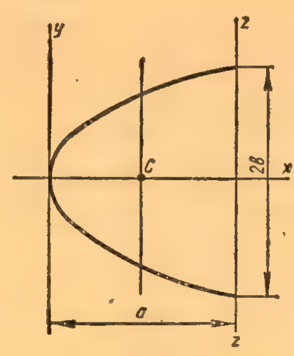


Рис. 28

Полукруг. Для ограничивающего диаметра (ось x) и линии симметрии (ось y) имеем:

$$I_x = I_y = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi r^4}{8} = M\,\frac{r^2}{4}.$$

Для центра:

$$I_{PO} = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi r^4}{4} = M\,\frac{r^2}{2}.$$

Для центра тяжести:

$$I_{PC} = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi r^4}{4}\left(1-\frac{32}{9\pi^2}\right) = M\,\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{32}{9\pi^2}\right).$$

Круговое кольцо (наружный радиус R, внутренний радиус r):

$$I_d = \frac{\gamma_S}{g}\,\frac{\pi(R^4-r^4)}{4} = M\,\frac{R^2+r^2}{4}; \quad I_{PO} = 2I_d.$$

Эллипс. Для оси $2a$, как оси x, для оси $2b$, как оси y, и центра O как полюса:

$$I_a = \frac{\gamma s}{g} \cdot \frac{\pi a b^3}{4} = M \frac{b^2}{4}; \quad I_b = \frac{\gamma s}{g} \frac{\pi a^3 b}{4} = M \frac{a^2}{4};$$

$$I_{PO} = \frac{\gamma s}{g} \cdot \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2) = M \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Парабола (рис. 28):

$$I_x = \frac{\gamma s}{g} \frac{4ab^3}{15} = M \frac{b^2}{5};$$

$$I_y = \frac{\gamma s}{g} \frac{4a^3 b}{7} = M \frac{3a^2}{7},$$

$$I_z = \frac{\gamma s}{g} \frac{32a^3 b}{105} = M \frac{8a^2}{35};$$

$$I_c = \frac{\gamma s}{g} \frac{16a^3 b}{175} = M \frac{12a^2}{175}.$$

КИНЕМАТИКА

§ 21. Кинематика точки

Кинематика есть часть механики, изучающая движение с геометрической точки зрения, независимо от причин, его вызывающих.

Прямолинейное движение. Положение точки, находящейся в прямолинейном движении, вполне определяется нулевой точкой 0 прямого пути и расстоянием данной точки $s = f(t)$ от нулевой точки в известный момент времени. Путь s можно изобразить графически как функцию времени t при помощи кривой времени — пути (рис. 29). Скорость точки выражается формулой:

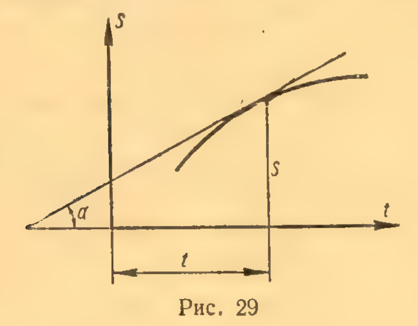


Рис. 29

Рис. 30

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ускорение точки

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}.$$

Если движение точки графически изображено кривой времени — скорости (рис. 30), то

$$w = \frac{dv}{dt} = \operatorname{tg}\beta \quad \text{и} \quad s = \int_0^t v\,dt.$$

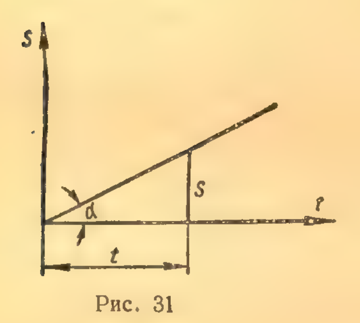


Рис. 31

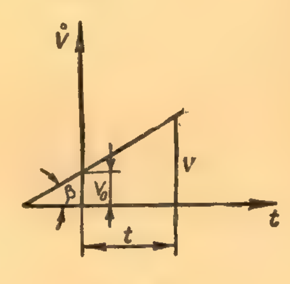


Рис. 32

При движении точки по прямой линии с постоянной скоростью кривая времени — пути представляется прямой линией (рис. 31) и $\operatorname{tg}\alpha = v_0 = \text{const}$.

В этом случае ускорение равняется нулю. Пройденный путь

$$s = v_0 t.$$

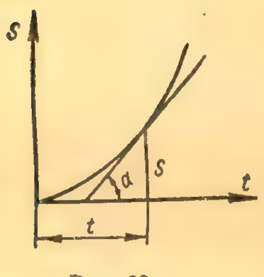


Рис. 33

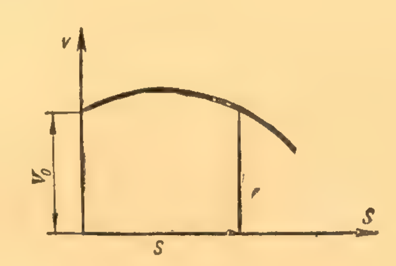


Рис. 34

Движение точки называется равномерно ускоренным или равномерно замедленным, если ускорение w является величиной постоянной и независимой от времени. Движение равномерно ускоренное — если постоянное ускорение положительно и равномерно-замедленное — если ускорение отрицательно.

На рис. 32 диаграмма времени — скорости является прямой линией (рис. 32) с постоянным наклоном:

$$\operatorname{tg}\beta = \bar{w}.$$

На рис. 33 кривая времени — пути является параболой:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ds}{dt} = v = v_0 + wt,$$

где v_0 — скорость, соответствующая времени $t = 0$. Пройденный путь.

$$s = \int v\,dt = v_0 t + \frac{1}{2} wt^2 = \frac{v + v_0}{2} t = \frac{v^2 - v_0^2}{2w}.$$

При $v_0 = 0$ и $s = h$ получаем

$$h = \frac{v^2}{2w} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{2wh} = wt.$$

Пример. Свободное падение в безвоздушном пространстве с ускорением

$$\bar{w} = g = 9{,}81 \frac{м}{сек^2}.$$

Если подсчитать время и путь от момента начала падения точки, находившейся в покое ($v_0 = 0$), то получаем:

$$h = \frac{gt^2}{2}; \quad v = gt; \quad h = \frac{v^2}{2g}; \quad v = \sqrt{2gh}.$$

При прямолинейном движении точки с переменным ускорением движение можно представить графически с помощью кривой времени—пути (рис. 29) или кривой времени — скорости (рис. 30) или, наконец, кривой пути — скорости (рис. 34).

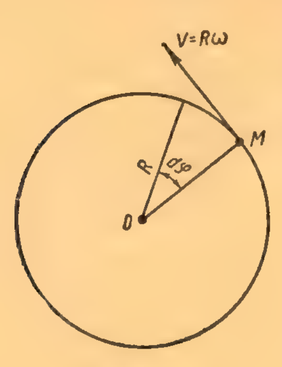


Рис. 35

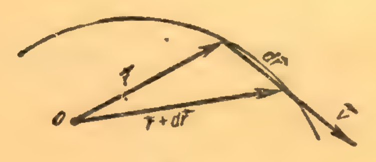


Рис. 36

Если дана кривая времени — скорости, то интегрированием $s = \int v dt$ можно получить кривую времени — пути.

Если скорость дана функцией пройденного пути $v = v(s)$, то время находится как функция пути из $v = \frac{ds}{dt}$:

$$t = \int \frac{ds}{v(s)}.$$

Угловая скорость. Круговое движение. При движении точки M по окружности (рис. 35) угловой скоростью вращения в момент времени t называют предел отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, когда Δt стремится к нулю. Обозначая угловую скорость буквой ω, имеем:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

т. е. угловая скорость в данный момент равна первой производной от угла поворота по времени. Размерность угловой скорости $[\omega] = сек^{-1}$.

Если радиус окружности обозначить через R, то скорость точки M можно выразить так:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt},$$

направлена она по касательной к окружности. Заменяя

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

имеем:

$$v = R\omega.$$

Криволинейное движение. Положение точки на ее криволинейном пути определяется нулевой точкой O в пространстве и радиусом-вектором $\mathbf{r}$, с началом в точке O, соответствующим временному положению точки (рис. 36). Если $\mathbf{r}$ известен как функция времени, то этим вполне определено движение точки.

По радиусу-вектору $\mathbf{r}$ находим скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

При применении прямоугольной координатной системы (x, y, z) положение точки можно определить, представляя все ее три прямоугольные координаты в функции времени:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Скорость в этом случае выражается составляющими:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{\psi}(t) = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{\chi}(t) = \frac{dz}{dt},$$

а ускорение — составляющими:

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \ddot{\psi}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \ddot{\chi}(t) = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Величина скорости

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2};$$

величина ускорения

$$|\mathbf{w}| = w = \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \ddot{\psi}^2 + \ddot{\chi}^2}.$$

Если вектор скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

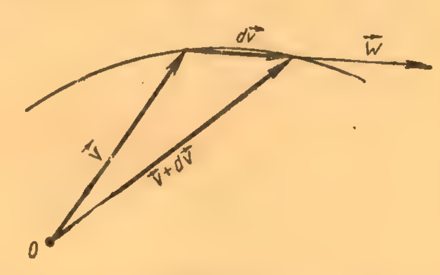


Рис. 37

будет отложен от какой-нибудь определенной точки O пространства, то конечная точка $\mathbf{v}$ описывает годограф (рис. 37). Скорость по годографу даст, по величине и направлению, ускорение

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Из годографа видно, что вектор ускорения $\mathbf{w}$ и вектор скорости $\mathbf{v}$ совпадают по направлению только при прямолинейном движении точки.

При криволинейном движении точки вектор ускорения никогда не совпадает с направлением касательной к кривой пути.

Вектор ускорения $\mathbf{w}$, всегда лежащий в плоскости, касательной к кривой пути, можно разложить на касательную составляющую $w_\tau = \frac{dv}{dt}$ — производной скорости по времени и на нормальную составляющую, направленную к центру кривизны,

$$\bar{w}_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho = v\omega.$$

При этом ρ означает радиус кривизны кривой пути, $\omega = \frac{v}{\rho}$ угловую скорость, с которой точка движется вокруг центра кривизны; w_τ зависит от изменения величины скорости, а $\bar{w}_n$ — от изменения направления скорости. При $w_\tau = 0$ получаем $v = \text{const}$, т. е. v по величине не изменяется и точка движется по кривой любой формы с постоянной скоростью. При $w_n = 0$ получаем прямолинейное движение.

Пример. Движение точки по кругу радиуса r.

Касательное ускорение точки $w_\tau = \frac{dv}{dt}$. При $v = \text{const}$ ускорение $\bar{w}_\tau = 0$.

Нормальное ускорение $\bar{w}_n = \frac{v^2}{r}$ направлено к центру круга. При постоянной скорости v оно имеет постоянное значение.

При помощи основного динамического уравнения из ускорения $\mathbf{w}$, умножением его на массу точки, получаем по направлению и величине силу $\mathbf{F}$, необходимую для получения соответствующего движения.

Если точка совершает одновременно два частных движения, то ее действительное движение получается сложением этих частных движений.

§ 22. Движение твердого тела

Поступательное перемещение. Под поступательным перемещением твердого тела подразумевается такое движение, при котором все точки тела описывают конгруэнтные пути, т. е. такие кривые, которые при наложении совпадают всеми своими точками. Таким образом, для указания движения всего тела достаточно указать движение какой-нибудь одной его точки. Из начального положения можно получить каждое последующее.

Все, что было сказано относительно движения точки, действительно и для поступательного перемещения твердого тела, так как перемещение тела определяется движением одной его точки.

Можно соединить в одно два движения, которые совершаются одновременно одним и тем же твердым телом, складывая геометрически скорости и ускорения обоих частных движений:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \dotplus \mathbf{v}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Вращение. Бесконечно малое вращение называется элементом вращения. Ему соответствует угол вращения $d\alpha$ вокруг оси вращения в элемент времени dt. Путь точки, лежащей на расстоянии a от оси вращения, будет $ds = a d\alpha$. При неизменной оси вращения необходимо для полного определения движения знать, кроме оси вращения, еще угол вращения α как функцию времени $\alpha = \alpha(t)$.

Угловая скорость ω есть скорость изменения угла вращения:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Какая-нибудь точка на расстоянии a от оси вращения обладает скоростью $v = a\omega$. Угловое ускорение ε означает скорость изменения угловой скорости

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Какая-нибудь точка M на расстоянии a от оси вращения обладает касательным ускорением $w_t = a\varepsilon$ и нормальным ускорением в перпендикулярном направлении к оси вращения:

$$w_n = \frac{v^2}{a} = a\omega^2.$$

Вращению около неподвижной оси вполне соответствуют формулы прямолинейного движения точки. Надо только вместо s, v и w подставить α, ω и ε. При постоянной угловой скорости получаем ее значение

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha}{t} = \frac{\text{угол вращения}}{\text{соответственное время}}.$$

Вместо угловой скорости в технике пользуются числом оборотов n в минуту, которое связано с угловой скоростью равенством:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}.$$

При постоянном угловом ускорении имеем:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1},$$

т. е. равно отношению угловой скорости к соответствующему промежутку времени.

Вращение называется равномерно ускоренным или замедленным, смотря по тому, имеет ли ε положительное или отрицательное значение. Аналогично формулам равномерно ускоренного движения точки получаем:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

$$\alpha = \int \omega\, dt = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{\omega + \omega_0}{2} t = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}.$$

Направление вращения, при неподвижной оси, указывается знаком угловой скорости; при этом одно из направлений считается положительным, а другое — отрицательным. Этот способ, однако, нецелесообразен, в случае, если ось вращения меняется. В этом случае ось вращения, величина и направление угловой скорости задается вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$; абсолютное значение вектора $\boldsymbol{\omega}$ дает величину угловой скорости, линия его направления — ось вращения, а стрелка у $\boldsymbol{\omega}$ указывает направление вращения; за положительное направление принято вращение против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора на его исходную точку.

Чтобы для точки M твердого тела (рис. 38) определить скорость $\mathbf{v}$, соответствующую угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, достаточно взять на оси вращения точку O и провести радиус-вектор $\overline{OM} = \mathbf{r}$ (рис. 38). Величина скорости $v = a\omega$ и направление $\mathbf{v}$, перпендикулярное к плоскости, образуемой $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$, определяются векторным произведением:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

При прямоугольной координатной системе последнее уравнение может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \mathbf{j}(\omega_3 x - \omega_1 z) + \mathbf{k}(\omega_1 y - \omega_2 x)$$

или

$$v_1 = \omega_2 z - \omega_3 y; \quad v_2 = \omega_2 x - \omega_2 z; \quad v_3 = \omega_1 y - \omega_2 x.$$

Если в твердом теле только одна точка O неподвижна и тело произвольно вращается около этой точки, то такое движение называется сферическим. Оно состоит из вращения вокруг произвольных осей вращения, которые всегда проходят через неподвижную точку O. Вращению твердого тела вокруг неподвижной точки соответствуют три степени свободы.

Ускорение точки M при вращении вокруг неподвижной точки O следует из

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

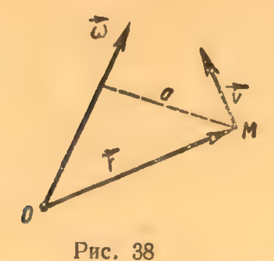


Рис. 38

Рис. 39

дифференцированием по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{a.}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}$ — вектор углового ускорения.

Общий случай движения твердых тел. Сложением поступательного и вращательного движений получается общее движение твердого тела. Движение тела в данный момент определяется поступательной скоростью движения v_0 произвольной точки O и скоростью вращения $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через точку O. Точка M, лежащая на расстоянии $\mathbf{r}$ от O, имеет мгновенную скорость (рис. 39):

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ есть скорость точки M относительно O, вследствие чего можно написать:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{M\,\text{отн.}\,O}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_M = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{M_O}.$$

Ввиду наличия трех степеней свободы поступательного движения и трех степеней свободы вращения тело имеет в пространстве шесть степеней свободы.

Если для исследования мгновенного состояния движения твердого тела взята другая начальная точка O' (рис. 39), то ее скорость выражается через скорость первой начальной точки:

$$\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Вычитанием из первого векторного уравнения второго, получаем:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_0' + \omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \mathbf{v}_0' + \omega \times \mathbf{r}',$$

т. е. при переходе к другой начальной точке, мгновенная угловая скорость ω не меняется; меняется лишь скорость поступательного движения $\mathbf{v}$.

§ 23. Относительное, переносное и абсолютное движения

Движение точки M по отношению к подвижным осям (к подвижной системе отсчета) называется относительным. Движение подвижных осей по отношению к неподвижной системе отсчета называется переносным. Движение точки M относительно неподвижных осей условно называется абсолютным движением. Абсолютное движение точки (или тела) может быть названо также сложным или результирующим движением.

Относительное движение при поступательном движении подвижной системы отсчета. Обозначим скорость и ускорение тела, принятого за подвижную систему отсчета, через $\mathbf{v}_l$ и $\mathbf{w}_l$, а скорость и ускорение точки M, относительно движущегося тела, через $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{w}_r$. Абсолютная скорость точки имеет значение:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e,$$

а абсолютное ускорение

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r, \quad \text{или} \quad \mathbf{w}_r = \mathbf{w} - \mathbf{w}_e.$$

Эти соотношения верны в случае, если подвижная система отсчета совершает только поступательное движение.

Относительное движение при произвольном движении подвижной системы отсчета. Обозначим скорость точки M относительно тела, принятого за подвижную систему отсчета, через $\mathbf{v}_r$, а скорость движущегося тела, т. е. скорость той точки движущегося тела, с которой точка M в данный момент совпадает, через v_e; тогда абсолютная скорость точки M, как и в первом случае, будет геометрической суммой двух скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e.$$

Подобное простое соотношение неприменимо для нахождения абсолютного ускорения. К ускорению w_e движущегося тела и к относительному ускорению $\mathbf{w}_r$ точки M прибавляется еще так называемое **ускорение Кориолиса** $\mathbf{w}_c$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c$$

или

$$\mathbf{w}_r = \mathbf{w} - \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_c.$$

Ускорение Кориолиса представляет собой удвоенное векторное произведение угловой скорости ω тела и относительной скорости $\mathbf{v}_r$. При $\omega = 0$, т. е. только при поступательном движении системы отсчета ускорение Кориолиса исчезает.

Для прямоугольной координатной системы с составляющими угловой скорости ω_1, ω_2, ω_3 и с составляющими относительной скорости v_{r1}, v_{r2}, v_{r3} получаем составляющие ускорения Кориолиса.

$$w_{c1} = 2(\omega_2 v_{r3} - \omega_3 v_{r2}),$$
$$w_{c2} = 2(\omega_3 v_{r1} - \omega_1 v_{r3}),$$
$$w_{c3} = 2(\omega_1 v_{r2} - \omega_2 v_{r1}).$$

ДИНАМИКА

§ 24. Динамика материальной точки

Прямолинейное движение. Основное уравнение динамики имеет вид:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Сила и ускорение материальной точки представляют собою векторы одинакового направления.

При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения, а следовательно, и вектор силы, совпадают с прямой, по которой происходит движение материальной точки. Если сила **F** равняется нулю, то материальная точка находится либо в покое, либо в постоянном прямолинейном движении с одинаковой скоростью, так как ускорение также равняется нулю. Если сила постоянна по величине и направлению, то мы имеем дело с равномерно ускоренным или равномерно замедленным движением. Если начальная скорость равна нулю или совпадает с направлением силы, то движение будет прямолинейным, равномерно ускоренным или же равномерно замедленным. Например, падение в безвоздушном пространстве. Силой в этом случае, по величине и направлению, является притяжение земли, т. е. сила тяжести материальной точки.

Криволинейное движение. Из основного уравнения динамики получим необходимую для движения силу **F**, как по направлению, так и по величине:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

Соответственно разложению ускорения на касательное и нормальное ускорение можно и силу разложить на касательную

$$|\mathbf{F}_t| = mw_t = m\frac{dv}{dt}$$

и нормальную

$$|\mathbf{F}_n| = mw_n = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Как $\mathbf{F}_t$, так и $\mathbf{F}_n$ лежат в соприкасающейся плоскости к кривой пути, образуемой нормальной и касательной линиями. $\mathbf{F}_t$ влияет на изменение величины скорости **v**, а $\mathbf{F}_n$ — на изменение направления скорости **v**. Если $\mathbf{F}_n = 0$, то мы имеем дело с прямолинейным движением и $\mathbf{F}_t$ влияет на ускорение прямолинейного движения. При криволинейном движении $\mathbf{F}_n$ не может равняться нулю. Если $\mathbf{F}_t = 0$, то величина v скорости остается постоянной и $\mathbf{F}_n$ влияет только на изменение направления **v**.

Пример. Движение точки по окружности радиуса r с постоянной скоростью v. Здесь силой является центростремительная сила $F_n = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$, всегда направленная к центру круга. Реакцией точки на действие центростремительной силы является центробежная сила. Например, железнодорожный вагон (как материальная точка) испытывает на себе влияние силы, направленной к центру кривизны пути, т. е. влияние центростремительной силы со стороны наружных рельс. Колеса производят на наружные рельсы в свою очередь давление такой же силы, но противоположного направления (центробежная сила).

Существенно отметить, что центростремительная и центробежная силы приложены не к одному и тому же телу, а к разным телам (колеса вагона и рельсы).

Слово центробежная сила имеет и второе значение. Мы можем сравнивать криволинейное движение материальной точки с простой задачей равновесия, если систему отсчета (начало координат) свяжем с движущимся телом. В этой системе координат к действующим силам, конечно, не находящимся в равновесии так как они вызывают криволинейное движение, присоединим еще новую силу, которая находилась бы в равновесии с действующими. В случае материальной точки, проходящей по кривой с постоянной скоростью, эта добавочная сила будет равна и противоположна центростремительной силе. Эта сила, на самом деле, не существует в числе действующих на точку сил; она служит лишь для того, чтобы задачу динамики свести к соответствующей задаче равновесия; такая добавочная сила также называется центробежной. В противоположность вышеупомянутой центробежной силе в данном случае нужно представить себе добавочную силу, действующую непосредственно на материальную точку.

Пример. Подъем наружного железнодорожного рельса на закруглении (рис. 40).

По закону независимости движений можно при наличии нескольких сил, одновременно действующих на материальную точку, рассматривать движение под влиянием отдельных сил и сложением получить действительное движение; при этом силы складываются геометрически, как и скорости и ускорения. В частности можно действительное движение материальной точки проектировать на оси прямоугольной координатной системы x, y, z. Основное уравнение динамики пишется тогда не в векторной, а в координатной форме:

$$x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Пример. Движение тела, брошенного под углом, не принимая в расчет сопротивления воздуха (рис. 41). Ввиду действия только одной силы $Z = -P$, из $Y = 0$ и $v_{Oy} = 0$ следует, что это движение происходит все время в плоскости xz; из $X = 0$ следует, что горизонтальная проекция скорости сохраняет все время одно и то же значение v_{Ox}.

Из $Z = -P = m\frac{dv_z}{dt}$ следует, что движение материальной точки в вертикальной проекции соответствует свободному падению. Движение брошенного тела составляется, таким образом, из движения свободного падения по вертикали и горизонтального движения с постоянной скоростью.

Движение брошенного тела можно вывести интегрированием векторного уравнения $\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, где $\mathbf{g}$ есть ускорение силы тяжести, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t$, причем постоянная интегрирования $\mathbf{v}_0$ означает начальную скорость

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \text{ (рис. 41).}$$

Из условия

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{Ox} = v_0 \cos\alpha$$

следует:

$$x = v_0 t \cos\alpha. \qquad (1)$$

Из условия

$$\frac{dv_z}{dt} = -g$$

следует:

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt$$

и

$$z = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) суть уравнения параболы с параметром t. Исключением t получаем уравнение параболы:

$$z = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

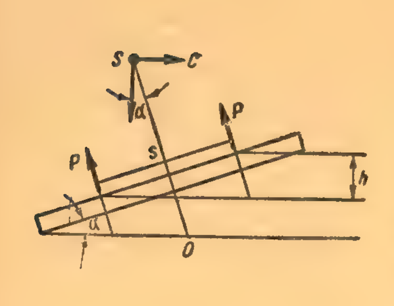


Рис. 40

Рис. 41

Дальность полета $w = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$, т. е. максимальное значение для $\alpha = 45°$; продолжительность полета $t = \frac{w}{v_0} \cos\alpha = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha$; высота полета $h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha$.

Если материальная точка вынуждена совершать движение по определенной поверхности, уравнение которой $f(x, y, z) = 0$, причем движение точек происходит без трения, то найти дифференциальное уравнение движения точки можно исключением λ из трех уравнений:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y - \lambda \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z - \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

где X, Y, Z — составляющие данной внешней силы и

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

— составляющие нормального давления N поверхности на материальную точку. Величина этого нормального давления

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

§ 25. Потенциальное силовое поле

Часть пространства, в каждой точке которого действует сила, зависящая от положения этой точки, т. е. от ее координат x, y, z, называется силовым (векторным) полем.

Проекции X, Y, Z силы поля на координатные оси являются некоторыми однозначными и непрерывными функциями координат x, y, z, т. е.

$$X = f_1(x, y, z); \quad Y = f_2(x, y, z); \quad Z = f_3(x, y, z).$$

Предположим, что существует такая функция координат $U(x, y, z)$, частные производные которой по координатам равны проекциям силы поля на соответствующие координатные оси, т. е.

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad \text{(a)}$$

Функция U называется силовой функцией данного силового поля, а силовое поле в этом случае называется потенциальным.

Элементарная работа силы потенциального поля имеет значение:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = X dx + Y dy + Z dz =$$
$$= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU.$$

Таким образом, элементарная работа силы потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции.

Следовательно, работа на конечном пути, когда точка приложения силы перемещается из положения M_0 в положение M, будет равна:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0, \qquad \text{(в)}$$

т. е. *работа силы потенциального поля равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и, следовательно, не зависит ни от вида, ни от длины траектории, по которой перемещается точка приложения силы из положения M_0 в положение M.*

Отсюда следует, что в случае однозначной силовой функции U *работа силы потенциального поля на всякой замкнутой траектории равна нулю.*

В качестве примера рассмотрим поле силы тяжести. Такое поле на небольших расстояниях будет однородным, так как сила тяжести mg во всех точках поля имеет постоянное значение. Направим ось z вертикально вверх. Проекции силы тяжести на координатные оси будут:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg.$$

Следовательно,

$$dU = X dx + Y dy + Z dz = -mg dz,$$

интегрированием находим силовую функцию:

$$U = -mgz + C.$$

Если в этом равенстве $z=\text{const}$, то и $U=\text{const}$, откуда следует, что во всех точках данной горизонтальной плоскости силовая функция сохраняет постоянную величину. Такая поверхность, на которой силовая функция имеет постоянное значение, называется поверхностью уровня или эквипотенциальной поверхностью.

§ 26. Потенциальная энергия

Согласно второму закону динамики:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Умножая обе части равенства на элемент пути $d\mathbf{s}$, имеем:

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{s} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}d\mathbf{s} = md\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \qquad (a)$$

Работа силы $\mathbf{F}$ на пути $d\mathbf{s}$ в координатах выражается равенством:

$$\mathbf{F}d\mathbf{s} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Выражение $\frac{mv^2}{2}$ представляет собой кинетическую энергию материальной точки. Интегрируя в определенных пределах отрезка кривой пути, получаем:

$$A = \int \mathbf{F}d\mathbf{s} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Для того чтобы дифференциальный трехчлен представлял полный дифференциал некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы множители при dx, dy и dz были частными производными некоторой функции $U(x, y, z)$, т. е.

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (b)$$

Если эти условия выполняются, то

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = dU(x, y, z).$$

Функция $U(x, y, z)$ называется потенциалом силы $\mathbf{F}$.

Равенство (a) запишется в виде:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU.$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{mv^2}{2} = U + \text{const}. \qquad (c)$$

Функция $V = -U + \text{const}$ называется потенциальной энергией точки.

Сумма потенциальной и кинетической энергии точки есть величина постоянная (закон сохранения энергии):

$$V + U = \text{const}.$$

Из равенств (c) и (b) следует

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad (d)$$

т. е. проекции силы потенциального поля на координатные оси равны взятым с обратным знаком частным производным от потенциальной энергии по соответствующим координатам.

§ 27. Закон сохранения количества движения

Закон сохранения количества движения является прямым следствием законов движения.

Рассмотрим систему из нескольких материальных точек, которые взаимодействуют между собой, но не подвергаются извне действию других тел. Система, которая включает в себя все взаимодействующие тела (так, что ни на одно из тел системы не действуют другие тела, кроме включенных в систему), называется замкнутой системой. Силы, действующие между телами, образующими замкнутую систему, называют внутренними силами (для этой системы тел).

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из материальных точек с массами m_1, m_2, m_3. . . Пусть скорости этих точек — $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. . . , а внутренние силы, действующие между ними, — $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{13}$, . . . $\mathbf{F}_{21}$, $\mathbf{F}_{23}$, . . . , $\mathbf{F}_{31}$, $\mathbf{F}_{32}$ . . . ($\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на точку 1 со стороны точки 2 и т. д.). Напишем уравнения второго закона Ньютона для каждой из этих точек:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots,$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 \mathbf{v}_2) = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots,$$

$$\frac{d}{dt}(m_3 \mathbf{v}_3) = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \ldots$$

. . . .

Складывая все эти уравнения, мы получим слева производную по времени от общего количества движения, а справа — сумму всех сил, действующих в системе. Но так как система замкнута, то сумма всех сил в ней равна нулю. Действительно, в этой сумме встретятся попарно силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$, $\mathbf{F}_{23}$ и $\mathbf{F}_{32}$ и т. д., причем всякой силе $\mathbf{F}_{ik}$ будет соответствовать сила $\mathbf{F}_{ki}$. Но по третьему закону Ньютона

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}.$$

Поэтому полная сумма сил в замкнутой системе всегда равна нулю. Следовательно, во всякой замкнутой системе

$$\frac{d}{dt}\sum m_i \mathbf{v}_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const},$$

т. е. *полное количество движения замкнутой системы есть величина постоянная.*

Если система не является замкнутой, т. е. на точку системы действуют внешние силы Φ_1, Φ_2, то

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots + \Phi_1,$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 \mathbf{v}_2) = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots + \Phi_2.$$

Если мы сложим уравнения движения для всех точек, то сумма всех внутренних сил $\mathbf{F}_{ik}$ по-прежнему будет равна нулю. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\sum m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \Phi_i.$$

Производная от общего количества движения системы точек равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Внешние (и только внешние) силы изменяют общее количество движения системы.

§ 28. Момент количества движения для материальной точки

Помножая векторно основное уравнение динамики $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$, проведенный из точки 0, получим:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}). \qquad (1)$$

Здесь принято во внимание, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0,$$

$\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ есть статический момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки 0, $\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ — статический момент количества движения относительно той же точки 0; этот момент называется также импульсом вращения $\mathbf{L}$. Теорема момента количества движения гласит:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) \quad \text{или} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

т. е. *производная по времени момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра равна моменту той силы, под влиянием которой движется материальная точка относительно того же центра.*

В координатной системе, проходящей через точку O, как через начальную точку, получаем:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(yZ - zY) + \mathbf{j}(zX - xZ) + \mathbf{k}(xY - yX),$$

$$\mathbf{r}\times m\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \mathbf{i}m(y\dot{z} - z\dot{y}) + \mathbf{j}m(z\dot{x} - x\dot{z}) + \mathbf{k}m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим три следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned} yZ - zY &= m(yw_z - zw_y) \\ zX - xZ &= m(zw_x - xw_z) \\ xY - yX &= m(xw_y - yw_x) \end{aligned}\right\},$$

где w_x, w_y, w_z — составляющие ускорения $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ по направлению осей x, y, z.

Каждое из этих трех уравнений выражает теорему о моменте количества движения для одной из трех осей координатной системы.

В том случае, если сила $\mathbf{F}$, действующая на материальную точку, является центральной силой (например, сила тяготения), статический момент силы

исчезает для центра тяжести O, как начальной точки; в этом случае импульс вращения L должен оставаться постоянным:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0; \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}.$$

Так как вектор, представляющий векторное произведение $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, и постоянен, в силу последнего равенства, по модулю и направлению, то отсюда следует, что плоскость, проходящая через векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, занимает неподвижное положение в пространстве, т. е. под воздействием центральной силы материальная точка описывает плоскую траекторию, плоскость которой проходит через центр силы.

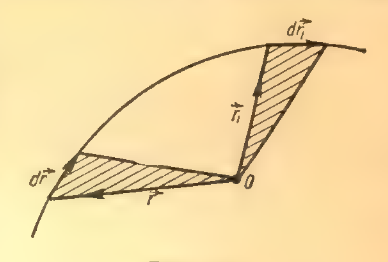


Рис. 42

Таким образом, *траектория материальной точки, движущейся под влиянием центральной силы, есть плоская линия, расположенная в плоскости, проходящей через центр силы.*

Так как все планеты движутся вокруг Солнца под действием силы, подчиняющейся закону всемирного тяготения, т. е. под действием центральной силы, то все изложенное относится и к движению планет.

Закон постоянства секторной скорости (рис. 42) есть не что иное, как другая формулировка закона Кеплера: *радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади.*

§ 29. Динамика системы материальных точек

Под системой материальных точек, или материальной системой, понимается в механике такое тело, которое в противоположность твердому, может претерпевать изменения формы. Материальная система может состоять из частей, представляющих в отдельности твердые тела, находящиеся в движении одно относительно другого. Нашу планетную систему можно рассматривать как материальную систему, в которой Солнце и планеты в отдельности представляют материальные точки. Если рассматривается система, состоящая из Земли и Луны в отдельности, то сила притяжения между Землей и Луной, действующая как на Землю, так и на Луну, является внутренней силой, а притяжения Солнца и других планет являются для системы Земля — Луна внешними силами.

П р и н ц и п   Д а л а м б е р а. Из основного уравнения динамики:

$$\mathbf{F} - m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0$$

следует, что добавление воображаемой силы

$$D = -m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

к реально существующим силам, равнодействующая которых есть $\mathbf{F}$, приводит к $\mathbf{F} + \mathbf{D} = 0$. Другими словами, существует равновесие между действительной силой $\mathbf{F}$ и воображаемой $\mathbf{D}$. Сила $\mathbf{D}$ называется вспомогательной силой Даламбера или с и л о й   и н е р ц и и.

Для материальной системы с произвольным движением рассуждают точно так же. Если внешнюю силу, или, в случае нескольких внешних сил, их

равнодействующую, приложенную в какой-нибудь точке системы, назвать **F** и если внутренние силы, поскольку они действуют на ту же точку, объединить в $\sum \mathbf{N}$, то для каждой точки системы действительно основное уравнение:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \sum \mathbf{N}.$$

Если к действительно существующим силам $\mathbf{F} + \sum \mathbf{N}$ прибавим вспомогательную силу Даламбера $\mathbf{D} = -m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, то получим равновесие в каждой точке

$$\mathbf{F} + \sum \mathbf{N} + \mathbf{D} = 0.$$

Следовательно, и вся материальная система будет в равновесии. В приведении задачи динамики к задаче статики заключается сущность принципа Даламбера. Если распространить это уравнение на все точки, то получим:

$$\sum \mathbf{F} + \sum\sum \mathbf{N} + \sum \mathbf{D} = 0.$$

В двойной сумме всех внутренних сил $\sum\sum \mathbf{N}$ последние входят, по закону действия и противодействия, попарно, следовательно,

$$\sum\sum \mathbf{N} = 0,$$

таким образом, остается

$$\sum (\mathbf{F} + \mathbf{D}) = 0.$$

Сумма эта распространяется на все точки материальной системы, однако последнее уравнение еще не представляет собою достаточного условия равновесия. Ввиду того, что равновесие имеет место, если каждая точка системы находится в равновесии, то можно написать условие равновесия, например, в виде принципа виртуальных перемещений:

$$\sum (\mathbf{F} + \mathbf{D})\,\delta\mathbf{s} = 0,$$

или в координатах

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y +$$
$$+ \sum\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0.$$

Величина $\delta\mathbf{s}$ с составляющими δx, δy, δz представляет собою произвольное виртуальное перемещение соответствующей материальной точки. Два последних уравнения действительны, пока виртуальные перемещения $\delta\mathbf{s}$ не вызывают работы внутренних сил, т. е. если

$$\sum\sum \mathbf{N}\cdot\delta\mathbf{s} = 0.$$

Это действительно, например, для случая, когда перемещения $\delta\mathbf{s}$ происходят без изменения формы материальной системы.

З а к о н ы д в и ж е н и я ц е н т р а т я ж е с т и. Из определения центра тяжести (как центра массы) имеем:

$$m\mathbf{s} = \sum m_i \mathbf{r}_i;$$

дифференцируя это выражение по времени, получаем:

$$m\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt},$$

или

$$m\mathbf{v}_0 = \sum m_i \mathbf{v}_i, \quad (*)$$

($\mathbf{v}_0$ — скорость центра тяжести), т. е. количество движения или импульс материальной системы $\sum m_i \mathbf{v}_i$ равняется количеству движения центра тяжести $m\mathbf{v}_0$, в котором сосредоточена вся масса материальной системы (первый закон движения центра тяжести).

В координатах получаем:

$$mv_{ox} = \sum m_i v_{ix};$$

$$mv_{oy} = \sum m_i v_{iy};$$

$$mv_{oz} = \sum m_i v_{iz}.$$

Дифференцируя уравнение (*) по времени, получаем основной закон движения центра тяжести:

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum \left(\mathbf{F}_i + \sum \mathbf{N}_i\right).$$

Ввиду того, что двойная сумма внутренних сил $\sum\sum \mathbf{N}$ равна 0 (закон действия и противодействия), получаем

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F},$$

т. е. *движение центра тяжести происходит так, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы и к нему были отнесены, параллельно самим себе, все внешние силы* $\mathbf{F}_i$, *соединенные в одну равнодействующую* $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ (второй или *основной закон движения центра тяжести, принцип движения центра тяжести*).

На основании этого закона применимость динамики материальной точки может быть значительно расширена, так как движение центра тяжести материальной системы также можно свести к движению материальной точки.

Пара сил может вызвать только вращение вокруг центра тяжести. Ввиду того, что всякую произвольную систему сил, действующую на материальную систему, всегда можно представить одной равнодействующей силой $\mathbf{F}$, приложенной в центре тяжести, и одним равнодействующим моментом $\mathbf{M}$, всякое движение материальной системы сводится к зависящему от $\mathbf{F}$ движению центра тяжести и к зависящему от $\mathbf{M}$ вращению вокруг центра тяжести.

В координатах закон движения центра тяжести выражается так:

$$m\frac{dv_{ox}}{dt} = \sum X_i = X; \quad m\frac{dv_{oy}}{dt} = \sum Y_i = Y; \quad m\frac{dv_{oz}}{dt} = \sum Z_i = Z;$$

причем X, Y, Z являются составляющими равнодействующей $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$. На этом основании закон движения центра тяжести остается в силе для любого направления движения, нужно только силы и ускорение центра тяжести проектировать в том же направлении (например, ось X). Если мы напишем закон движения центра тяжести следующим образом:

$$\frac{d(m\mathbf{v}_0)}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{k} = m\mathbf{v}_0 = \sum m_i \mathbf{v}_i$ означает количество движения материальной системы, то закон движения центра тяжести выразится так: *производная количества движения материальной системы по времени равна равнодействующей внешних сил.*

Закон сохранения момента количества движения. Момент количества движения для отдельной материальной точки выражается формулой:

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v} \times \mathbf{r}).$$

В материальной системе к внешней силе $\mathbf{F}_e$, действующей на материальную точку, прибавляются внутренние силы $\mathbf{F}_i$:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F}_i \times \mathbf{r} + \mathbf{F}_e \times \mathbf{r}.$$

Суммированием выражений для всех отдельных точек системы получим:

$$\frac{d}{dt}\sum(m\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \sum \mathbf{F}_e \times r. \quad (**)$$

По закону действия и противодействия внутренние силы исчезают и $\mathbf{L} = \sum(m\mathbf{v} \times \mathbf{r})$ есть общий момент относительно точки O количеств движения всех материальных точек, входящих в состав данной системы. Величину $\mathbf{L}$ называют моментом количеств движения системы относительно точки O.

Очевидно, что

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{F}_e \times \mathbf{r}$$

есть общий момент всех внешних сил относительно точки O.

Таким образом, равенство (**) можно представить в виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (***),$$

Это равенство можно выразить следующими словами: *производная по времени от момента относительно какой-либо неподвижной точки количеств движения материальной системы равна общему моменту относительно той же точки всех внешних сил, действующих на материальную систему.*

Векторные равенства легко преобразовать в координатные.

Так как

$$\mathbf{L} = \mathbf{i}L_x + \mathbf{j}L_y + \mathbf{k}L_z,$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{i}M_x + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z,$$

то уравнение (***) можно заменить тремя следующими:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Если предположить, что общий момент всех внешних сил, например, относительно оси Ox постоянно равен нулю, т. е. $M_x = 0$, то из предыдущих уравнений получим:

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right] = 0,$$

или

$$L_x = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \text{const}.$$

Следовательно, *если общий момент всех сил, действующих на материальную систему, относительно какой-либо неподвижной оси постоянно равен нулю, то момент относительно этой оси количеств движения материальной системы постоянен.*

При $\mathbf{M} = 0$ $L = \text{const}$, т. е. вектор не будет изменяться ни по модулю, ни по направлению.

Количество движения для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной в пространстве оси с угловой скоростью ω, по отношению к этой оси будет $L = I\omega$, таким образом, уравнение моментов записывается в следующем виде:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{M}.$$

Между этим основным уравнением для вращения твердого тела и основным уравнением динамики материальной точки $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$ существует аналогия. Масса точки m соответствует моменту инерции I, скорость точки $\mathbf{v}$ — угловой скорости тела ω, сила $\mathbf{F}$ моменту $\mathbf{M}$.

§ 30. Сравнение формул поступательного и вращательного движений

Формулы вращательного движения легко запоминаются, если сопоставить их с формулами поступательного движения.

Поступательное движение	Вращательное движение
Линейное перемещение s	Угловое перемещение φ
Линейная скорость v	Угловая скорость ω
Линейное ускорение a	Угловое ускорение ε
Сила F	Момент силы M
Количество движения mv	Момент количества движения $I\omega$
Импульс силы Ft	Момент импульса силы Mt
Масса m	Момент инерции I
$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$v = v_0 \pm at$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
$F = ma$	$M = I\varepsilon$
$A = Fs$	$A = M\varphi$
$N = Fv$	$N = M\omega$
$E = \frac{mv^2}{2}$	$E = \frac{I\omega^2}{2}$

§ 31. Уравнение Лагранжа и принцип Гамильтона

Пусть имеем свободную материальную точку, определяемую координатами x, y, z, на которую действует сила $\mathbf{F}$. Предположим, что координаты точки x, y, z выражены как функции независимых переменных q_1, q_2, q_3 (обобщенные координаты) и времени t, причем эти функции предполагаем ограниченными, однозначными и дифференцируемыми, т. е.

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t), \quad y = y(q_1, q_2, q_3, t), \quad z = z(q_1, q_2, q_3, t).$$

Для каждой координаты q_i имеем следующее уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

называемое уравнением Лагранжа II рода.

В этом уравнении T представляет кинетическую энергию системы,

$\dot{q}_l = \frac{dq_l}{dt}$ и Q — обобщенная сила, отнесенная к координате q_l, т. е. $Q_l \delta q_l$, представляет собою работу внешних сил системы при изменении одной из координат q_l на δq_l, в то время, как другие координаты остаются неизменными.

Q_l имеет размерность силы, если q_l выражает длину; Q_l имеет размерность момента, если q_l представляет угол, и т. д.

Подобно уравнениям Лагранжа принцип Гамильтона служит для вывода уравнения движения системы, обладающей несколькими степенями свободы. Применение этого принципа, однако, ограничивается тем случаем, когда внешние силы выводятся из потенциала U, так что работа внешних сил при виртуальном перемещении δq_l координаты q_l будет

$$Q_l \delta q_l = -\frac{\partial U}{\partial q_l} \delta q_l.$$

Уравнение Лагранжа в этом случае можно переписать так:

$$\frac{\partial (T-U)}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right).$$

В общем виде:

$$\delta \int_0^t (T-U)\,dt = 0.$$

Это уравнение выражает принцип Гамильтона: *вариация интеграла по времени функции $T-U$ равняется нулю или интеграл по времени функции $T-U$ принимает для действительно начавшегося движения крайнее значение по сравнению со всеми другими, бесконечно близко расположенными движениями, которые за тот же промежуток времени приводят систему из данного начального состояния в данное конечное состояние.*

§ 32. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Ввиду того, что твердое тело представляет частный случай системы материальных точек, а именно — систему с неизменяемой формой, то для него действительны все законы, которые были выведены для системы точек

Для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной в пространстве оси динамическое уравнение имеет вид $I\frac{d\omega}{dt} = M$. Если момент вращения $M = 0$, то вращение происходит с постоянной угловой скоростью. Если M — величина постоянная, то мы имеем дело с равномерно ускоренным или равномерно замедленным вращением с ускорением вращения $\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = \text{const}$. При этом действительны формулы, соответствующие прямолинейному равномерно ускоренному движению материальной точки.

Кинетическая энергия вращательного движения имеет значение:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_l v_l^2 = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

§ 33. Законы движения твердого тела переменной массы

Во многих явлениях природы приходится наблюдать такие случаи движения, когда масса движущегося тела изменяется с течением времени.

Например, масса Земли возрастает вследствие падения на нее метеоритов.

Масса падающего метеорита, движущегося в атмосфере, убывает вследствие того, что частицы метеорита отрываются и сгорают.

Ракеты разных систем, реактивные снаряды, реактивные самолеты с воздушно-реактивными двигателями дают примеры движущихся тел переменной массы. Общие законы механики тел переменной массы были подробно исследованы И. В. Мещерским и К. Э. Циолковским.

Для решения выше указанных задач необходимо установить основное уравнение движения точки переменной массы, так как всякое тело переменной массы можно представить как систему точек.

Дифференциальное уравнение движения точки переменной массы было впервые выведено проф. И. В. Мещерским. Второй закон Ньютона, сформулированный в виде уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$, представляется как частный случай уравнения Мещерского, если предположить, что масса движущейся точки постоянна.

Одной из существенных гипотез, положенных в основу вывода уравнения, является гипотеза «близкодействия» (контактного взаимодействия) отбрасываемых частиц. Допускается, что в момент отделения частицы от тела происходит удар, при котором эта частица за очень малый промежуток времени получает относительную скорость $\mathbf{v}_r$ и дальнейшее взаимодействие частицы и основного тела прекращается. Если обозначить через dM массу отбрасываемой частицы, M — массу основной точки, $d\mathbf{v}_1$ — приращение скорости основной точки, то на основании закона сохранения количества движения будем иметь:

$$M d\mathbf{v}_1 - dM \mathbf{v}_r = 0,$$

откуда

$$d\mathbf{v}_1 = \frac{dM}{M}\mathbf{v}_r = \frac{dM}{M}(\mathbf{u} - \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}$ — скорость основной точки, а $\mathbf{u}$ — абсолютная скорость отброшенной частицы.

Если на точку M действуют внешние силы, равнодействующая которых равна $\mathbf{F}$, то приращение скорости точки, обусловленное действием силы $\mathbf{F}$, на основании второго закона Ньютона, будет $d\mathbf{v}_2 = \frac{1}{M}\mathbf{F}dt$. Полное изменение скорости точки переменной массы равно

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки переменной массы имеет следующий вид:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Это уравнение было получено И. В. Мещерским в 1897 г.

Для ракетной техники это уравнение отображает существо явлений с достаточной для практики точностью.

Если принять, что абсолютная скорость отбрасываемых частиц равна нулю, то уравнение будет иметь простую форму:

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \mathbf{F}.$$

Это более общее выражение II закона Ньютона.

Работы И. В. Мещерского касались, главным образом, вопросов механики тел переменной массы. Важность и актуальность этих работ состоит

в том, что было положено начало новому разделу теоретической механики. Механика тел переменной массы явилась научной основой современной ракетодинамики.

Первым основным трудом И. В. Мещерского явилась магистерская диссертация «Динамика точки переменной массы». Она была опубликована в 1897 г. и до наших дней остается наиболее полным и обстоятельным исследованием по теории движения тел переменной массы. В этой работе, кроме вывода исходного уравнения, рассмотрено большое число оригинальных задач и указаны методы, развитие которых даст несомненно ряд практически важных заключений о закономерностях динамики ракет.

Вторым важнейшим трудом И. В. Мещерского является опубликованная в 1904 г. монография «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае». В ней дана законченная теория вопросов механики, связанных с изучением движения тел, масса которых изменяется в результате одновременно происходящих процессов присоединения и отделения частиц. Эта теория позволила, спустя много лет, решить многие технические задачи, когда в процессе движения тела происходит не только отделение, но и присоединение частиц. Так, например, в простейшем прямоточном воздушно-реактивном двигателе частицы воздуха присоединяются к движущемуся телу из атмосферы и затем отбрасываются вместе с продуктами горения из сопла реактивного двигателя. Газотурбинные реактивные двигатели, получившие весьма широкое применение на современных самолетах, работают на этом принципе. В двигатель из атмосферы попадают частицы воздуха, а затем отбрасываются из него с большой скоростью вместе с газообразными продуктами горения.

§ 34. Принцип реактивного движения

Реактивным двигателем называется двигатель, сочетающий в себе тепловую машину, преобразующую химическую энергию топлива в кинетическую энергию газовой струи, двигатель, создающий силу тяги за счет реакции отбрасываемой из реактивного сопла массы газа.

Принципиальная схема реактивного двигателя изображена на рис. 43. Двигатель состоит из цилиндрической камеры сгорания *1* и реактивного сопла *2*. При горении смеси жидкого горючего и жидкого окислителя, подаваемых в камеру сгорания через форсунки *3*, внутри двигателя образуются продукты сгорания, имеющие высокое давление и высокую температуру. При истечении этих газов с большой скоростью через реактивное сопло в атмосферу возникает реактивное действие отбрасываемой массы газов и создается реактивная сила, направленная в сторону, противоположную направлению истечения газов. Указанная реактивная сила и является силой тяги, приводящей в движение какой-либо летательный аппарат (самолет, снаряд), на котором установлен двигатель. Сила тяги, создаваемая двигателем, приложена непосредственно к его корпусу и может быть определена как равнодействующая всех сил давления (ударов молекул), действуюших на рабочие поверхности двигателя.

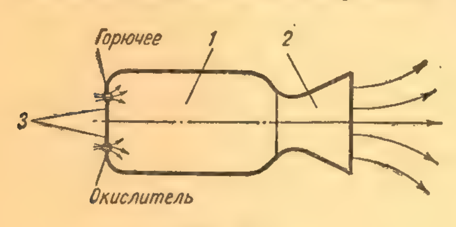


Рис. 43

Реактивные двигатели нашли широкое применение в авиации и артиллерии. Реактивные самолеты могут летать со сверхзвуковыми скоростями, а ракеты — с еще большими скоростями.

§ 35. Задачи Циолковского. Прямолинейное движение

Первая задача Циолковского. Если предположить, что точка переменной массы движется прямолинейно в безвоздушном пространстве при отсутствии внешних сил, а относительную скорость истечения частиц считать постоянной по величине и направленной параллельно вектору скорости **v** в сторону, противоположную движению основной точки, то основное уравнение движения точки переменной массы (уравнение Мещерского) в этом случае принимает вид:

$$M\frac{dv}{dt} = -v_r\frac{dM}{dt},$$

или

$$dv = -v_r\frac{dM}{M}, \qquad (*)$$

где v_r — относительная скорость излучаемых частиц.

Пусть $M = M_0 f(t)$, где $f(t)$ — функция, определяющая закон изменения массы. Интегрируя равенство (*), получим: $v = -v_r \ln f(t) + C$.

Если при $t = 0$ функция $f(t) = f(0) = 1$, то $v = v_0$, тогда $C = v_0$; следовательно,

$$v = v_0 - v_r \ln f(t) = v_0 + v_r \ln\frac{M_0}{M}. \qquad (**)$$

Формула (**) носит название формулы Циолковского.

Если массу точки в конце процесса отбрасывания обозначить через M_s, а отброшенную массу (массу топлива) — через m, то скорость v_1, которую приобретает точка в конце процесса горения, при $v_0 = 0$ имеет значение:

$$v_1 = v_r \ln\frac{M_s + m}{M_s} \approx 2{,}3\, v_r \lg\left(1 + \frac{m}{M_s}\right). \qquad (***)$$

Отношение $\frac{m}{M_s} = Z$ называют числом Циолковского.

Логарифмический закон (***) был сформулирован К. Э. Циолковским в 1914 г. в виде следующей теоремы.

Когда масса ракеты плюс масса взрывчатых веществ, имеющихся в реактивном приборе, возрастает в геометрической прогрессии, скорость ракеты увеличивается в прогрессии арифметической.

Если абсолютная скорость излучаемых частиц равна нулю, то основное уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \mathbf{F}.$$

Положив равнодействующую внешних сил F равной нулю, получим

$$M\mathbf{v} = \text{const} = M_0\mathbf{v}_0,$$

отсюда

$$\mathbf{v} = \frac{M_0}{M}\mathbf{v}_0.$$

Таким образом, при принятых условиях скорость излучающего центра увеличивается обратно пропорционально его массе.

В том случае, когда относительная скорость излучаемых частиц обращается в нуль, основное уравнение принимает вид:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Положив в этом уравнении $\mathbf{F} = 0$, имеем:

$$\mathbf{v} = \text{const} = \mathbf{v}_0;$$

т. е. если относительная скорость излучения частиц равна нулю, то при отсутствии внешних сил точка переменной массы будет совершать прямолинейное и равномерное движение.

Расстояния излучающего центра от выбранного начала координат определятся из уравнения (***):

$$ds = v_0\, dt - v_r \ln f(t)\, dt;$$

здесь $v_r = \text{const}$.
Интегрируя, находим:

$$s = s_0 + v_0 t - v_r \int_0^t \ln f(t)\, dt.$$

Если абсолютная скорость излучаемых частиц равна нулю, то

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{M_0}{M} v_0 = \frac{v_0}{f(t)}.$$

Проинтегрировав это выражение, получим:

$$s = s_0 + v_0 \int_0^t \frac{dt}{f(t)}.$$

Если относительная скорость излучаемых частиц равна нулю, то

$$s = s_0 + v_0 t.$$

Из двух последних формул видно, что для вычисления расстояний необходимо задать вид функции $f(t)$, определяющей законы изменения массы $M(t)$.

В современной практике наибольшее применение получили два закона изменения массы:

а) $f(t) = 1 - \alpha t$ (так называемый, линейный закон);

б) $f(t) = e^{-\alpha t}$ (так называемый, показательный закон). Параметр α называют удельным расходом массы.

Согласно линейному закону изменения массы секундный расход массы будет равен

$$-\frac{dM}{dt} = \alpha M_0 = \text{const}.$$

Реактивная сила

$$\Phi_r = \left(-\frac{dM}{dt}\right) v_r = \alpha M_0 v_r$$

является также величиной постоянной.

При показательном законе изменения массы, т. е. при $M = M_0 e^{-\alpha t}$, реактивная сила имеет значение:

$$\Phi_r = \left(-\frac{dM}{dt}\right) v_r = \alpha M_0 v_r e^{-\alpha t}.$$

Ускорение, обусловленное реактивной силой,

$$a_r = \frac{\Phi_r}{M} = \alpha v_r = \text{const}.$$

Путь, проходимый излучающим центром при линейном законе изменения массы, определяется по формуле:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{v_r}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t\right].$$

При показательном законе изменения массы, путь выражается так:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{v_r \alpha t^2}{2}.$$

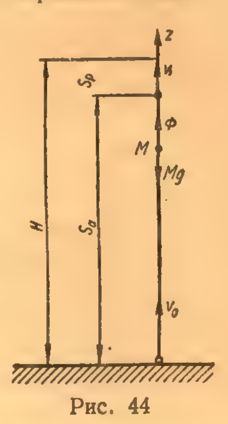


Рис. 44

Вторая задача Циолковского. Предположим, что точка переменной массы движется по вертикали вверх в однородном поле силы тяжести. Начальную скорость обозначим буквой v_0.

Определим скорость и высоту подъема в функции времени при различных законах изменения массы. Относительная скорость излучаемых частиц постоянная по величине и направлена вертикально вниз.

Вертикальную прямую, по которой движется точка, примем за ось Oz (рис. 44).

Введем обозначение

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{v}_r = -v_r \boldsymbol{\tau}^\circ,$$

где $\boldsymbol{\tau}^\circ$ — единичный вектор касательной к траектории, направленной в сторону движения. Проектируя основное уравнение движения точки на ось Oz, получим:

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg - v_r\frac{dM}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[v + v_r \ln f(t)\right] = -g.$$

Здесь, согласно гипотезе Циолковского, $v_r = \text{const}$. Интегрированием находим

$$v = v_0 - gt + v_r \ln\frac{M_0}{M}.$$

Из этого равенства вытекает закон движения (при $s_0 = 0$)

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2} - v_r\int_0^t \ln f(t)\,dt.$$

При $f(t) = 1 - \alpha t$ закон движения примет вид:

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{v_r}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t\right],$$

при $f(t) = e^{-\alpha}$ находим

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{1}{2} \alpha v_r t^2.$$

Максимальная высота подъема точки для случая, когда $f(t) = e^{-\alpha t}$, определяется по формуле (предполагается, что процесс горения происходит на всей траектории полета до точки, где $v = 0$):

$$s_{макс} = H = \frac{v_0^2}{2(g - \alpha v_r)}.$$

Определим максимальную высоту подъема при заданном запасе массы (запас топлива) $m = M_0 - M_s$, где M_s — масса оболочки ракеты. Обозначим время горения буквой t, тогда $M_s = M_0 e^{-\alpha t_1}$. Отсюда находим

$$t_1 = \frac{\ln \frac{M_0}{M_s}}{\alpha} = \frac{\text{const}}{\alpha} = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Полная высота подъема точки будет складываться из двух частей. Первая часть s_a представляет собою путь, проходимый точкой за время t_1 (активный участок); вторая часть s_p означает путь, проходимый точкой постоянной массы $M_s = M_0 - m$ благодаря скорости v_1, которую получает точка в конце активного участка.

Таким образом,

$$H = s_a + s_p = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} + \frac{\alpha v_r t_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2g},$$

где

$$v_1 = v_0 - gt_1 + \alpha v_r t_1.$$

При заданных v_0 $m = M_0 - M_s$ (т. е. при заданном μ) и скорости v_r высота подъема является функцией α — удельного расхода массы.

Из условия $\frac{dH(\alpha)}{d\alpha} = 0$ следует, что максимальная высота подъема H будет при $\alpha = \infty$, что соответствует мгновенному сгоранию имеющегося запаса топлива, т. е. такому случаю, когда весь имеющийся запас топлива выбрасывается одновременно в начале движения с относительной скоростью v_r. Максимальная высота имеет значение

$$H_{макс} = \frac{(v_0 + \mu v_r)^2}{2g}.$$

§ 36. Обобщенное уравнение Мещерского

Ранее рассмотренное дифференциальное уравнение Мещерского описывает движение точки переменной массы для случая отделения частиц.

Более общими являются такие задачи, когда в процессе движения тела происходит не только отделение, но и присоединение частиц. Например, при полете самолета с прямоточным воздушно-реактивным двигателем частицы воздуха присоединяются к движущемуся самолету из атмосферы и затем выбрасываются вместе с продуктами горения.

Газотурбинные реактивные двигатели, получившие широкое распространение в авиации, точно так же всасывают частицы воздуха из атмосферы, а затем отбрасывают их с большей скоростью вместе с газообразными продуктами горения.

Задачу о движении тел переменной массы с одновременным присоединением и отбрасыванием частиц во многих случаях можно свести к задаче динамики точки переменной массы. Дифференциальное уравнение для общего случая движения точки переменной массы имеет вид:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}+\frac{dM_1}{dt}(\mathbf{u}_1-\mathbf{v})+\frac{dM_2}{dt}(\mathbf{u}_2-\mathbf{v}), \quad (*)$$

где $M=M(t)$ — масса движущейся точки, отнесенной к некоторой неподвижной системе осей координат $Oxyz$;

$\mathbf{v}$ — скорость этой точки в момент t; dM_1 и dM_2 — частицы массы, которые, соответственно, излучает и присоединяет точка M за время dt, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — абсолютные скорости частиц dM_1 и dM_2.

Полученное уравнение называется обобщенным уравнением Мещерского.

В этом уравнении $(\mathbf{u}_1-\mathbf{v})=\mathbf{v}_1$ и $(\mathbf{u}_2-\mathbf{v})=\mathbf{v}_2$ представляют собой относительные скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц;

$$\frac{dM_1}{dt}\mathbf{v}_1=\mathbf{\Phi}_1$$

реактивная сила, обусловленная отделением частиц, а

$$\frac{dM_2}{dt}\mathbf{v}_2=\mathbf{\Phi}_2$$

есть тормозящая сила, обусловленная присоединением частиц.

Таким образом, обобщенное уравнение Мещерского может быть записано в виде:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}+\mathbf{\Phi}_1+\mathbf{\Phi}_2.$$

Проектируя векторное дифференциальное уравнение (*) на оси координат x, y, z, получим:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}&=F_x+\frac{dM_1}{dt}(\alpha_1-\dot{x})+\frac{dM_2}{dt}(\alpha_2-\dot{x})\\ M\ddot{y}&=F_y+\frac{dM_1}{dt}(\beta_1-\dot{y})+\frac{dM_2}{dt}(\beta_2-\dot{y})\\ M\ddot{z}&=F_z+\frac{dM_1}{dt}(\gamma_1-\dot{z})+\frac{dM_2}{dt}(\gamma_2-\dot{z})\end{aligned}\right\},$$

где α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 означают проекции абсолютных скоростей $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ соответственно отделяющихся и присоединяющихся частиц.

Обратные задачи для прямолинейного движения. Задачи, в которых по заданным внешним силам и заданному закону движения определяется закон изменения массы, обеспечивающий заданное движение, называются обратными задачами.

Дифференциальное уравнение, относящееся к общей задаче прямолинейного движения точки, имеет вид:

$$M\frac{dv}{dt}=-Mg-Q_1-\frac{dM}{dt}v_r,$$

где Q_1 — сила сопротивления среды.

Положив $M = M_0 f(t)$, $Q_1 = M_0 Q(v, s)$ дифференциальное уравнение движения можем записать в виде:

$$f(t) \frac{dv}{dt} = -g(s) f(t) - Q(v, s) - \frac{df}{dt} v_r.$$

Согласно гипотезе Циолковского, относительная скорость отбрасывания частиц принята за постоянную величину. Так как по условию задачи закон движения точки известен, то это уравнение содержит только одну неизвестную функцию $f(t)$. Вводя обозначения:

$$p(t) = \frac{1}{v_r}(a + g); \quad q(t) = \frac{Q}{v_r},$$

уравнение движения запишем в такой форме:

$$\frac{df}{dt} + pf + q = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения можно записать в виде:

$$f(t) = e^{-\int p dt}\left(C - \int q e^{\int p dt} dt\right).$$

Эта формула позволяет решить обратные задачи для прямолинейных движений точки в самом общем виде.

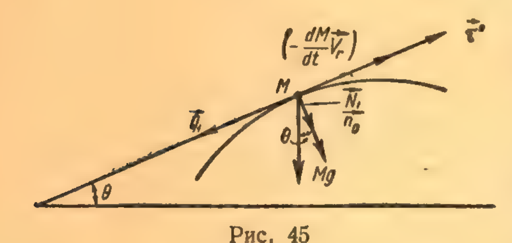


Рис. 45

Обратные задачи для криволинейного движения. Пусть траектория движения точки будет принята за плоскую кривую. Закон движения задан в виде $s = s(t)$.

Дифференциальное уравнение движения в векторной форме имеет вид:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = M\mathbf{g} + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{N}_1 + \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{N}_1$ — сила нормальной реакции связи. Если точка переменной массы движется по заданной траектории в свободном движении, то $\mathbf{N}_1 = 0$.

Проектируя векторное уравнение движения на касательную и главную нормаль к заданной траектории (рис. 45), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} M \frac{dv}{dt} &= -Mg \sin\theta - Q_1 - \frac{dM}{dt} v_r, \\ M \frac{v^2}{\rho} &= Mg \cos\theta + N_1 \end{aligned}\right\}.$$

Положив $M = M_0 f(t)$, $Q_1 = M_0 Q$, $N_1 = M_0 N$ и принимая во внимание, что

$$\frac{v^2}{\rho} = -\frac{v^2}{\frac{ds}{dt}} = -v \frac{d\theta}{dt},$$

можем записать уравнение в виде:

$$\frac{df}{dt}+f\left(\frac{\frac{d^2 s}{dt^2}+g\sin\theta}{v_r}\right)+\frac{Q}{v_r}=0, \qquad (**)$$

$$N=-fv\frac{d\theta}{dt}-fg\cos\theta. \qquad (***)$$

Интеграл уравнения (**) можно записать в виде:

$$f(t)=e^{-\int\frac{(\ddot{s}+g\sin\theta)\,dt}{v_r}}\left[C-\int\frac{Q}{v_r}e^{\int\frac{(\ddot{s}+g\sin\theta)\,dt}{v_r}}dt\right].$$

Определив $f=f(t)$, можем из уравнения (***) найти нормальную реакцию кривой.

§ 37. Основные теоремы динамики точки переменной массы

Теорема об изменении количества движения. Количеством движения точки переменной массы в данный момент времени называется вектор $\mathbf{q}$, равный произведению массы точки на вектор ее скорости, т. е. $\mathbf{q}=M\mathbf{v}$.

Из основного уравнения движения следует:

$$d(M\mathbf{v})=\mathbf{F}dt+dM\mathbf{u}.$$

Вектор $\mathbf{F}\,dt$ есть элементарный импульс равнодействующей всех внешних сил, приложенных к излучающему центру, а $dM\mathbf{u}$ — количество движения частиц, отброшенных за время dt, по отношению к неподвижной системе осей координат.

Таким образом, *дифференциал количества движения точки переменной массы равен сумме элементарного импульса равнодействующей всех приложенных к точке сил и «абсолютного» количества движения частиц, отброшенных за время dt.*

Так как $\frac{dM}{dt}\mathbf{u}=R_a$ есть реактивная сила, обусловленная «абсолютным» движением отброшенных в единицу времени частиц, то последнее уравнение можно записать в виде:

$$d(M\mathbf{v})=\mathbf{F}dt+\mathbf{R}_a\,dt,$$

т. е. *дифференциал количества движения точки переменной массы равен сумме элементарного импульса равнодействующей всех внешних приложенных к точке сил и элементарного импульса «реактивной силы», обусловленной абсолютным движением излучаемых частиц.*

Если абсолютная скорость $\mathbf{u}$ отброшенных частиц равна нулю, то уравнение будет иметь вид:

$$d(M\mathbf{v})=\mathbf{F}dt,$$

отсюда получим:

$$M\mathbf{v}-M_0\mathbf{v}_0=\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}dt,$$

т. е. при $\mathbf{u}=0$ *изменение количества движения точки переменной массы за какой-либо промежуток времени $(t-t_0)$ равно импульсу равнодействующей всех приложенных к точке внешних сил за тот же промежуток времени.*

Теорема об изменении кинетического момента. Кинетическим моментом или моментом количества движения точки переменной массы называется вектор

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \cdot M\mathbf{v},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала неподвижной системы осей координат к данному излучающему центру массы M.

Основное уравнение движения точки переменной массы запишем в виде:

$$\frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM}{dt}\mathbf{u}.$$

Умножая это уравнение векторно на радиус вектор $\mathbf{r}$, получим:

$$\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times \frac{dM}{dt}\mathbf{u},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times M\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times \frac{dM}{dt}\mathbf{u}.$$

Это уравнение выражает теорему об изменении кинетического момента для точки переменной массы.

Эту теорему формулируют так:

производная по времени от кинетического момента точки, вычисленного относительно некоторого центра, равна моменту равнодействующей всех приложенных к точке внешних сил плюс момент «абсолютного» количества движения частиц, излученных в единицу времени, относительно того же центра.

Если абсолютная скорость излученных частиц равна нулю, то последнее уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times M\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

В этом частном случае производная по времени от кинетического момента точки, вычисленного относительно некоторого центра, равна моменту равнодействующей всех приложенных к точке внешних сил относительно того же центра.

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетической энергией точки переменной массы называют скалярную величину T, равную половине произведения массы этой точки в данный момент времени на квадрат ее скорости.

Таким образом, можем записать:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}Mv^2.$$

Основное уравнение движения Мещерского запишем в виде:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dM}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM}{dt}\mathbf{u}.$$

Умножая скалярно на $\mathbf{v}dt$ все члены этого уравнения, кроме силы $\mathbf{F}$, которую умножим на $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, получим:

$$M\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + \mathbf{v}^2\, dM = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dM\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

или

$$d\left(\frac{Mv^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\, dM = \mathbf{F}d\mathbf{r} + dM\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Если $u = 0$, то

$$d\left(\frac{Mv^2}{2}\right) + \frac{1}{2} v^2\, dM = F \cdot dr.$$

Если относительная скорость излучаемых частиц равна нулю (гипотеза Мещерского), то $u = v$, тогда из первого уравнения получаем:

$$d\left(\frac{Mv^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\, dMv^2 = F \cdot dr.$$

Теорему об изменении кинетической энергии точки переменной массы можно сформулировать так: *дифференциал кинетической энергии точки переменной массы плюс кинетическая энергия элементарного количества отброшенных за время dt частиц равняется элементарной работе равнодействующей всех приложенных к точке внешних сил плюс элементарная работа реактивной силы, обусловленной абсолютным движением излучаемых частиц.*

§ 38. Основные теоремы динамики тела переменной массы

Теорема об изменении количества движения. Для системы точек тела уравнение движения Мещерского имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(i)} + \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(i)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} u_\nu.$$

В этом уравнении обозначено:

m_ν — массы частиц, принадлежащих телу в данный момент времени, т. е. не имеющих относительных скоростей по отношению к основному телу переменной массы,

v_ν — скорости этих частиц относительно некоторой неподвижной системы координат,

$F_\nu^{(i)}$ — равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к точке m_ν,

$I_\nu^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, приложенных к той же точке,

u_ν — абсолютная скорость частиц, излучаемых точкой m_ν.

Так как, на основании III закона Ньютона, $\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(i)} = 0$, уравнение Мещерского можно записать в виде:

$$\frac{dQ}{dt} = R^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} u_\nu,$$

где $R^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{(e)}$ — результирующая всех внешних сил.

Вектор количества движения Q тела переменной массы имеет значение:

$$Q = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu = Mv_C - Mq_C,$$

где v_C — абсолютная скорость центра масс,

q_C — относительная скорость центра масс.

Принимая во внимание

$$\mathbf{u}_\nu = \mathbf{v}_\nu + \mathbf{v}_{r\nu} \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \mathbf{v}_{r\nu} = \mathbf{\Phi}_r,$$

где $\mathbf{\Phi}_r$ — результирующая всех реактивных сил, предыдущее равенство можно записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{\Phi}_r + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \mathbf{v}_\nu.$$

Последнее слагаемое правой части представляет собой количество движения отбрасываемых в единицу времени частиц в их переносном движении.

Таким образом, последнее равенство может быть сформулировано так: *производная по времени от количества движения тела переменной массы равна сумме всех действующих на тело внешних и реактивных сил и количества движения частиц, отбрасываемых телом в единицу времени, в их переносном движении.*

Если абсолютная скорость $\mathbf{u}_\nu$ излучаемых частиц равна нулю, то имеем:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)},$$

т. е. в этом частном случае теорема об изменении количества движения тела переменной массы формулируется так же, как и для тела постоянной массы.

Теорема о движении центра переменной массы. Для системы точек тела уравнение движения Мещерского можно записать в следующей форме:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{\Phi}_r,$$

или

$$M\mathbf{w}_c^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} + \Phi_r,$$

где $\mathbf{w}_C^{(e)}$ — ускорение той точки, с которой в данный момент времени совпадает центр массы рассматриваемого тела переменной массы (переносное ускорение центра масс),

$\mathbf{R}^{(e)}$ — результирующая всех внешних сил, действующих на тело,

$\mathbf{\Phi}_r$ — результирующая реактивных сил.

Последнее равенство, выражающее теорему о движении центра масс, можно сформулировать так: *произведение массы тела на ускорение точки, с которой в данный момент времени совпадает центр масс тела, равно результирующей всех внешних и реактивных сил, действующих на тело переменной массы.*

Если тело движется поступательно, то уравнение принимает вид:

$$M\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{\Phi}_r,$$

где $\mathbf{w}_0$ — ускорение какой либо точки, принадлежащей телу в течение всего процесса движения.

Если в процессе отбрасывания частиц положение центра масс тела не изменяется, то переносное ускорение центра масс $\mathbf{w}_C^{(e)}$ равно его абсолютному ускорению $\mathbf{w}_C$ по отношению к выбранной неподвижной системе осей. Для этого частного случая имеем:

$$M\mathbf{w}_c = \mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{\Phi}_r.$$

Кинетический момент тела переменной массы. Кинетическим моментом тела переменной массы относительно какого либо неподвижного центра O_1 называется вектор

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu \times m_\nu\, v_\nu),$$

где r_ν — радиус-вектор точки m_ν относительно неподвижной системы координат $Q_1\,\xi\eta\zeta$, а

$\mathbf{v}_\nu$ — скорость той же точки.

Формулу для кинетического момента можно записать в такой форме:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{r}_0 \times M\mathbf{v}_c^{(e)} + \rho_C \times M\mathbf{v}_0.$$

Это соотношение формулируется так: *кинетический момент тела переменной массы относительно неподвижного центра равен кинетическому моменту тела в его движении относительно осей $Ox_1\, y_1\, z_1$, движущихся поступательно, плюс кинетический момент центра масс в его переносном движении при условии, что в нем сосредоточена масса всего тела, и плюс кинетический момент тела в его поступательном движении относительно подвижных осей координат.*

Если начало подвижной системы координат совпадает с центром масс, $\rho_C = 0$, то кинетический момент тела имеет значение:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + \mathbf{r}_C \times M\mathbf{v}_C^{(e)}.$$

В случае, если тело переменной массы вращается около неподвижной оси Oz_1, с угловой скоростью ω, проекция вектора кинетического момента на эту ось будет:

$$K_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(x_\nu\, \dot{y}_\nu - y_\nu\, \dot{x}_\nu\right).$$

Положив

$$x_\nu = h_\nu \cos\varphi;\quad y_\nu = h_\nu \sin\varphi,$$

где h_ν — расстояние точки m_ν от оси Oz_1, находим

$$x_\nu\, \dot{y}_\nu - y_\nu\, \dot{x}_\nu = h_\nu^2\, \omega,$$

следовательно,

$$K_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\, h_\nu^2\, \omega = \omega \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\, h_\nu^2 = I_{zz}\omega,$$

где I_{zz} — момент инерции тела в данный момент времени относительно оси Oz_1.

Теорема об изменении кинетического момента.

Уравнение движения какой-либо точки массы m_ν имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(m_\nu\, \mathbf{v}_\nu) = \mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{F}_\nu^{(i)} + \frac{dm_\nu}{dt}\, \mathbf{u}_\nu.$$

Умножением этого уравнения векторно слева на $\mathbf{r}_\nu$ и суммированием по индексу ν от 1 до n, где n — число точек тела, получим:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} mom_{O_1}\, F_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\, \mathbf{u}_\nu.$$

Это уравнение выражает теорему об изменении кинетического момента тела. Она может быть сформулирована следующим образом: *производная по времени от кинетического момента тела переменной массы равна сумме моментов всех действующих на тело сил плюс сумма моментов абсолютных количеств движения частиц, отбрасываемых телом в единицу времени.*

Принимая во внимание, что $\mathbf{u}_\nu = \mathbf{v}_\nu + \mathbf{v}_{r\nu}$,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} mom_{O_1} F_\nu^{(e)} = \mathfrak{M}^{(e)} \text{ и}$$

$\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\mathbf{v}_{r\nu} = \mathfrak{M}_r$ — результирующий момент реактивных сил относительно неподвижного начала координат, уравнение может быть записано в форме:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathfrak{M}^{(e)} + \mathfrak{M}_r + \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\mathbf{v}_\nu.$$

Теорема об изменении кинетической энергии тела переменной массы. Дифференциальное уравнение движения какой-либо точки m_ν имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) = \mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{F}_\nu^{(i)} + \frac{dm_\nu}{dt}\mathbf{u}_\nu.$$

Умножая левую часть этого уравнения на $\mathbf{v}_\nu\, dt$, а правую часть — на равную величину $d\mathbf{r}$ и суммируя по всем точкам тела переменной массы, после преобразований имеем:

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)} + \delta A^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu\, \mathbf{v}_\nu^2}{2},$$

где

$$\delta A^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu^{(e)}\, d\mathbf{r}_\nu$$

и

$$\delta A^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu^{(i)}\, d\mathbf{r}_\nu$$

— суммы элементарных работ внешних и внутренних сил;

$$\delta A^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{\Phi}_{r\nu}\, d\mathbf{r}_\nu$$

— элементарная работа реактивных сил.

Полученное равенство формулируется так: *дифференциал кинетической энергии тела переменной массы равен сумме элементарных работ всех внешних, внутренних и реактивных сил, приложенных к данному телу, плюс кинетическая энергия частиц, отбрасываемых телом за время dt, обусловленная их переносным движением.*

Если абсолютная скорость отбрасываемых частиц равна нулю, то будем иметь:

$$dT - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu \mathbf{v}_\nu^2}{2} = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)},$$

т. е. дифференциал кинетической энергии переменной массы минус кинетическая энергия частиц, отбрасываемых телом за время dt, в их переносном движении, равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на данное тело.

Если тело переменной массы абсолютно твердое и относительные скорости отбрасываемых частиц равны нулю, то из первого равенства находим:

$$dT = \delta A^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu \mathbf{v}_\nu^2}{2},$$

т. е. *дифференциал кинетической энергии тела переменной массы равен сумме элементарных работ всех внешних сил плюс кинетическая* энергия частиц, отброшенных телом за время dt в их переносном движении.

§ 39. Удар твердых тел

При ударе двух твердых тел играет роль только относительная скорость обоих тел, поэтому одно из этих тел можно рассматривать как бы находящимся в покое и наблюдать движение только второго, ударяющего тела. В момент касания обоих тел можно к точке соприкосновения провести плоскость, касательную к обоим телам. Прямая, перпендикулярная к этой плоскости и проходящая через точку соприкосновения, называется линией или нормалью удара. Если линия удара проходит через центр тяжести обоих тел, то удар называется центральным, в других случаях — внецентренным ударом. Удар называется прямым, если тело, производящее удар, находится относительно тела, воспринимающего удар, в поступательном движении по направлению нормали удара; в противном случае удар называется косым.

При ударе двух тел нельзя считать тела абсолютно твердыми. Изменение формы соударяющихся поверхностей настолько важно для процесса удара, что им невозможно пренебречь. При ударе различаются два периода. Первый период называется касанием обоих тел. В этот период происходит сплющивание касающихся поверхностей. К концу первого периода сплющивание, следовательно, и сближение обоих тел достигает максимума, точки прикосновения обоих тел имеют одинаковую скорость. Тогда начинается второй период, во время которого сплющивание исчезает вполне или только частью. Этот период длится до момента расхождения обоих тел.

Сила удара $\mathbf{F}$ действует обыкновенно только в продолжение очень короткого времени. Она возрастает во время первого периода обычно до больших размеров и падает во время второго периода до нуля. Для процесса движения действителен закон количества движения, интегрированием которого по времени от t до t' для первого или второго периодов удара, или всего времени удара получаем:

$$m\Delta\mathbf{v} = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \int_{t}^{t'} \mathbf{F}dt = \mathbf{K}.$$

Интеграл по времени силы F называется импульсом. Импульс силы за время удара $t'—t$ равняется приращению K количества движения ударяемого тела массы m.

В сравнении с силами удара, на время периода процесса удара, можно пренебречь всеми влияниями других сил, как например, веса, т. е. при ударе тела можно рассматривать как совершенно свободные.

Прямой, центральный удар. При прямом, центральном ударе линия удара проходит через центр тяжести обоих тел и относительное движение представляет собою поступательное движение, параллельное линии удара; например, удар двух шаров параллельно прямой, проходящей через центры. Обозначим через m_1 и m_2 массы обоих тел, v_1 и v_2 — их скорости перед началом удара; v_1' и v_2'—скорости к концу удара. Мы получим:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$K_1 = m_1 (v_1 - u) = m_2 (u - v_2);$$

$$K_2 = m_1 \left(u - v_1'\right) = m_2 \left(v_2' - u\right).$$

Частное $k = \frac{K_1}{K_2} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$ называется коэффициентом удара; его величина зависит от степени упругости или пластичности обоих тел; предельные значения коэффициента удара: $k = 0$ для совершенно неупругого удара и $k = 1$ для удара вполне упругого, в общем случае $0 < k < 1$.

Общий случай. Скорости имеют значения

$$u = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{(m_1 + m_2)};$$

$$v_1' = u - k(v_1 - v_2) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2};$$

$$v_2' = u + \frac{k(v_1 - v_2) m_1}{m_1 + m_2};$$

изменения количества движения каждого тела:

$$K = m_1 \left(v_1 - v_1'\right) = m_2 \left(v_2' - v_2\right) = (1 + k)(v_1 - v_2) \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2};$$

потеря живой силы:

$$T = m_1 \frac{v_1^2 - v_1'^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2 - v_2'^2}{2} = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}.$$

Вполне неупругий удар: $k = 0$, $v_1' = v_2' = u$:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} = m_1 \frac{(v_1 - u)^2}{2} + m_2 \frac{(u - v_2)^2}{2}.$$

Вполне упругий удар: $k = 1$, $T = 0$:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v_2' = \frac{2 m_1 v_1 - (m_1 - m_2) v_2}{m_1 + m_2};$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

если $m_1 = m_2$, то

$$v_1' = v_2; \quad v_2' = v_1;$$

если $v_2 = 0$, то

$$v_1' = v_1 \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}; \quad v_2' = \frac{2 v_1 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Определение коэффициента удара k: имеем $k^2 = \frac{h_1}{h}$, где h_1 означает высоту, до которой шар отскакивает при падении с высоты h на горизонтальную неподвижную плоскость

$$\left(v_2 = 0, \quad m_2 = \infty, \quad v_1 = \sqrt{2gh}, \quad v_1' = \sqrt{2gh_1}\right).$$

Величина k^2 зависит в большой степени от скорости, с которой происходит удар, т. е. от h. Средние значения k при $v \approx 2{,}8 \frac{м}{сек}$ следующие: для стали и пробки

$$k = \frac{5}{9}, \text{ для стекла } k = \frac{15}{16}, \text{ для дерева } k = \frac{1}{2}.$$

§ 40. Трение

Трение покоя и трение скольжения. Прикосновение двух тел происходит в одной точке, по прямой линии или по плоскости, например, плоскость и шар, плоскость и цилиндр, поверхность винта и гайки. Если трением пренебречь, то взаимодействующие силы и их равнодействующая при соприкосновении двух тел должны быть направлены перпендикулярно к поверхности («Нормальные силы»). Вследствие трения между обоими телами равнодействующая может отклониться от нормали к поверхности и тем более, чем больше трение. Это отклонение имеет место всегда при взаимном относительном движении обоих тел; его направление для тела, находящегося в движении по отношению к находящемуся в покое, всегда направлено противоположно движению.

Если соприкосновение происходит по поверхности, то относительное перемещение представляет собою скольжение; сопротивление от трения в этом случае называется трением скольжения или скользящим трением. Если соприкосновение происходит по линии, относительное движение может быть или скольжением или качением. При касании в одной точке, кроме движения скольжения и качения, возможно еще относительное вращение вокруг нормали соприкосновения, так называемое сверлящее движение (например, шар).

Величина касательного сопротивления от трения, возникающего при скользящем движении, т. е. трения скольжения, выражается обыкновенно в зависимости от нормального давления N, проходящего перпендикулярно к плоскости соприкосновения, т. е.

$$f = N\mu = N \operatorname{tg} \varphi,$$

где множитель μ называется коэффициентом трения скольжения, а φ — углом трения. Для значения μ особенно важна наличность и толщина слоя жидкости (смазки), находящейся между скользящими поверхностями. Поэтому различают сухое трение, смешанное трение и чистое трение жидкости и

вместо одного коэффициента трения μ различают три коэффициента: μ_c (сухое), $\mu_{см}$ (смешанное), $\mu_{ж}$ (жидкости).

Коэффициент сухого трения μ_c зависит от материала подшипников и состояния поверхности скольжения. При трении жидкости, кроме капиллярности (смазочный материал должен смачивать поверхности), имеет значение вязкость η, которая зависит от температуры $t°$.

Трение покоя (опорное трение) появляется между двумя соприкасающимися, но по отношению одного к другому неподвижными телами. Кроме нормального давления N, перпендикулярного к плоскости соприкасания обоих тел, может быть приложена сила f_0 (трение в покое), параллельная к плоскости соприкасания; эта сила не вызовет относительного движения обоих тел, если

$$f_0 < \mu_0 N = \operatorname{tg} \varphi_0 N,$$

где $\mu_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$ коэффициент трения в покое и φ_0 угол трения в покое. Описыванием кругового конуса вокруг нормали к поверхности трения так, чтобы образующая конуса составляла с нормалью угол φ, получим так называемый конус трения. Соприкасающиеся тела сохраняют относительный покой до тех пор пока действующая сила находится внутри этого конуса. Коэффициент трения покоя μ_0 обычно несколько больше коэффициента трения движения μ. Равновесие между двумя телами наступает в тех случаях когда это равновесие возможно без превышения предельного значения f_0 трения покоя. Трение сцепления имеет большое значение для всех передач, основанных на трении, для всех средств передвижения на колесах и т. д. Если P — вес какого-нибудь средства передвижения, двигающегося на колесах по рельсам или по дороге, то его максимальная сила тяги равна $\mu_0 P$.

§ 41. Тяготение тел

Исходным пунктом марксистского философского материализма является признание материальности движущегося и развивающегося мира. Единство мира марксистский философский материализм выводит из объективной материальной действительности, которая существует вне нас.

Большое значение для естественно-научного обоснования идеи единства мира имело открытие закона всемирного тяготения. Это открытие доказало, что законы природы на Земле и в самых отдаленных частях Вселенной едины, что Земля и все небесные тела неразрывно связаны между собой едиными объективными законами.

Законы Кеплера. Немецкий ученый Кеплер, воспользовавшись астрономическими данными Тихо Браге, вывел три закона движения планет вокруг Солнца:

1. Траектория планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, в равные времена описывает равные площади.

3. Квадраты времен обращения двух планет относятся между собой как кубы больших полуосей их орбит.

Законы Кеплера, выведенные из опытных данных, правильно отображают действительное движение планет. Однако в этих законах ничего не говорится о причинах такого движения. Лишь Ньютон с исчерпывающей полнотой объяснил их, исходя из открытого им закона всемирного тяготения и трех законов динамики.

Закон всемирного тяготения. Так как эллиптические орбиты всех планет имеют весьма малые эксцентриситеты (например, эксцент-

риситет Марса 0,09), то траекторию планеты можно принять за окружность. Но даже при этом допущении третий закон Кеплера выполняется с большой точностью.

Действительно, если обозначить радиус круговой орбиты Марса через R_1, а время его обращения вокруг Солнца — через T_1 и соответственно для Земли — R_2 и T_2, то, как показывают измерения:

$R_1 = 2{,}265 \cdot 10^{13}$ *см* (226,5 млн. *км*);

$T_1 = 5{,}9282 \cdot 70^7$ *сек* (686,98 дней);

$R_2 = 1{,}4865 \cdot 10^{13}$ *см* (148,65 млн. *км*);

$T_2 = 3{,}1558 \cdot 10^7$ *сек* (365,25 дней);

и

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = 3{,}2982 \cdot 10^{24};$$

и

$$\frac{R_2^3}{T_2^2} = 3{,}2982 \cdot 10^{24},$$

т. е.

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2},$$

отсюда

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

а это и есть третий закон Кеплера. Принимая, что планета по орбите движется равномерно, найдем линейную скорость двух каких-либо планет:

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1}, \quad v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2}.$$

Центростремительные ускорения, сообщаемые планете силой тяготения, равны соответственно:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{4\pi^2 R_1}{T_1^2};$$

$$a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{4\pi^2 R_2}{T_2^2},$$

отсюда находим отношение ускорений:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{T_1^2} : \frac{R_2}{T_2^2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

Согласно же третьему закону Кеплера:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3}.$$

Тогда

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Силы, согласно второму закону Ньютона, будут:

$$F_1=m_1 a_1; \quad F_2=m_2 a_2,$$

тогда

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}=\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{R_2^2}{R_1^2}=\frac{m_1}{R_1^2}:\frac{m_2}{R_2^2},$$

т. е. силы, с которыми Солнце притягивает планеты, прямо пропорциональны массам планет и обратно пропорциональны квадрату их расстояния от Солнца.

Помножив числитель и знаменатель на kM, где M — масса Солнца; k — некоторая постоянная, получим:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{kM\dfrac{m_1}{R_1^2}}{kM\dfrac{m_2}{R_2^2}},$$

отсюда

$$F_1=k\frac{Mm_1}{R_1^2}; \quad F_2=k\frac{Mm_2}{R_2^2}.$$

В общем случае

$$F=k\cdot\frac{Mm}{R^2}.$$

Следовательно, планета m притягивается Солнцем M с силой, прямо пропорциональной массе Солнца и массе планеты и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Путем опыта доказано, что две массы m_1 и m_2 взаимно притягиваются с силой

$$F=k\frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Это соотношение выражает закон всемирного тяготения. Постоянное число k называется постоянной тяготения, или гравитационной постоянной. Чтобы найти ее физический смысл, положим в последней формуле $m_1=m_2=1$ и $R=1$, получим $F=k$, т. е. k численно равно силе взаимного притяжения двух тел с единичной массой каждое, находящихся на единичном расстоянии друг от друга.

Постоянная тяготения k имеет следующую размерность:

$$[k]=\frac{[FR^2]}{[m^2]}=L^3M^{-1}T^{-2}.$$

Кавендиш в 1789 г. своими опытами доказал закон всемирного тяготения. До этих опытов сила тяготения часто принималась только как гипотеза, объясняющая движение планет и их спутников. Опыты Кавендиша позволяют определить постоянную тяготения — гравитационную постоянную, а отсюда массу Земли.

Кавендиш поставил опыты следующим образом.

К концам деревянного стержня длиной около двух метров (182,38 *см*) были прикреплены два свинцовых шарика по 730 *г* каждый (рис. 46 *а*). Стержень был подвешен на медной проволоке. К другому горизонтальному деревянному стержню такой же длины были подвешены на двух длинных стержнях два свинцовых шара *A* и *B* по 158 *кг* каждый (рис. 46 *б*). Центры тяжести всех четырех тел лежали в одной горизонтальной плоскости.

В положении *I* (рис. 46,*в*) силы взаимного притяжения уравновешиваются. Однако посредством крутильной головки стержень, к которому подвешены шары *A* и *B*, можно повернуть и поставить в положение *II*. Стержень, на котором висят шары *A* и *B*, толстый и его деформация кручения под действием сил тяготения ничтожно мала. Поэтому систему *A*, *B* можно считать

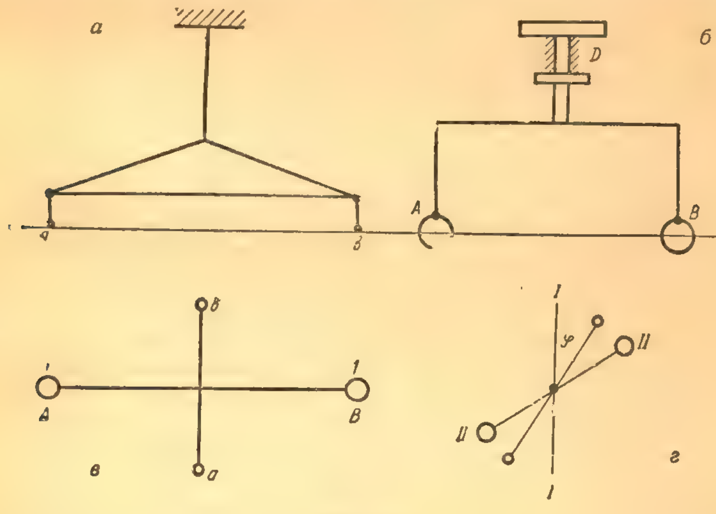


Рис. 46

неподвижной. Медная проволока испытывает деформацию кручения под действием сил тяготения, и система *ab* поворачивается на угол φ. Угол кручения определялся с помощью двух зрительных труб. Все устройство находилось в специальном помещении, защищенном от колебаний температуры.

Согласно закону Гука, момент силы, создающий деформацию кручения

$$M_1 = C\varphi,$$

где C — коэффициент упругости деформации кручения.

Величину C можно определить по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}},$$

где I — момент инерции системы *ав*. Наблюдая предварительно крутильные колебания системы *ab*, вычислив ее момент инерции и измерив период полного колебания T, находят по этой формуле C. Измерив φ, определяют M. Так как $M_1 = Fl$, где F — сила взаимного притяжения шариков, *a* и *A*, l — длина стержня, то легко найти F — силу взаимного притяжения тел *a* и *A*.

Опыты показали, что масса $M = 158\,000$ *г* притягивает массу $m = 730$ *г* на расстоянии 20,32 *см* с силой $F = 0{,}01987$ *дн*. Из закона тяготения:

Постоянные Солнца, Земли и Луны

Название	Средний угловой диаметр	Диаметр *км*	Параллакс	Масса, *кг*	Плотность, $г/см^3$	Ускорение силы тяжести, $см/сек^2$	Температура, °С	Период вращения вокруг оси	Прочие постоянные
Солнце	32′6,5″	$1,392 \cdot 10^6$	8,81″	$1,984 \cdot 10^{30}$	1,39	$27,1 \cdot 10^3$	Около 6 000	25д · 9,1 *час*	Солнечная постоянная = 2,0+0,04 $кал/см^2$ *мин*
Земля	—	Экваториальн. 12756,6 Полярный 12713,7	—	$5,98 \cdot 10^{24}$	5,517	980,616 (шир. 45°)	—	23 *час* 56 *мин* 4,1 *сек*	Расстояние до Солнца = $149,67 \times 10^6$ *км* Расстояние до Луны = $384,4 \cdot 10^3$ *км* Сидерический год = 365 дней 6 *час* 9 *мин* 10 *сек*. Наклон экватора к эклиптике = 23°26′53,7″
Луна	31′6″	3478	57′2,7″	$7,36 \cdot 10^{22}$	3,39	162	Около 120 (лунный день)	27 *дн.* 7 *час* 43 *мин* 11 *сек*	Сидерический месяц = 27 *дн.* 7 *час* 43 *мин* 11 *сек*

Планеты

Название	Среднее расстояние от Солнца 10^6 км	Период, сутки	Период вращения вокруг оси	Эксцентриситет орбиты	Наклон орбиты к эклиптике	Диаметр по экватору, км	Сплюснутость	Масса, 10^{24} кг	Плотность, г/см³	Число спутников	Ускорение силы тяжести, см/сек	Наклон экватора к орбите
Меркурий . .	57,85	87,97	—	0,206	7°0′	5 000	0	0,312	4,76	0	333	—
Венера	108,11	227,70	30 *час*	0,007	3°24′′	12 400	0	4,9	4,9	0	852	—
Земля	149,40	365,26	23 *час* 56 *мин*	0,017	0°0′	12 756,6	1/298	6,0	5,53	1	980,616	23°27′
Марс	227,7	686,98 (1 г. 322 д.)	24 *час* 37 *мин* 23 *сек*	0,093	1°51′	6 783	1/192	0,65	3,96	2	377	23°30′
Юпитер . . .	777,6	11 л. 314 дн.	9 *час* 50 *мин*	0,048	1°18′	142 600	1/15	1 901,4	1,34	9	2 510	3°7′
Сатурн	1426	29 л. 167 дн.	10 *час* 14 *мин*	0,056	2°29′	119 000	1/9,5	568,8	0,71	10 и 3 кольца	1 072	26°45′
Уран	2868,3	84 г. 5 дн.	10 *час* 45 *мин*	0,047	0°46′	51 500	1/14	87,7	1,27	4	883	98°
Нептун . . .	4494,3	164 г. 288 дн.	15 *час* 48 *мин*	0,009	1°47′	49 900	1/40	103	1,58	1	1 100	151°
Плутон	5900	247 л. 255 дн.	—	—	17°09′	—	—	—	—	—	—	—

$$F = k\frac{m_1 M}{R^2},$$

в этом случае оказалось, что

$$k = 7{,}11 \cdot 10^{-8}\ см^3/гсек^2.$$

Кавендиш произвел ряд опытов и как среднее получил

$$k = 6{,}717 \cdot 10^{-8}\ см^3/гсек^2.$$

Произведенные в этом столетии измерения гравитационной постоянной дали значение

$$k = [6{,}685 \pm 0{,}011] \cdot 10^{-8}\ см^3/гсек^2.$$

На основании закона всемирного тяготения нетрудно определить массу и плотность Земли.

Различные константы Земли

1° широты на полюсах	111,71 *км*
1° широты на экваторе	110,56 *км*
Постоянная звездной аберрации	20,45"
Постоянная земной прецессии	50,26" в год
Постоянная нутации	9,21"
Гравитационная постоянная	$6{,}670 \cdot 10^{-8}\ см^3/г\ сек^2$
Длина секундного маятника (период 2 *сек*) на широте 45° = 99,357 *см*	g/π^2

Формула для вычисления ускорения силы тяжести в любом месте Земли:

$$g = 980{,}616 - 2{,}5928 \cos (2 \times широта) + 0{,}0068 \cos^2 (2 \times широта) - 0{,}0003\ (высота\ в\ м).$$

§ 42. Гидро- и аэромеханика. Свойства жидкости и газов

Вязкость. Как жидкости, так и газы представляют собой такие физические тела, которые не имеют определенной формы и принимают форму того сосуда, который они заполняют. Выделим в жидкости или газе параллелепипед $ABCD$ с площадью основания F и высотою h (рис. 47). Его можно деформировать в параллелепипед $ABC'D'$ с теми же площадью основания и высотой так, чтобы во время деформации грань CD передвигалась относительно грани AB со скоростью v. Для этого к каждой из граней AB и CD необходимо приложить силу

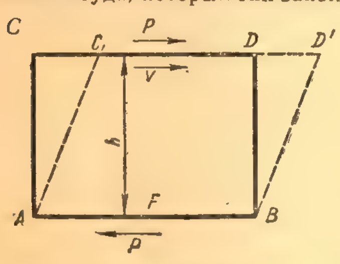


Рис. 47

$$P = \eta F v : h = \eta F dv : dh,$$

где η есть величина, зависящая от свойств вещества и называемая вязкостью (коэффициент вязкости). Отношение этой величины к плотности ρ называется кинематической вязкостью ν (кинематический коэффициент вязкости).

Сжимаемость. В то время, как газы при сдавливании сжимаются, подчиняясь закону Бойля — Мариотта (pv = const), жидкости даже при сильном сдавливании почти не изменяют своего объема. В учении о движении жидкостей — гидродинамике — жидкость почти всегда можно предполагать

несжимаемой. Но и в газах изменения объема иногда бывают настолько малы, что ими вполне можно пренебречь, и в этих случаях законы движения для газов и жидкостей одни и те же. В общем случае сжимаемость газов приходится вводить в расчет только тогда, когда наблюдавшиеся скорости приближаются по своей величине к скорости звука в рассматриваемом газе.

§ 43. Гидростатика

Закон Паскаля. Давление в любом месте покоящейся жидкости (или газа) одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью (или газом).

Уравнение Эйлера. Если в жидкости выделить бесконечно малый параллелепипед, одна из вершин которого лежит в точке M и грани которого равны dx, dy, dz, то этот параллелепипед будет находиться в состоянии равновесия при соблюдении следующих трех уравнений (уравнения равновесия Эйлера):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z,$$

или эквивалентного:

$$dp = \rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

причем через X, Y, Z обозначены компоненты силы, действующей в точке M и отнесенной к единице массы, через p — гидромеханическое давление в точке M и через ρ — плотность. Для свободной поверхности, а также для поверхностей равного давления (поверхности уровня) $dp=0$, и последнее уравнение обращается в следующее:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Сила, компоненты которой обозначены через X, Y, Z, в каждой точке жидкости перпендикулярна к поверхностям равного давления. В жидкостях, которые подвержены только действию силы тяжести, поверхностями равного давления будут шаровые поверхности (приближенно — плоскости), которые расположены параллельно свободной поверхности.

Гидростатическое давление, поддерживающая сила. Нормальное давление на стенки. 1. Плоские стенки.

Обозначения:

F — площадь смачиваемой плоской стенки [$м^2$],
h — расстояние центра тяжести смачиваемой стенки от свободной поверхности жидкости (по вертикали),
α — угол между плоскостью стенки и горизонтальной плоскостью,
x, y — координаты центра давления (точка приложения силы давления жидкости), причем ось x совмещена с прямой пересечения плоскости, проведенной через F, с плоскостью свободной поверхности жидкости, а за ось y взята какая-нибудь прямая в последней плоскости, перпендикулярная к оси x,
l — кратчайшее расстояние периметра площади F от оси x,
S — статический момент [$м^3$] } площади F относительно оси x,
I — момент инерции [$м^4$] } площади F относительно оси x,
I_{xy} — центробежный момент площади F относительно осей x и y [$м^4$].

Нормальное давление равно $F\,h\,\gamma$ и координаты точки приложения равнодействующей силы будут:

$$y = I : S = I \sin\alpha : Fh; \qquad x = I_{xy} : S = I_{xy} \sin\alpha : Fh.$$

Если площадь F имеет ось симметрии, перпендикулярную к оси x, то, взяв ось симметрии за ось y, имеем $x = 0$.

2. Давление в произвольном направлении на стенку какой угодно формы получается суммированием давлений на отдельные элементы этой стенки, причем каждое такое элементарное давление равно проекции площади этого элемента на плоскость, перпендикулярную рассматриваемому направлению, умноженной на расстояние центра тяжести этого элемента до свободной поверхности жидкости и на вес единицы объема жидкости. Отсюда следует, что вертикальное давление на какую-нибудь площадь равно весу столба жидкости, расположенного над этой площадью до свободной поверхности. Давление на площадь F в направлении, образующем с плоскостью острый угол β, равно $Fh\gamma \sin\beta$, причем h есть расстояние центра тяжести площади F до свободной поверхности жидкости. Для тела, целиком или частично погруженного в жидкость, сила давления равна весу вытесненной жидкости.

§ 44. Аэростатика

Законы изменения состояния газов. Обозначения: p—абсолютное давление или напряжение в $\frac{кГ}{м^2}$; $v = \frac{1}{\gamma}$ — удельный объем (объем единицы веса) в $\frac{м^3}{кГ}$. Большинство газов при температурах, близких к комнатным, и давлениях, мало отличающихся от атмосферного, подчиняются закону Бойля—Мариотта с достаточно большой точностью. Газы обладают тем свойством, что они целиком заполняют весь сосуд, в котором заключены, и оказывают давление на ограничивающие сосуд стенки.

Для данной массы газа при постоянной температуре давление газа меняется обратно пропорционально его объему (закон Бойля — Мариотта):

$$pV = \text{const}.$$

Закон Бойля — Мариотта является приближенным. Все газы при очень больших давлениях сжимаются меньше, чем это следует из закона Бойля — Мариотта.

При постоянном давлении удельный объем газа пропорционален абсолютной температуре (закон Гей-Люссака). Если температура в градусах Цельсия равна t, то абсолютная температура $T = 273° + t$. При нагревании газа от 0° до 1 °С при постоянном давлении объем его увеличивается на

$$\alpha = \frac{1}{273°} U_0 = 0{,}00367\, U_0,$$

где v_0 — первоначальный объем. При нагревании объема газа v_1 от $t_1 (T_1)$ до $t_2 (T_2)$ объем v_1 увеличивается до

$$V_2 = \frac{V_1 (1 + \alpha t_2)}{1 + \alpha t_1} = \frac{V_1 T_2}{T_1},$$

откуда

$$p_2 V_2 : T_2 = p_1 V_1 : T_1 = R,$$

или $pV = RT$ (уравнение состояния газа).

Последнее уравнение объединяет оба закона и справедливо для всякого изменения состояния. R называется газовой постоянной. Если при состоянии ($p_1\, T_1\, \gamma_1$) удельный объем какого-нибудь газа равен γ_1, то при состоянии ($p_2\, T_2\, \gamma_2$) его удельный объем будет:

$$\gamma_2 = \gamma_1\, p_2\, T_1 : p_1\, T_2.$$

Изменение давления с высотой. Барометрическая формула. На высоте уровня моря давление атмосферного воздуха равно в среднем 760 *мм рт. ст.*, что составляет 10 333 $кГ/м^2$. Под влиянием метеорологических условий атмосферное давление изменяется в пределах от 720 до 800 *мм рт. ст.*, т. е. на $\pm 5\%$.

Как в жидкости, так и в газе изменение давления с высотой определяется весом расположенного между двумя данными уровнями столба жидкости или газа, имеющего сечение, равное единице. Но вес одного и того же столба с изменением высоты изменяется, так как на разных уровнях жидкость или газ сжаты по разному, и поэтому плотность жидкости или газа на разных высотах различна.

Вследствие малой сжимаемости жидкостей изменения плотности жидкости с высотой происходят гораздо медленнее, чем газа.

Плотность жидкости можно считать постоянной, пока давления не очень велики, т. е. пока рассматриваются не слишком большие глубины. В этом случае в жидкости изменение давления с высотой выражается линейным законом:

$$p_1 = p_0 + \rho g h,$$

где h — высота столба, ρ — постоянная плотность жидкости, p_0 — давление на уровне $h = 0$.

Отклонение от линейного закона для жидкостей становится заметным только при очень больших изменениях глубины.

Изменения плотности газа с высотой вследствие большой сжимаемости становятся заметными уже при не очень больших разностях высот. Плотность можно считать постоянной только для малых изменений высоты.

Изменения давления газа с высотой выражается формулой:

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\gamma_0 h}{kT}},$$

где p_0 и γ_0 — соответственно давление и удельный вес на высоте $h = 0$.

Эта формула называется барометрической формулой. Давление в атмосфере с высотой уменьшается по экспоненциальному закону. Барометрическая формула выведена в том предположении, что температура по всей высоте одна и та же. В действительности температура атмосферы изменяется с высотой и в эту формулу должны быть введены соответствующие поправки.

§ 45. Статическая устойчивость плавающих и погруженных в жидкость тел

Обозначим центр тяжести тела, вес которого равен Q через q, центр тяжести вытесненного объема с весом P — через p. Если в качестве действующих сил рассматривать только вес тела и поддерживающую силу жидкости, то тело будет плавать (без воздействия внешних сил), если $P = Q$ и если одновременно p лежит на вертикали, проходящей через q (ось плавания). Если $P < Q$, то тело погружается; если $P > Q$, то тело поднимается до тех пор, пока P не сделается равным Q. Свободная поверхность жидкости пересекается с плавающим телом по так называемой ватерлинии, которая ограничивает площадь плавания. Если плавающее тело наклонить около оси, параллельной одной из двух главных осей инерции площади плавания, то поддерживающая сила P пересечет ось плавания в точке, называемой метацентром. В общем случае для каждой из обеих главных осей инерции имеется свой метацентр (продольный и поперечный метацентры).

Введем обозначения:

I_1 и I_2 — моменты инерции относительно главных осей площади плавания [$м^4$];

m_1 и m_2 — расстояния [$м$] метацентров от центра тяжести q плавающего тела;

l — расстояние между точками p и q перед вращением, причем l положительно, если p лежит выше q, и отрицательно — в противном случае [$м$];

V — объем вытесненной жидкости [$м^3$].

Тогда для наклонения (вращения) тела на угол α_1 относительно оси I_1 необходим момент

$$M_1 = Pm_1 \sin \alpha_1 \, [кГ \cdot м],$$

а для наклонения на угол α_2 относительно оси I_2 — момент

$$M_2 = Pm_2 \sin \alpha_2 \, [кГ \cdot м].$$

Вращение относительно любой оси можно разложить на вращения относительно осей I_1 и I_2 и, таким образом, определить соответствующий момент.

Для небольших углов α:

$$m_1 = (I_1 : V) + l$$

и

$$m_2 = (I_2 : V) + l.$$

У погруженных в жидкость тел (подводные лодки, аэростаты) ватерлинии не имеется, следовательно, $I_1 = I_2 = 0$, поэтому они будут находиться в устойчивом равновесии только тогда, когда их центр тяжести лежит на одной вертикали с центром тяжести вытесненного объема жидкости или воздуха и под ним. Понятие метацентра утрачивает свой смысл, так как в этом случае метацентр совпадает с центром тяжести вытесненного объема.

§ 46. Гидродинамика

Идеальной жидкостью называется лишенная сил трения жидкость.

Поток называется стационарным, если через любое поперечное сечение трубы в единицу времени проходят равные объемы жидкости:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

где S_1 и S_2 — поперечные сечения, а v_1 и v_2 — скорости жидкости.

Скорость истечения жидкости из достаточно большого сосуда через малое отверстие S выражается формулой:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Эта формула называется формулой Торичелли. Из формулы Торичелли следует, что скорость истечения жидкости через отверстие S имеет такую же величину, какую она имела, если бы частицы жидкости свободно падали с высоты h.

Линии тока, функция тока, критические точки. Кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением течения жидкости, называются линиями тока. При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями отдельных частиц; при неустановившемся же движении они отличны друг от друга. В двумерном потоке каждой линии тока можно приурочить число ψ, которое дает количество жидкости, протекающей через любое поперечное сечение между взятой линией тока и некоторой другой линией тока, принятой за нулевую. Эту величину называют функцией тока. Если u обозначает компонент скорости в направлении оси x, а v — в направлении оси y, то

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad и \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Понятие функции тока можно применить и к пространственным (трехмерным) потокам, симметричным относительно продольной оси (например, обтекание шара); в этом случае функция тока дает количество жидкости, протекающей в одну секунду через поперечное сечение тела вращения, образуемого рассматриваемой линией тока при ее вращении вокруг оси симметрии.

При обтекании жидкостью тела имеется линия тока, которая у тела разделяется. Точка, где это происходит (рис. 48 — точка p_1), называется передней критической точкой. У кормовой части тела, в задней критической точке p_2, линия тока опять смыкается. В критических точках скорость потока относительно тела равна нулю.

Установившиеся и неустановившиеся течения. Течение называется установившимся, если в нем в каждом его месте скорость не меняется ни по величине, ни по направлению, иными словами — если наблюдателю представляется все время одна и та же картина течения; так, установившимся является истечение жидкости под постоянным напором через насадку. При движении же какого-нибудь тела в покоящейся жидкости течение уже не будет установившимся, так как тело и картина обтекания, вызванная его движением в глазах наблюдателя, все время передвигаются. Тем не менее, это явление можно привести к установившемуся; для этого надо выбрать соответствующую систему координат, вместе с которой бы двигались и наблюдатель и тело. Есть, наконец, и такие явления, которые нельзя привести к установившимся; например, движение в жидкости двух тел с различными скоростями. На практике, в большинстве случаев, приходится иметь дело или с установившимися течениями или с такими, которые могут быть приведены к установившимся.

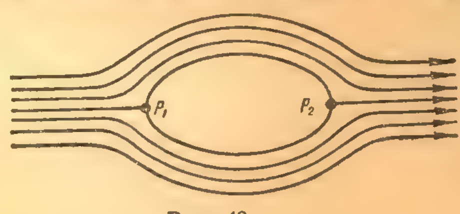


Рис. 48

Одномерные, двумерные и трехмерные потоки. Существуют потоки, состояние которых меняется, главным образом, вдоль некоторой линии, в то время, как в направлении, перпендикулярном к этой линии, оно в существенном остается неизменным; такие потоки называются одномерными. Например, движение жидкости в трубе.

В большинстве весьма важных технических задач, встречающихся в практике и составляющих предмет гидравлики, течение жидкости может рассматриваться как одномерное. В других же случаях течение происходит так, что картина потока одна и та же во всех параллельных плоскостях; примером может служить обтекание цилиндрического тела, бесконечно длинного в направлении оси или же ограниченного с боков плоскими стенками, между которыми жидкость протекает. Изучение таких двумерных или плоских потоков гораздо легче, чем изучение потоков трехмерных или пространственных.

Вращение, вихрь, потенциал. Средняя угловая скорость, с какою вращается около своего центра частица жидкости в виде шара, называется вращением q жидкости около этой точки. Оно определяется своими тремя компонентами для трех взаимно перпендикулярных осей (рис. 49):

$$q_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad q_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$q_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Удвоенная угловая скорость называется **р о т о р о м** или **к е р л о м** скорости и обозначается: rot v.

Вообразим в жидкости поверхность F, ограниченную кривой S (рис. 50). Пусть в какой-нибудь точке контура S жидкость имеет скорость v. Компонент скорости v в направлении касательной в рассматриваемой точке S обозначим через v'. Составив произведение из линейного элемента ds контура и компонента v' и взяв от этого выражения интеграл вдоль всего замкнутого контура, получим величину $\Gamma = \oint v'\,ds$, называемую **ц и р к у л я ц и е й**. Циркуляция Γ и ротор rot v связаны между собою следующим соотношением:

$$\Gamma = \int (\mathrm{rot}\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}),$$

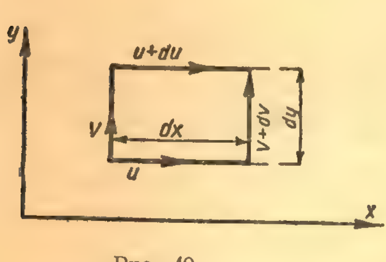


Рис. 49

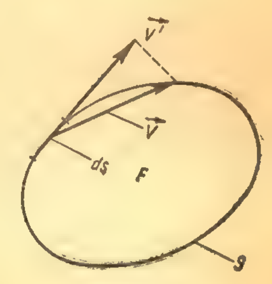


Рис. 50

где $d\mathbf{F}$ элемент площади, rot v — ротор для оси, перпендикулярной к $d\mathbf{F}$; интегрирование распространяется по всей площади, ограниченной рассматриваемым контуром. Если ротор одинаков для всей поверхности, то $\Gamma = \mathbf{F} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{v}$; rot v (соответственно и вращение) есть вектор. Циркуляция есть скалярное произведение двух векторов (v и ds или rot v и $d\mathbf{F}$), следовательно, — скаляр. Если какая-нибудь частица жидкости вращается как твердое тело с угловой скоростью ω, то для окружности с радиусом r, описанной около оси вращения:

$$\Gamma = 2r\pi \cdot r\omega, \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{v} = \Gamma : \mathbf{F} = 2r\pi \cdot r\omega : r^2\pi = 2\omega.$$

Как и должно быть, ротор в два раза больше угловой скорости.

Линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением результирующей оси вращения вращающейся жидкости, называются вихревыми линиями. Совокупность вихревых линий, проходящих через односвязную поверхность, называется вихревой нитью, шнуром, трубкой или просто вихрем. Вихрем часто называют вихревую нить вместе с окружающей ее невращающейся жидкостью — полем вихря. Иногда еще слово вихрь употребляется в одном смысле с ротором. Циркуляцию скорости вокруг вихревой трубки называют напряжением вихря. Поле, вихрь которого представляет собой одну линию, называется потенциальным вихрем или чистой циркуляцией. Вихрь в виде поверхности называется поверхностью раздела или разрыва; скорость при переходе с одной стороны этой поверхности на другую изменяется прерывно на конечную величину Δv, равную циркуляции на единицу длины:

$$\Delta v = d\Gamma : ds.$$

Если какая-нибудь область потока свободна от вращений (rot v = 0), то каждой точке этой области можно приурочить такую величину Φ, что

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Ф называют **потенциалом скоростей**, а поток, свободный от вращений, — **потенциальным потоком**.

Жидкость, в которой вращение отдельной частицы никогда не может измениться, называется идеальной жидкостью. В частности, если вращение везде равно нулю. движение идеальной жидкости может быть только потенциальным.

Общие уравнения движения Навье — Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w.$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$ есть приращение за 1 *сек* компонента скорости в направлении оси x в определенном месте пространства;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

приращение за 1 *сек* компонента скорости в направлении оси x рассматриваемой частицы жидкости, которая в общем случае за промежуток времени dt изменяет свое положение в пространстве. X есть внешняя сила, приходящаяся на единицу массы, $\frac{\partial p}{\partial x}$ — сила в направлении оси x, возникающая от градиента давления;

$$\rho\nu\Delta u = \rho\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

— сила в направлении оси x, возникающая от трения смежных частиц жидкости. В идеальной жидкости, где трения между частицами не существует, последний член в уравнениях Навье — Стокса пропадает. Совокупность остальных членов известна под названием уравнений Эйлера; последние годны только для идеальной жидкости.

Уравнение неразрывности. Из условия, что в элемент пространства переменного объема должно втекать столько же жидкости, сколько из него вытекает, получается уравнение неразрывности для жидкости с постоянной плотностью;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Для потенциального потока это уравнение можно заменить таким:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Если плотность жидкости непостоянна, то уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Иногда при решении некоторых задач приходится допускать, что в некоторых местах потока div v не равна нулю. Такие места называются источником или стоком, смотря по тому, положительна или отрицательна для них div v.

Уравнение давления (уравнение Бернулли). Интегрирование эйлеровых уравнений для установившегося и свободного от вращений движения дает уравнение давления, называемое еще уравнением Бернулли:

$$v^2 \rho : 2 + p + \Pi = \text{const} = p_0,$$

где через П обозначена потенциальная энергия единицы объема. В большинстве случаев в качестве внешних сил, действующих на объем жидкости, приходится рассматривать только силу тяжести, вес. Тогда $\Pi = h\gamma$, причем h есть высота рассматриваемой точки над некоторой неподвижной плоскостью, принятой за нулевую; $v^2\rho \cdot 2$ есть кинетическая энергия единицы объема жидкости и называется динамическим давлением. Вместо динамического давления $\left(\frac{кГ}{м^2}\right.$ или *мм вод. ст.*$\left.\right)$ можно указывать высоту столба рассматриваемой жидкости, который оказывает такое же давление. Эта высота $h = v^2 : 2g$ называется скоростной высотой. Уравнение Бернулли действительно для всей области жидкости, где движение установившееся и свободно от вращений. Если поток установившийся, но не свободен от вращений, то уравнение давления справедливо для каждой отдельной линии тока, если только можно пренебречь влиянием вязкости. Но при переходе от одной линии тока к другой постоянная в этом уравнении меняется.

КОЛЕБАНИЯ

§ 47. Гармоническое колебательное движение

Колебания представляют один из наиболее распространенных видов движений. Прямолинейное и неравномерное движение точки, при котором по истечении определенного времени, периода колебания, точка возвратится в то же самое состояние движения, т. е. займет то же положение и

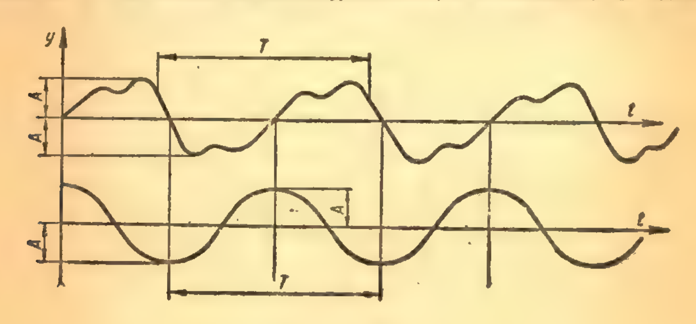


Рис. 51

будет иметь ту же скорость, ускорение и т. д., называется периодическим движением.

На рис. 51 изображены графики периодически изменяющейся величины y как функции времени t, причем период колебания T представленных движений одинаков.

Кроме периода T, характерна для колебаний наибольшая величина отклонения A, которую называют амплитудой колебаний.

Среди разнообразных движений, которые по указанным признакам зачисляют к колебаниям, основную и существенную роль играют так называемые **гармонические колебания**.

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, в котором изменение величины происходит по закону синуса (или косинуса). Гармоническое колебание можно рассматривать как проекцию точки, движущейся по окружности, на линию, лежащую в плоскости движения точки (рис. 52). Если окружность имеет радиус R, а угловая скорость вращения точки — ω, то проекция y будет:

$$y = R \sin \alpha = R \sin \omega t.$$

По истечении одного или нескольких интервалов времени T, соответствующих периоду колебания, движущаяся точка должна занять свое прежнее положение. Следовательно, период колебания T определяется из условия:

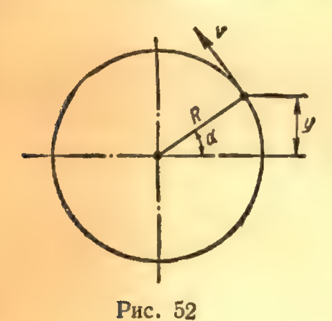


Рис. 52

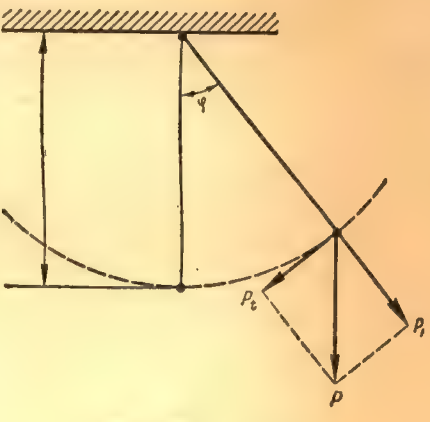


Рис. 53а

$$R \sin \omega t = R \sin \omega (t + T);$$

так как синус имеет период 2π, то увеличение аргумента правой части по сравнению с аргументом левой части или должно быть равно 2π, или содержать 2π целое число раз. Период гармонического колебания поэтому выражается формулой:

$$\omega T = 2\pi$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

ω — называется **круговой** (или **циклической**) **частотой гармонических колебаний**. Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

называется частотой колебаний, т. е. число колебаний в единицу времени. Частота колебаний имеет размерность T^{-1}. В системе СГС единицей частоты служит $1/сек$. Эта единица получила название «герц» (1 герц = 1 колебанию в 1 *сек*). В качестве другого примера колебательного движения, поясняющего физические условия, при которых совершаются гармонические колебания, может служить движение плоского маятника (рис. 53 *а*). Когда нить маятника вертикальна, то сила тяжести $P = mg$, приложенная к грузу маятника.

уравновешивается натяжением нити. Размеры груза будем считать малыми, а нить маятника — невесомой. Такой маятник называют математическим. Если маятник отклонить от положения равновесия на некоторый угол φ, то только часть силы P уравновешивается реакцией нити, именно, составляющая сила тяжести P_n, параллельная нити. Составляющая P_t, перпендикулярная к нити, численно равная $P\sin\varphi$ и направленная к положению равновесия маятника, остается неуравновешенной. Если угол отклонения φ мал, то синус можно заменить самим углом φ, тогда $P_t \approx P\varphi$, т. е. сила, возвращающая груз маятника в положение равновесия, при малом угле φ, пропорциональна углу φ. По своему характеру эта сила аналогична упругой силе.

Отклонение груза от положения равновесия обозначим через x, тогда при малых углах φ можно приближенно считать:

$$x = l\varphi,$$

где l — длина маятника от точки привеса нити до центра тяжести груза. Сила P_t, действующая вдоль дуги, равна

$$P_t = mg\varphi.$$

Уравнение движения, согласно второму закону Ньютона, будет:

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}.$$

Знак минус означает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению x.

Итак, дифференциальное уравнение колебательного движения маятника будет:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0.$$

Обозначив $\omega^2 = \frac{g}{l}$, получим решение этого дифференциального уравнения движения:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Величина A, равная максимальному отклонению от положения равновесия, называется амплитудой гармонических колебаний.

Аргумент синуса $(\omega t + \alpha)$ называется фазой. Величина α — начальная фаза, или фаза в момент $t = 0$.

П е р и о д с о б с т в е н н ы х к о л е б а н и й:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Частота колебаний маятника или с о б с т в е н н а я ч а с т о т а:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Круговая или собственная к р у г о в а я ч а с т о т а м а т е м а т и ч е с к о г о м а я т н и к а:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

При больших углах отклонения маятника уравнение колебаний принимает вид:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Собственные колебания **физического маятника**, т. е. тяжелого тела, свободно вращающегося вокруг некоторой оси, будут происходить так же, как и колебания математического маятника. При отклонении маятника A от положения равновесия на угол φ (рис. 53 *б*) возвращающий момент силы тяжести равен:

$$mga \sin \varphi,$$

где m — масса тела, a — расстояние от центра массы до горизонтальной оси вращения O, перпендикулярной к плоскости чертежа.

При колебаниях только этот момент будет действовать на тело, следовательно, согласно второму закону динамики для вращающегося тела, уравнение движения будет:

$$I\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi,$$

где I — момент инерции тела относительно горизонтальной оси вращения O.

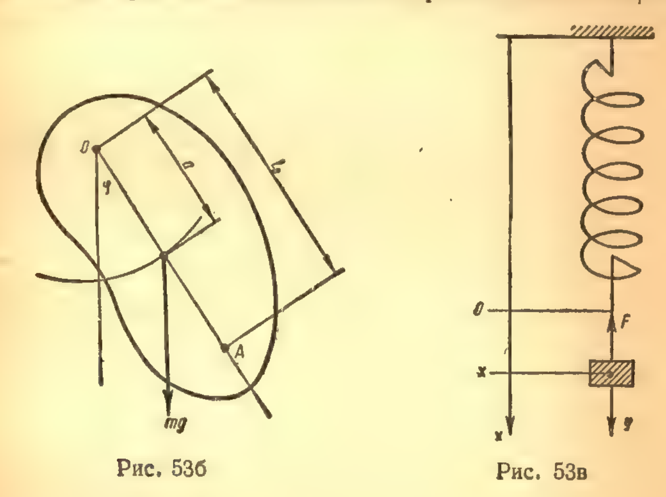


Рис. 53б

Рис. 53в

При малых углах отклонения

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \text{тогда} \quad I\ddot{\varphi} + mga\,\varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I}\varphi = 0.$$

Это уравнение по виду совпадает с уравнением движения математического маятника. Следовательно, φ будет изменяться по гармоническому закону с угловой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}.$$

Математический маятник, длина которого равна $l_0 = \frac{I}{ma}$, будет иметь частоту колебаний, одинаковую с данным физическим. Точка, находящаяся на расстоянии l_0 от оси вращения по линии, проходящей через центр масс, называется **центром качания физического маятника**.

§ 48. Сложение гармонических колебаний

Если одна и та же частица среды участвует в нескольких колебательных движениях одновременно, то смещение точки в каждый момент времени можно найти геометрически, сложив векторно смещения ее от каждого колебания в отдельности. Рассмотрим несколько частных случаев сложения колебаний.

Сложение двух одинаково направленных колебаний одного периода. Если два гармонических колебания происходят в одном направлении x и имеют одинаковые периоды, но различные начальные фазы φ_1 и φ_2, то смещения x_1 и x_2 для этих двух колебаний можно записать в виде:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

и

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Результирующее смещение $x = x_1 + x_2$. Амплитуду a и начальную фазу результирующего колебания φ_0 можно найти, воспользовавшись методом

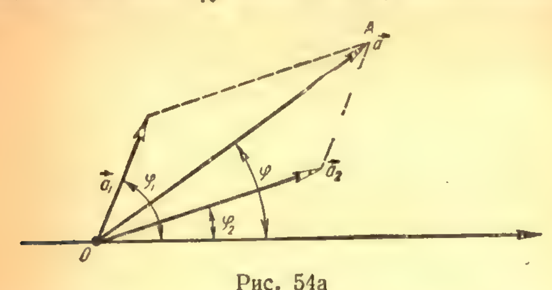


Рис. 54а

векторных диаграмм. Если через некоторую точку O горизонтальной оси провести лучи под углами φ_1 и φ_2 к горизонтали и на этих лучах от точки O отложить амплитуды $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ слагаемых колебаний, как показано на рисунке 54a, то нетрудно заметить, что проекции амплитуд $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ на вертикальную ось Ox равны смещениям x_1 и x_2 слагаемых колебаний. Результирующее смещение x можно получить графически, если сложить амплитуды $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ векторно и спроектировать полученный вектор $\mathbf{a}$ на ось Ox.

Угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ все время остается постоянным и равным $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$; векторный треугольник не изменит своей формы с течением времени, его вершина A будет равномерно двигаться по окружности против часовой стрелки. Вектор результирующей амплитуды $\mathbf{a}$ вращается с той же угловой скоростью ω, что и векторы амплитуд складываемых колебаний.

Проекция отрезка $\mathbf{a}$ на ось Ox будет в каждый момент времени определять смещение x результирующего колебания.

Результирующее колебание является поэтому гармоническим и происходит по закону:

$$x = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда этого колебания равна модулю вектора $\mathbf{a}$, т. е.

$$a = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

где, как следует из рис. 54a,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}$$

Если разность фаз слагаемых колебаний

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\,k\pi,$$

где k — любое целое число, то говорят, что колебания совпадают по фазе.

В этом случае имеет место равенство

$$a = a_1 + a_2.$$

Если разность фаз слагаемых колебаний

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2\,k + 1)\,\pi,$$

где k — любое целое число, то

$$\cos (2\,k + 1)\,\pi = -1,$$

в этом случае колебания находятся в противоположных фазах и максимально ослабляют друг друга:

$$a = a_1 - a_2.$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Если точка участвует в двух колебаниях одного и того же периода, направления которых перпендикулярны, то траектория колеблющейся точки представляет собой эллипс. Форма его зависит от разности фаз колебаний.

Если колебания происходят по законам

$$x = a_1 \sin \omega t$$

и

$$y = a_2 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

то, исключая из этих уравнений время t, найдем, что траекторией движения точки является эллипс, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1.$$

Если $a_1 = a_2$, то эллипс превращается в окружность.

В некоторых случаях эллипс вырождается в прямую. Пусть, например, слагаемые колебания происходят по законам:

$$x = a_1 \sin (\omega t + \varphi_0),$$

$$y = a_2 \sin (\omega t + \varphi_0).$$

Тогда $y = \frac{a_2}{a_1} x$, а это — уравнение прямой.

Если периоды слагаемых колебаний не совпадают, траектории результирующего движения представляют собой сложные петлеобразные кривые, называемые фигурами Лиссажу.

Сложение колебаний с близкими периодами. Биение. Если слагаемые колебания происходят по одному направлению, но с разными периодами, то результирующее колебание, вообще говоря, не является гармоническим. В этом случае в векторной диаграмме колебаний (рис. 54, *а*) векторы слагаемых амплитуд **a**$_1$ и **a**$_2$ вращаются с разными угловыми скоростями, в результате чего угол между ними не остается постоянным, а изменяется с течением времени. Вследствие этого меняется и величина результирующей амплитуды **a**.

Обозначив круговые частоты слагаемых колебаний через ω_1 и ω_2 и приняв в качестве начального тот момент, при котором начальные фазы обоих колебаний одинаковы, можно эти колебания представить в виде:

$$x_1 = a_1 \sin (\omega_1 t + \varphi);$$

$$x_2 = a_2 \sin (\omega_2 t + \varphi).$$

Разность фаз слагаемых амплитуд будет равна $(\omega_1 - \omega_2)t$. Амплитуда результирующего колебания имеет значение:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega_1 - \omega_2) t}.$$

Из этой формулы видно, что величина амплитуды a результирующего колебания меняется со временем; это указывает на то, что результирующее колебание *не является гармоническим*.

Если периоды и, следовательно, круговые частоты ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга, то в некоторые промежутки времени колебания оказываются почти совпадающими по фазе и в это время они «усиливают друг друга». В другие промежутки времени колебания оказываются почти противоположными по фазе, и тогда они «гасят друг друга».

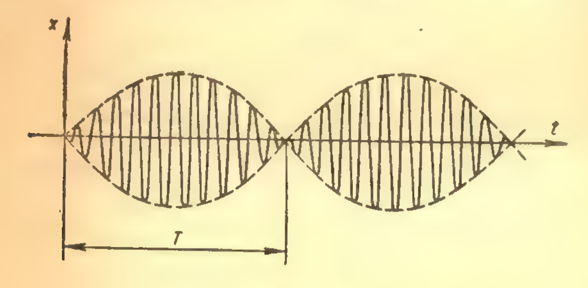


Рис. 54б

При сложении двух колебании с одинаковыми амплитудами $a_1 = a_2$ абсолютное значение величины результирующей амплитуды определится по формуле:

$$a = \sqrt{2a_1^2 [1 + \cos(\omega_1 - \omega_2) t]} = 2a_1 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

Период T изменения абсолютного значения амплитуды будет тем промежутком времени, за который аргумент косинуса изменится на величину π.

Следовательно, период T определится из условия:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} T = \pi,$$

отсюда находим

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Частота ν изменения амплитуды равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2,$$

т. е. *частота* ν *изменения амплитуды результирующего колебания равна разности частот слагаемых колебаний.*

Угол, образуемый результирующей амплитудой **a** с горизонтальной осью x, равен $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi$, следовательно, вектор результирующей амплитуды **a** в этом случае вращается с постоянной угловой скоростью, равной полусумме круговых частот слагаемых колебаний.

Проектируя вектор результирующей амплитуды a на вертикальную ось, получим результирующее смещение:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi),$$

или

$$x = 2a_1 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right).$$

Так как ω_1 и ω_2 близки по величине, то разность $\omega_1 - \omega_2$ мала по сравнению с величиной $\omega_1 + \omega_2$, поэтому результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое колебательное движение, происходящее с круговой частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, амплитуда которого a медленно меняется по закону:

$$\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

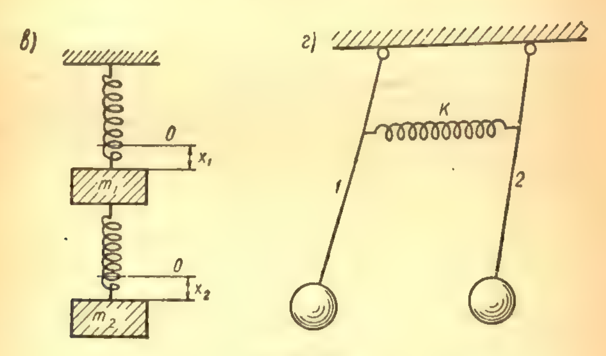


Рис. 54в, г

Она достигает максимума, равного $2a_1$, когда фазы складываемых колебаний совпадают, и падает до нуля, когда они противоположны. Этот вид колебаний называется **биениями**.

Время $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ называется **периодом биений**, $(\omega_1 - \omega_2)$ — **угловой частотой биений**.

На рис. 54 *б* показано возникновение биений при сложении двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами, но с разными периодами.

Связанные колебания. В простейших случаях процесс движения системы может быть определен только одной координатой.

Примером может служить груз, прикрепленный к нижнему концу невесомой пружины, совершающий только вертикальные перемещения. Такие системы называются **системами с одной степенью свободы**.

Если система содержит несколько масс, связанных между собой и с основанием упругими элементами, то для определения конфигурации необходимо несколько координат, и система имеет **несколько степеней свободы**.

На рис. 54 *в* изображены две массы m_1 и m_2, подвешенные на пружинах одна над другой. Если эти массы имеют возможность перемещаться только по вертикали и перемещения x_1 и x_2 измеряются от положения равновесия, то двумя координатами полностью определяется конфигурация системы. При анализе колебаний этой системы необходимо учитывать одновременное дви-

жение обеих масс; таким образом, подобная колебательная система имеет две степени свободы.

Два маятника, связанные пружиной *K* (рис. 54 *г*) и могущие совершать колебания только в вертикальной плоскости, проходящей через точки их подвеса, также являются системой с двумя степенями свободы.

Колебания одного маятника связаны с колебаниями другого. Колебания таких систем называют с в я з а н н ы м и.

Вследствие связи частóты колебаний связанных систем становятся отличными от тех частот, которые каждая из систем имела бы, если бы связь между ними отсутствовала.

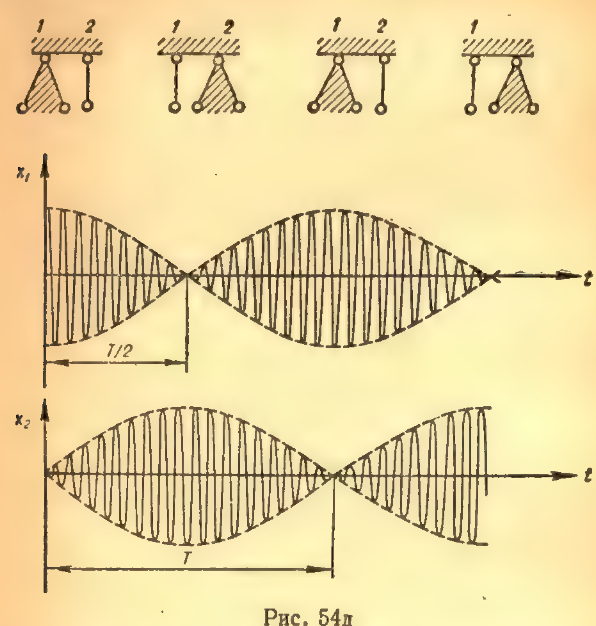


Рис. 54д

В случае двух связанных одинаковых маятников (рис. 54 *г*) можно наблюдать, как колебания левого маятника, возбуждая колебания правого маятника, начинают затухать, причем левый маятник останавливается, когда амплитуда правого достигает максимума; после этого правый маятник начинает раскачивать левый и процесс полностью повторяется, так как маятники одинаковы. Колебания каждой из двух связанных систем имеет характер биений.

Маятники будут совершать то нарастающие, то убывающие колебания и через время *T* обмениваться энергией.

Вследствие этого энергия колебаний будет как бы «перекачиваться» из одной системы в другую и обратно с частóтой биений.

Картина колебаний связанных одинаковых маятников изображена на рис. 54*д*.

§ 49. Собственные колебания и изменение энергии во время колебаний

В случае, если груз висит на пружине (рис. 53*в*), его колебательные движения будут гармоническими до тех пор, пока пружина следует закону Гука

о пропорциональности нагрузки и деформации. Колебания, которые совершает система около положения равновесия после того, как она каким-либо образом была выведена из состояния устойчивого равновесия, носят название **собственных** или **свободных колебаний**.

Колебания маятника или груза на пружине являются примером собственных колебаний.

При отклонении груза на величину x, на него будет действовать возвращающая сила $f = kx$, равная разности сил пружины и силы тяжести.

Уравнение движения груза, имеющего массу m, будет почти такое же, как и для малых колебаний маятников, а именно

$$m\ddot{x} = -f = -kx,$$

где k — коэффициент жесткости пружины равен отношению нагрузки G к статическому удлинению $\delta_{ст}$:

$$k = \frac{G}{\delta_{ст}}.$$

Решением уравнения движения груза будет:

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right),$$

т. е. груз совершает гармонические колебания.

По аналогии с маятником круговая частота и период колебаний груза следующие:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{gk}{G}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{gk}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}}.$$

Вводя в рассмотрение число колебаний в минуту n, равное

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = 30 \sqrt{\frac{g}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta_{ст}}},$$

можно (с точностью до 0,3%) пользоваться формулами:

$$n = \frac{30}{\sqrt{\delta_{ст}}}, \text{ если } \delta_{ст} \text{ выражено в метрах,}$$

$$n = \frac{300}{\sqrt{\delta_{ст}}}, \text{ если } \delta_{ст} \text{ выражено в сантиметрах.}$$

Соответственно частота, выраженная числом колебаний в секунду, т. е. **в герцах** (*гц*), определяется формулами:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{60} = \frac{1}{2\sqrt{\delta_{ст}}},$$

если $\delta_{ст}$ выражено в метрах,

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\sqrt{\delta_{ст}}},$$

если $\delta_{ст}$ выражено в сантиметрах.

Процесс колебаний будет сопровождаться переходом энергии из потенциальной в кинетическую и обратно.

Дважды за период энергия будет полностью превращаться в потенциальную и дважды за период — в кинетическую. В соответствии с этим выражения потенциальной энергии

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{4}[1 - \cos 2(\omega t + \varphi)]$$

и кинетической энергии

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} V^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{mV^2}{4}[1 + \cos 2(\omega t + \varphi)]$$

содержат удвоенную частоту.

Так как амплитуда смещения и скорости связаны соотношением:

$$v = \omega A, \quad \text{а} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

то

$$kA^2 = mV^2$$

и полная энергия колеблющегося тела равна:

$$W = T + U = \frac{kA^2}{2} = \frac{mV^2}{2}.$$

При гармонических колебаниях полная энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды смещений (или амплитуды скоростей).

§ 50. Затухающие колебания

Если на колеблющееся тело действует сила трения, то энергия системы, а вместе с тем и наибольшие смещения и скорости не остаются постоянными, а убывают, энергия расходуется на преодоление сил трения и превращается в тепло. Происходит постепенное затухание колебаний.

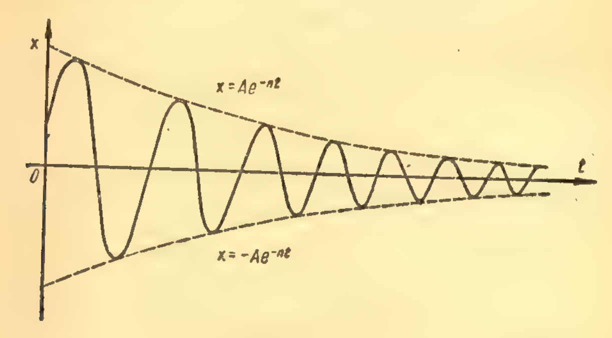


Рис. 55

Такие затухающие колебания уже не являются гармоническими. (Гармонические колебания — это колебания с неизменной амплитудой.)

Затухающие колебания — это колебания, амплитуда которых убывает со временем. Закон убывания амплитуд колебаний зависит от характера сил трения действующих на тело.

График затухающего колебания для одного определенного типа сил трения изображен на рис. 55.

Затухающие колебания не являются периодическим процессом.

Периодическим процессом называется такой процесс, при котором через одинаковые промежутки времени повторяется одно и то же состояние системы. Этот промежуток времени и называется периодом процесса. «Периодом» затухающих колебаний принято называть время T_1, за которое система дважды проходит через среднее положение в одном и том же направлении, или (что то же самое) время, за которое отклонение в одну и ту же сторону дважды достигает максимального значения.

Силы трения замедляют движение системы. Поэтому *период затухающих колебаний всегда несколько больше, чем период тех собственных колебаний, которые совершала бы система, если бы трение отсутствовало.* Но если трение мало, то оно очень мало влияет на период затухающих колебаний.

При малом трении практически можно считать, что период затухающих колебаний T_1 равен периоду колебаний T_0 в отсутствии трения, и угловая частота затухающих колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$ совпадает с угловой частотой ω_0 в отсутствии трения.

В ряде случаев с достаточной степенью точности можно считать, что силы трения пропорциональны скорости движения:

$$f = -b\dot{x},$$

где b — коэффициент силы трения.

В этом случае уравнение движения при колебаниях груза, подвешенного на конце пружины, будет:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \varphi),$$

где A и φ — постоянные величины, зависящие от начальных условий, через n и ω_1 обозначено:

$$n = \frac{b}{2m}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega^2 - n^2}.$$

Произвольные постоянные A и φ имеют значения:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{\omega_1^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0\,\omega_1}{v_0 + x_0\,n},$$

где x_0 и v_0 — перемещение и скорость при $t = 0$.

Из уравнения движения следует, что x периодически меняет знак, так что движение груза имеет колебательный характер.

Период колебания равен:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \left(\frac{n}{\omega}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{\omega}\right)^2}},$$

где $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ представляет период свободных колебаний груза при отсутствии сил трения.

Величину T_1 называют условным периодом затухающего колебания.

Коэффициент $n = \frac{b}{2m}$, характеризующий быстроту затухания колебаний во времени, называется **коэффициентом затухания**.

Если отношение $\frac{n}{\omega}$ мало, то

$$T_1 = T_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\omega}\right)^2 + \ldots\right],$$

и увеличение периода свободных колебаний за счет трения имеет малую величину.

Роль амплитуды колебаний в условно периодическом движении играет величина

$$a = Ae^{-nt},$$

которая убывает с течением времени.

Последовательные максимальные отклонения груза от положения $x = 0$, происходящие в одну сторону, будут наступать через одинаковые промежутки времени, равные условному периоду T_1:

$$\begin{aligned} &\text{при } t = 0 && a_0 = A, \\ &\text{при } t = T_1 && a_1 = Ae^{-nT_1} \\ &\text{при } t = 2T_1 && a_2 = Ae^{-2nT_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Отношение предыдущего размаха к соседнему последующему определяет так называемый декремент затухания:

$$\delta = \frac{a_{n-1}}{a_n} = e^{nT_1}.$$

Натуральный логарифм этого отношения называется **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\eta = \ln\delta = nT_1.$$

Показатель затухания n характеризует затухание колебаний за единицу времени, а логарифмический декремент — затухание колебаний за период. Последовательные максимальные отклонения точки убывают в геометрической прогрессии и, следовательно, амплитуда затухающих колебаний убывает весьма быстро даже при относительно малых коэффициентах сопротивления.

На рис. 55 изображен график затухающего колебательного движения, который лежит в области, ограниченной показательными функциями:

$$x = Ae^{-nT} \quad \text{и} \quad x = -Ae^{-nT}.$$

§ 51. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания происходят под действием внешней периодически возмущающей силы.

Примером этого случая может служить груз, подвешенный на конце пружины, к которому прикладывается внешняя сила через равные промежутки времени.

Предположим, что периодическая возмущающая сила F меняется со временем по закону косинуса:

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Период этой силы $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а ее частота $\nu_1 = \frac{\omega}{2\pi}$; величина F_0 называется амплитудой силы и представляет наибольшее значение силы.

Если на колеблющийся груз, кроме периодической возмущающей силы F, действует упругая сила пружины и сила сопротивления, то дифференциальное уравнение движения, выражающее второй закон Ньютона, запишется так:

$$m\ddot{x} = kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t,$$

или

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2n\dot{x} + h \cos \omega t,$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad n = \frac{b}{2m}, \quad h = \frac{F_0}{m}.$$

Установившиеся вынужденные колебания происходят по гармоническому закону с частотой, равной частоте внешней силы, т. е. по закону

$$x = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Разность фаз возмущающей силы и вынужденного колебания определяется из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Амплитуда a вынужденных колебаний определяется из следующей формулы:

$$a = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}},$$

или

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{\omega_0^4}}}.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний получается путем умножения статического отклонения a_0 на абсолютное значение множителя

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{\omega_0^4}}},$$

который называется динамическим коэффициентом. При $\omega = 0$

$$a = a_0 = \frac{h}{\omega_0^2} = \frac{hm}{k} = \frac{F_0}{k},$$

т. е. a_0 равно статическому отклонению груза под действием максимальной возмущающей силы.

Если затухание мало, то практически можно считать, что a достигает максимума при $\omega = \omega_0$.

Приближенное значение этого максимума есть

$$a_{макс} \approx \frac{F_0}{2nm\omega_0} = \frac{F_0}{\frac{\delta}{\pi} k},$$

где $\delta = \frac{2\pi n}{\omega} = nT$ логарифмический декремент затухания колебаний. Значение динамического коэффициента в зависимости от $\frac{\omega}{\omega_0}$ при различных значе-

ниях отношения $\frac{2n}{\omega_0}$ представлены на рис. 56*а*. Из рисунка видно, что если частота возмущающей силы мала по сравнению с собственной частотой колебаний системы, то динамический коэффициент близок к единице и амплитуда вынужденных колебаний приблизительно равна a_0.

В том случае, когда ω велика по сравнению с ω_0, т. е. частота возмущающей силы велика по сравнению с собственной частотой колебаний системы, динамический коэффициент становится весьма малым и также малыми оказываются амплитуды вынужденных колебаний.

Отношение максимальной амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению a_0 зависит только от затухания системы:

$$\frac{a_{макс}}{a_0} = \frac{\pi}{\delta}.$$

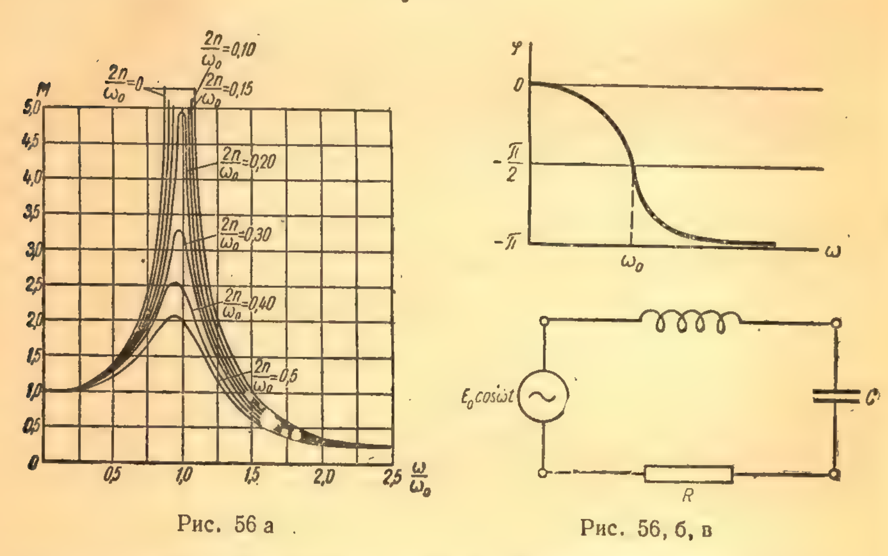


Рис. 56 а

Рис. 56, б, в

Если δ мало по сравнению с единицей, то наибольшая амплитуда вынужденных колебаний во много раз превышает статическое отклонение a_0.

Это резкое возрастание амплитуд вынужденных колебаний в области, где ω близко к ω_0, называется **явлением резонанса**.

С помощью соотношения $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ рассмотрим изменение сдвига фаз φ при изменении частоты возмущающей силы. При достаточно малом ω $\operatorname{tg}\varphi \approx -\frac{2n}{\omega_0^2}$, т. е. φ близко к нулю. Фаза вынужденных колебаний почти совпадает с фазой возмущающей силы.

При $\omega \to \omega_0$

$$\operatorname{tg}\varphi \to \infty \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

т. е. фаза вынужденных колебаний отстает на $\frac{\pi}{2}$ от фазы возмущающей силы. При очень большой частоте возмущающей силы

$$\mathrm{tg}\,\varphi \approx \frac{2n}{\omega},$$

т. е. φ близко к $-\pi$. Фаза вынужденных колебаний почти противоположна фазе возмущающей силы. На рис. 56б величина φ дана в зависимости от ω.

Такие кривые называются фазовыми резонансными кривыми.

Приведенные результаты могут быть перенесены и на электрические колебания.

В электрическом колебательном контуре RLC (рис. 56в) индуктивность L, емкость C и активное сопротивление R являются, соответственно, аналогами массы, коэффициента силы трения и коэффициента жесткости в механике.

Заменяя F_0 амплитудой э. д. с. — E_0, координату x — зарядом конденсатора q, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний электрического контура:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_0 \cos \omega t.$$

По внешней структуре это уравнение аналогично уравнению вынужденных механических колебаний.

ВОЛНЫ

§ 52. Возникновение волны

Процесс распространения колебания в упругой среде называется волной. Каждая из частиц среды при этом колеблется около положения устойчивого равновесия.

Поверхность, которая отделяет колеблющиеся частицы от частиц, еще не пришедших в колебательное движение, называется фронтом волны. Совокупность точек, колеблющихся в одинаковых фазах, образует волновую поверхность. Все точки фронта волны, очевидно, имеют нулевую фазу, т. е. фронт волны представляет собой одну из волновых поверхностей. Если фронт волны есть плоскость, волна называется плоской, если фронт волны есть поверхность шара, волна называется сферической. Сферическая волна распространяется от точечного источника волн в однородной среде.

Принцип Гюйгенса. Перегородив поверхность жидкости преградой с малым отверстием в ней и направив на преграду плоскую волну, можно убедиться, что за преградой фронт волны примет форму окружности, как если бы источником волн являлась точка фронта волны, дошедшая до отверстия в диафрагме (рис. 57).

Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка фронта волны может рассматриваться как источник вторичных волн. Новое положение фронта волны представляется огибающей этих вторичных волн (рис. 57).

Если колебания отдельных частиц в волне происходят в направлении распространения волны, волна называется продольной. Если колебания отдельных частиц происходят в плоскостях, перпендикулярных направлению, по которому распространяется волна, то волна называется поперечной. Взаимное расположение колеблющихся точек для случаев продольной (*а*) и поперечной (*б*) волн изображено на рис. 58.

Продольная волна представляет собой чередование сгущений и разряжений в упругой среде. Продольные волны возможны в газах, жидкостях и твердых телах. Поперечная волна возможна лишь в среде, где деформация сдвига вызывает упругие силы. Поэтому поперечные волны не возникают в жидкости и газе. Поперечные волны могут распространяться в твердых

телах, а также на границе раздела двух жидкостей или жидкости и газа, например, на поверхности воды. Однако в последнем случае волна не является, строго говоря, поперечной, так как отдельные частицы среды колеблются уже не вдоль отрезка прямой, а описывают круговые или эллиптические траектории.

Уравнение луча. Рассмотрим процесс распространения колебания вдоль прямой (луча) Ox (рис. 59). Пусть частица, расположенная в начале

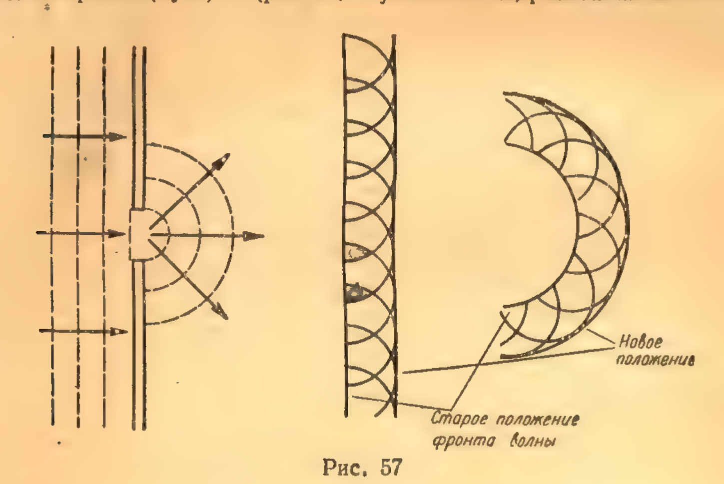


Рис. 57

координат O, в некоторый момент времени $t = 0$ начинает колебаться вдоль отрезка оси Oy по закону:

$$y_0 = a \sin \omega t.$$

а)

б)

Рис. 58

Чем дальше отстоит некоторая точка M на оси Ox от начала координат O, тем больший промежуток времени τ пройдет, пока колебания от точки O дойдут до точки M. Этот промежуток времени можно найти, поделив расстояние от начала координат до точки M на скорость распространения волны u, т. е. $\tau = \frac{x}{u}$.

Если с момента возникновения колебаний в точке O прошло t *сек*, то с момента, когда точка M стала колебаться, прошло лишь $t - \tau$ *сек*.

Смещение точки M определяется поэтому по закону:

$$y_M = a \sin \omega (t - \tau) = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{u}\right).$$

Последнее равенство представляет собой уравнение луча. Оно описывает смещение любой точки M луча в зависимости от времени t и от расстояния этой

точки до источника колебаний O. Заменив в уравнении луча циклическую частоту ω обычной ν или периодом T, это уравнение можно записать в виде:

$$y_M = a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) = a \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{u}\right).$$

Длина волны. На рис. 59 изображены смещения различных точек волны в некоторый момент времени. Видно, что фазы различных точек различны.

Расстояние λ между двумя ближайшими точками, колеблющимися в одинаковых фазах, называется длиной волны.

Если с рассматриваемого момента времени пройдет промежуток времени, равный одному периоду T, то точка M, совершив полное колебание, вновь придет в исходное положение, а также придут в колебательное движение все

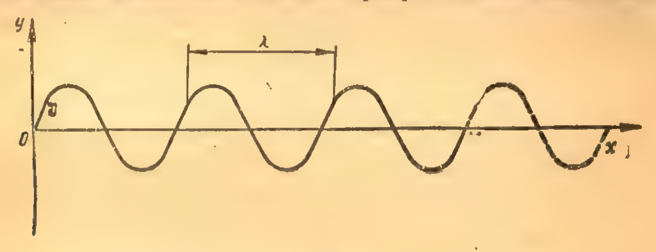


Рис. 59

точки, расположенные справа от точки M на рисунке, смещения которых изображены пунктиром. Поэтому за один период колебания T волна распространяется на длину волны λ. Отсюда фазовая скорость распространения волны u равна:

$$u = \frac{\lambda}{T}.$$

Заменяя в равенстве период T частотой $\nu = \frac{1}{T}$, получим:

$$u = \lambda\nu.$$

§ 53. Фазовая и групповая скорости

Скорость, с которой распространяется от частицы к частице фаза в волне, носит название фазовой скорости u.

Если по одному направлению в среде распространяется несколько волн, частоты которых немного отличаются (группа волн), причем скорость распространения фазы u зависит от частоты, то оказывается, что энергия переносится волнами со скоростью, отличающейся от фазовой скорости.

Смещение каждой из колеблющихся точек можно найти, складывая смещения, которые получает эта точка от каждой из волн группы в отдельности. Как известно, результат сложения колебаний одного направления определяется соотношением фаз этих колебаний. Если фазы противоположны, то результирующая амплитуда минимальна, если фазы совпадают, то результирующая амплитуда максимальна. В каждый момент времени максимальная амплитуда для распространяющейся в одном направлении группы волн соответствует тому участку пространства, в котором сосредоточен максимум энергии волны. Эта точка называется центром группы волн G. Волновое поле группы волн с близкими частотами изображено на рис. 60.

В последующий момент времени соотношение фаз колебаний от отдельных волн группы в точке, где находился центр группы G, изменится, поэтому

центр группы волн переместится в пространстве, а вместе с ним и энергия волны. Скорость перемещения центра группы волн можно найти, если заметить, что в центре группы волн совпадают фазы колебаний, вызванных волнами различных, но близких длин волн. Поэтому в центре группы фаза колебаний не зависит от длины волны, т. е. от того, какой из волн группы приписывается эта фаза. Математически это можно выразить в утверждении, что производная фазы φ по длине волны λ равна нулю:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0.$$

Из уравнения луча фаза колебания

$$\varphi = 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right) = 2\pi\left(\frac{ut}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

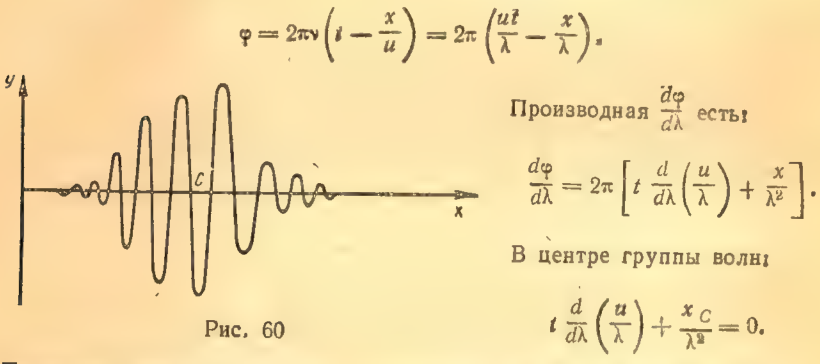


Рис. 60

Производная $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ есть:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 2\pi\left[t\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \frac{x}{\lambda^2}\right].$$

В центре группы волн:

$$t\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \frac{x_C}{\lambda^2} = 0.$$

Последнее равенство связывает координату центра группы волн x_C с временем t. Перепишем это равенство в виде:

$$x_C = -\lambda^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right)t = vt,$$

где все выражение, стоящее множителем при t, представляет собой скорость перемещения центра группы волн в пространстве или так называемую групповую скорость

$$v = -\lambda^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right).$$

Выполнив дифференцирование, получим связь между групповой скоростью v и фазовой скоростью u:

$$v = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}.$$

Очевидно, если фазовая скорость u не зависит от длины волны λ (или частоты ν), то обе скорости совпадают, так как $\frac{du}{d\lambda} = 0$. В этом случае говорят об отсутствии дисперсии волн. Это справедливо, например, для звуковых волн.

Если $\frac{du}{d\lambda} \neq 0$, имеется дисперсия. Например, для волн на море зависимость фазовой скорости u от длины волны имеет вид:

$$u = k\lambda^{1/2}.$$

Поэтому групповая скорость

$$v = u - \lambda \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} = k\lambda^{1/2} - \frac{1}{2} k\lambda^{1/2} = \frac{1}{2} u.$$

Таким образом, группа волн на море распространяется вдвое медленнее, чем каждая из волн в отдельности.

Групповая и фазовая скорости электромагнитных волн, распространяющихся в веществе (см. «Дисперсия света»), имеют различную величину.

§ 54. Волны в упругих средах

Для того, чтобы изучить распространение продольных волн в твердом теле, рассмотрим стержень сечения S, на конец которого в течение короткого промежутка времени действовала сила. Это привело к тому, что торец переместится на расстояние Δl, а затем возникшая деформация будет перемещаться вдоль стержня. Иными словами, вдоль стержня будет распространяться волновой импульс сжатия или растяжения. За время Δt при скорости распространения волны v сжатие или растяжение распространится на отрезок стержня $l = v \cdot \Delta t$. Каждая из точек этого отрезка будет перемещаться со скоростью

$$u = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

По второму закону динамики импульс силы, действовавшей на торец, $F\Delta t$, равен изменению количества движения стержня. Если обозначить плотность стержня ρ, то масса, пришедшая в движение, найдется как произведение плотности и объема $V = Sl$, а изменение количества движения стержня определится как произведение массы на скорость:

$$F\Delta t = \rho Sl \cdot u.$$

Разделив обе части этого равенства на $S\Delta t$, получим: $\frac{F}{S} = \rho \frac{lu}{\Delta t}$. Умножив числитель и знаменатель правой части последнего соотношения на l, можно записать:

$$\frac{F}{S} = \rho \frac{l^2}{\Delta t^2} \cdot \frac{\Delta l}{l}.$$

Отношение силы F к площади S, на которую она действует, называется напряжением. По закону Гука напряжение прямо пропорционально относительному удлинению $\frac{\Delta l}{l}$, т. е. $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$.

Коэффициент пропорциональности E, равный напряжению, которое вызвало бы увеличение длины вдвое, называется модулем упругости или модулем Юнга.

Заменяя отношение $\frac{F/S}{\Delta l/l}$ модулем Юнга E и замечая, что $\frac{l}{\Delta t}$ есть скорость v распространения волны, получим:

$$\frac{E}{\rho} = \left(\frac{l}{\Delta t}\right)^2 = v^2.$$

Скорость волны сжатия в упругом твердом теле равна

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

В случае поперечной волны в твердом теле модуль упругости E в указанной формуле следует заменить модулем сдвига G:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Так как $E > G$, то продольные волны распространяются в твердом теле быстрее, чем поперечные. При землетрясениях или мощных ядерных взрывах в земной коре от места землетрясения или взрыва распространяются, так называемые, сейсмические волны деформации. Приборы сейсмографы воспринимают их, причем продольные волны достигают сейсмической станции раньше, чем поперечные. Промежуток времени между приходом тех и других волн позволяет судить о расстоянии до эпицентра явления, вызвавшего сейсмические волны.

В жидкости возможны лишь продольные волны, скорость распространения которых:

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

где k — модуль сжатия, ρ — плотность жидкости.

При распространении продольных волн упругости в газах относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l}$ равно относительному изменению объема $\frac{\Delta V}{V}$, а напряжение $\frac{F}{S}$ есть уменьшение давления $(-\Delta p)$, вызвавшее изменение объема. Поэтому модуль упругости для газа равен отношению уменьшения давления $(-\Delta p)$ к относительному изменению объема $\frac{\Delta V}{V}$:

$$-\frac{\Delta p}{\Delta V} \cdot V.$$

Для того, чтобы связать плотность ρ с объемом газа, поскольку в выражение для скорости распространения волны входит плотность газа, удобно под объемом газа, принимаемым в рассмотрение условиться понимать объем, занимаемый единицей массы газа — удельный объем. Очевидно, плотность и удельный объем — обратные величины, т. е.

$$V_0 = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \frac{1}{V_0}.$$

Скорость распространения волны в газе:

$$v = \sqrt{-V_0^2 \cdot \frac{dp}{dV}}.$$

Для определения производной, входящей в последнее равенство, учитывая, что чередования сжатий и разряжений в газе происходят весьма быстро и, следовательно, адиабатно, можно воспользоваться уравнением Пуассона, связывающим объем и давление для адиабатического процесса в газе:

$$pV^{\gamma} = \text{const}.$$

О

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Объем V, давление p и температура T массы газа m связаны уравнением Клапейрона — Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где μ — молекулярный вес газа.

Поскольку рассуждение проводится для единицы массы газа, то давление

$$p = \frac{RT}{V_0 \mu}.$$

Используя это выражение давления и раскрывая выражение производной $\frac{dp}{dV}$, получим скорость звуковой волны в газе:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

Равномерно темперированная шкала (частоты)

C′ (*до* 1-й октавы)	261,63	G (*соль*)	392,00
C # (*до*-диез)	277,18	G # (*соль*-диез)	415,31
D (*ре*)	293,67	A (*ля*)	440
D # (*ре*-диез)	311,13	A # (*ля*-диез)	466,16
E (*ми*)	329,63	H (*си*)	493,88
F (*фа*)	349,23	C″ (*до* 2-й октавы)	523,25
F # (*фа*-диез)	369,99		

Все частоты даны в герцах.

Скорость звука в веществе (*м/сек*)

Твердые вещества (при 20° С)

Алюминий	5100	Серебро	2600
Латунь	3400	Цинк	3700
Медь	3600	Кирпич	3700
Железо	5000	Шифер	4500
Сталь	5100	Стекло	5000
Никель	4900	Дерево	3000—4000
Платина	2700		

Жидкости (при 20° С)

Спирт	1210
Вода	1457; зависимость от t (0 ÷ 25° С) : $1390 + 3,3t$

Газы (при норм. усл.)

Воздух (сухой)	331,36; зависимость от t : $331,36 + 0,54\,t$
Двуокись углерода	259
Светильный газ	490—500
Водород	1262
Кислород	316

Человеческое ухо воспринимает акустические колебания в воздухе в интервале частот от 20 до 20 000 *гц*. Акустические волны частот меньших 20 *гц*, называются **инфразвуком**. Волны с частотами от 20 000 *гц* и выше (в настоящее время используются частоты до 300 *Мгц*) называются **ультразвуками**. Волна, лежащая в звуковом интервале частот, воспринимается ухом как звук лишь, если сила звука превышает минимальное значение, называемое **порогом слышимости**. Звуки очень большой

силы (порядка $10^5 \frac{эрг}{см^2 сек}$) вызывают уже лишь болевое ощущение (порог болевого ощущения). На рис. 61 представлена область частот и сил звука, воспринимаемых ухом (область слышимости).

Интенсивности звука соответствует ощущение громкости звука, которая возрастает значительно медленнее, чем увеличивается сила звука, подчиняясь закону Вебера — Фехнера: прирост ощущения пропорционален логарифму отношения энергий сравниваемых раздражений. Величина, оценивающая громкость звука — уровень звука L — определяется соотношением:

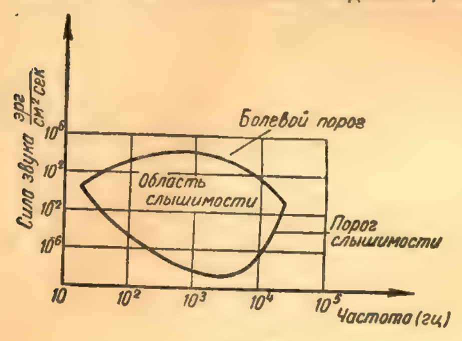


Рис. 61

$$L = k \lg \frac{I}{I_0},$$

где I — сила звука, I_0 — сила этого же звука на пороге слышимости, k — коэффициент пропорциональности. Если k равно единице, уровень звука выражается в б е л а х (*бл*), если k равно 10, уровень звука, очевидно, выразится в д е ц и б е л а х (*дбл*). Эта единица удобна, так как минимальный прирост громкости, воспринимаемый ухом, примерно равен децибелу.

Уровни различных звуков

Звук	Уровень децибел	Сила звука $\frac{эрг}{см^2 сек}$	Эффективное давление $\frac{дин}{см^2}$
Нижний предел чувствительности человеческого уха	0	10^{-9}	0,0002
Шепот, шорох листьев	10	10^{-8}	0,00065
Тихий сад	20	10^{-7}	0,002
Скрипка пианиссимо	30	10^{-6}	0,0065
Шаги, тихая музыка	40	10^{-5}	0,02
Шум в ресторане	50	10^{-4}	0,065
Разговор, шум в магазине	60	10^{-3}	0,2
Громкая речь, шум автомобиля . .	70	10^{-2}	0,645
Машинописное бюро	80	10^{-1}	2,04
Шумная улица, гудок автомобиля .	90	1	6,45
Фортиссимо оркестра, сирена . . .	100	10	20,4
Пневматический молот	110	10^2	64,5
Реактивный двигатель, гром	120	10^3	204
Болевой порог	130	10^4	645

Частоте гармонических звуковых колебаний соответствует ощущение высоты звука. Помимо основной частоты, в сложном колебании присутствует ряд частот, кратных основной, — обертонов. Наличие в звуке отличных от нуля амплитуд колебаний с частотами, кратными основной, определяет окраску или т е м б р з в у к а.

§ 55. Ударная волна

При взрывах, детонации топлива, при полете снаряда или самолета со сверхзвуковой скоростью возникают ударные волны. Ударная волна представляет собой поверхность, на которой плотность и давление, а также температура и скорость воздуха скачкообразно изменяют свою величину.

За фронтом ударной волны перемещается зона сжатия, т. е. слой воздуха, в котором давление превышает атмосферное. За зоной сжатия следует зона разряжения, где давление ниже атмосферного. График зависимости давления в ударной волне представлен на рис. 62.

Чтобы определить скорость распространения фронта ударной волны $v_{\text{волн}}$, а также скорость слоя сжатого воздуха, перемещающегося за фронтом ударной волны $v_{\text{возд}}$, применяются законы сохранения массы и количества движения.

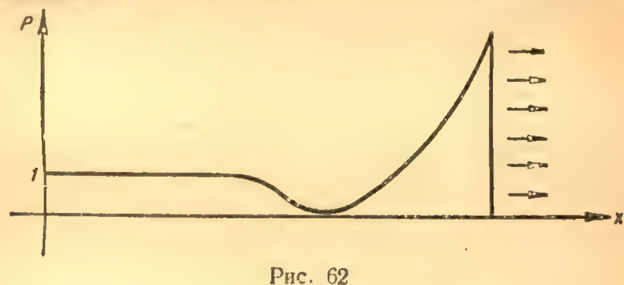


Рис. 62

Рассмотрим участок фронта ударной волны с площадью S в первый момент времени, занимающий положение AA'. Через промежуток времени dt новое положение продвинувшегося вперед фронта назовем BB'. Давление перед фронтом волны обозначим p_0, а плотность воздуха ρ_0. За фронтом ударной волны давление и плотность воздуха изменяются скачком, принимая соответственно значения p и ρ.

За промежуток времени dt через поверхность фронта AA' со скоростью $v_{\text{возд}}$ переходит масса воздуха $(\rho - \rho_0)\,S dx$ с плотностью ρ. Вследствие этого масса воздуха, заключенного между поверхностями AA' и BB', увеличивается.

По закону сохранения массы:

$$(\rho - \rho_0)\,S\,dx = \rho\,S v_{\text{возд}}\,dt,$$

но $\frac{dx}{dt}$ есть скорость перемещения фронта волны. Отсюда

$$v_{\text{волн}} = \frac{\rho}{\rho - \rho_0}\,v_{\text{возд}}\,.$$

Вследствие наличия скачка давления Δp на фронте ударной волны в направлении распространения волны действует сила $(p - p_0)\,S$, импульс которой за время dt равен $(p - p_0)\,Sdt$. Под действием этой силы газ в слое dx между поверхностями AA' и BB', ранее неподвижный, приобретает скорость $v_{\text{возд}}$ и количество движения $v_{\text{возд}}\cdot\rho_0 Sdx$. По второму закону динамики импульс силы равен изменению количества движения:

$$v_{\text{возд}}\,\rho_0\,S\,dx = (p - p_0)\,S\,dt,$$

$$v_{\text{волн}} = \frac{p - p_0}{\rho_0}\,\frac{1}{v_{\text{возд}}}\,.$$

Исключая из последних равенств попеременно $v_{возд}$ и $v_{волн}$, получим для скорости фронта ударной волны и скорости слоя сжатого воздуха:

$$v_{волн} = \sqrt{\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} \cdot \frac{\rho}{\rho_0}},$$

$$v_{возд} = \sqrt{\frac{p - p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho}}.$$

Так как множитель $\frac{\rho}{\rho - \rho_0}$, очевидно, больше единицы, то скорость фронта волны всегда больше скорости перемещения сжатого воздуха в ударной волне.

Заменив выражение плотности через удельный объем газа $\rho = \frac{1}{V_0}$; $d\rho = -\frac{dV_0}{V_0^2}$, получим для скорости фронта волны:

$$v_{волн} = \sqrt{-\frac{\Delta p}{\Delta V_0} V_0^2}.$$

Последнее равенство позволяет судить, какие изменения происходят с ударной волной по мере ее распространения. При этом скачок давления все уменьшается и наконец становится бесконечно малым dp. Становится бесконечно малым и изменение удельного объема dV. А тогда последнее равенство переходит в выражение для скорости звуковой волны в воздухе.

§ 56. Явление Допплера в акустике

Явлением Допплера называется изменение частоты волн, воспринимаемых наблюдателем либо вследствие своего перемещения относительно среды, в которой распространяются волны, либо вследствие перемещения источника волн относительно среды, в которой распространяются волны, либо вследствие одновременного перемещения наблюдателя и источника волн.

Если скорость распространения волн в среде равна v, наблюдатель неподвижен, а источник движется со скоростью $u_{ист}$, то длина волны, воспринимаемая наблюдателем λ:

$$\lambda = \lambda_0 \mp \frac{u_{ист}}{\nu_0},$$

где $\lambda_0 = \frac{v}{\nu_0}$ — длина волны в случае неподвижного по отношению к ней источника колебаний частоты ν_0. Знак минус или плюс берется в зависимости от того, является ли скорость $u_{ист}$ скоростью приближения или скоростью удаления источника от наблюдателя.

Таким образом, длина волны в направлении движения источника уменьшается, а в направлении, противоположном движению источника — увеличивается Это связано с тем обстоятельством, что движущийся источник нагоняет испускаемые им в направлении его движения волны и уходит от волн, испускаемых им в направлении, противоположном его движению.

Если источник волн неподвижен относительно среды, а наблюдатель движется по отношению к источнику со скоростью $u_{наб}$, то наблюдаемая им частота

$$\nu = \nu_0 \frac{v \pm v_{наб}}{v},$$

причем знак плюс берется в случае приближения наблюдателя к источнику, а знак минус — в случае удаления наблюдателя от источника.

В общем случае движения источника волн и наблюдателя наблюдаемая частота:

$$\nu = \nu_0 \frac{v \pm v_{наб}}{v \mp u_{ист}},$$

где $u_{наб}$ — скорость наблюдателя в направлении источника по отношению к среде, $u_{ист}$ — скорость источника в направлении наблюдателя по отношению к среде, v — скорость волн в среде. Верхний знак берется, когда при движении источник и наблюдатель сближаются, нижний — когда они удаляются друг от друга.

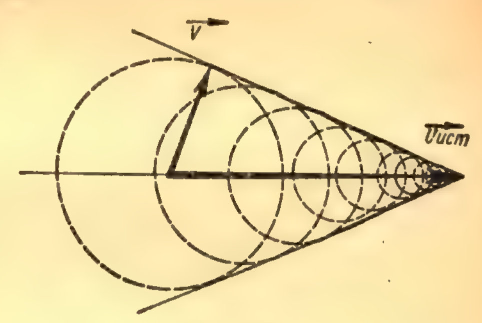


Рис. 63

Движение источника волн со скоростью, превышающей скорость волн в среде. Если тело, порождающее волны в среде, движется со скоростью $v_{ист}$, превышающей скорость волн v в среде, то порождаемые телом возмущения среды вдоль его траектории остаются позади тела и, распространяясь от мест своего возникновения, образуют волну, фронт которой имеет форму конической поверхности с вершиной в точке, где находится тело. Угол при вершине конуса зависит от соотношения $u_{ист}$ и v, как это следует из рис. 63, и равен:

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_{ист}}.$$

Весьма наглядным примером подобной волны является носовая волна, распространяющаяся по поверхности воды от носа судна при его движении со скоростью, превышающей скорость волн на поверхности воды. Аналогично при движении снаряда, ракеты или самолета в воздухе со сверхзвуковой скоростью ($> 332\ \frac{м}{сек}$) возникает косой скачок уплотнения, ударная волна, фронт которой представляет собой коническую поверхность.

Поскольку $\sin\alpha < 1$ и $v < v_{ист}$, подобное излучение существует лишь в том случае, если скорость тела превосходит скорость волн в среде.

Сходное излучение электромагнитных волн электроном, движущимся в среде со скоростью, превышающей скорость света в этой среде, было открыто П. А. Черенковым (см. «Атомная физика»).

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

Молекулярная физика, термодинамика и статистика

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 1. Атомно-молекулярное строение вещества

Атомистические представления о строении вещества зародились в период расцвета древних культур Китая, Индии, Греции, Рима. Древнегреческие философы Анаксагор и Демокрит учили, что вещества состоят из мельчайших неделимых частиц — атомов (атом — по гречески «неделимый»).

Развитие химии показало, что разнообразие веществ природы объясняется не в такой мере разнообразием сортов атомов (таких разновидностей — элементов известно в природе 88 и к 1961 г. еще 15 получено искусственно: № 43, 61, 85, 87 и 93—103), как многообразием различных соединений этого небольшого числа различных сортов атомов между собой в молекулы — мельчайшие частицы данного химического вещества.

На правильность атомно-молекулярной картины строения вещества указывают:

1. Закон кратных отношений Джона Дальтона (1766 — 1844) в химии. *Массы реагирующих между собой веществ не произвольны, а находятся в некоторых постоянных (кратных) отношениях.*

2. Закон Авогадро, сформулированный в 1811 г. Амедео Авогадро (1776—1856), утверждающий, что в *равных объемах при одинаковой температуре и давлении все газы содержат одинаковое число молекул.* В частности, грамм-молекула газа или коротко моль, т. е. масса газа в граммах, численно равная его молекулярному весу, при нормальных условиях (давление 1 *ат* и температура 0° С) занимает объем 22,41 *л*.

3. Явления переноса — диффузия, внутреннее трение в жидкости или газе и теплопроводность.

4. Движение мельчайших твердых частиц, взвешенных в жидкости или газе — броуновское движение, объясняемое ударами, которые испытывает броуновская частица со стороны молекул.

5. Давление газа на стенки сосуда, объясняемое ударами молекул газа о стенки.

6. В настоящее время наиболее крупные молекулы наблюдаются на экране электронного микропроектора.

§ 2. Основные положения молекулярно-кинетической теории

1. Все тела состоят из атомов и молекул.

2. Атомы и молекулы находятся в непрерывном движении.

Хаотическое движение молекул газов и жидкостей и колебательное — твердых тел называется тепловым движением. Объяснение природы теплоты на основе представлений о движении молекул было впервые дано Михаилом Васильевичем Ломоносовым.

3. Свойства макроскопических тел объясняются взаимодействием молекул, из которых они состоят.

Тепловое движение молекул характеризуется средней кинетической энергией одной молекулы $w_{кин}$, а взаимодействие между молекулами — потенциальной энергией молекулы $w_{пот}$. Однако для газов, особенно при малых давлениях газа, в силу больших расстояний между молекулами можно пренебречь $w_{пот}$. Очевидно, при этом предположении для всех достаточно разреженных газов должны обнаруживаться общие газовые законы. К параметрам состояния газа относятся его объем V, давление p, температура T и масса m.

§ 3. Температура. Теплота

Измерение температуры основано на расширении тел при нагревании.

В температурной шкале, предложенной Андерсом Цельсием (1701—1744), за опорные точки принимаются температуры замерзания и кипения воды при нормальном атмосферном давлении. Участок шкалы температур между этими точками делится на 100 равных частей. Температура замерзания воды принимается в шкале Цельсия за нуль градусов. Сотая часть интервала между точками замерзания и кипения воды называется градусом (*град*) и обозначается 1° С.

Абсолютная шкала температуры, введенная Вильямом Томсоном (лордом Кельвином) (1824—1907), связана со шкалой Цельсия равенством:

$$T^\circ = t^\circ + 273{,}16^\circ.$$

Нуль шкалы абсолютной температуры по Кельвину T° К = 0 соответствует температуре $t^\circ = -273{,}16^\circ$ С и называется абсолютным нулем температуры. Это температура, при которой прекращается хаотическое тепловое движение молекул идеального газа.

Фактически реальный газ при понижении температуры превратится в твердое тело при температуре, большей чем абсолютный нуль температуры. Квантовая теория твердого тела показывает, что у молекул имеется так называемая нулевая энергия колебаний, которая не исчезает и при абсолютном нуле температуры. Однако поскольку следующий за нулевым энергетический уровень энергии колебаний молекул весьма высок, наличие энергии колебаний молекул приходится учитывать лишь при очень высоких температурах. При низких и средних температурах колебания молекул хотя и имеются, но их энергия не зависит от температуры. Следовательно, эти колебания не вносят вклада в теплоемкость тел.

Наиболее употребительны четыре температурные шкалы: Цельсия (С), Кельвина (К), Фаренгейта (F) и Реомюра (R).

За нуль температуры в шкале Фаренгейта принимается температура таяния смеси снега и нашатыря, равная —32° по шкале Цельсия. Градусом в шкале Фаренгейта является 0,01 температурного интервала между температурой таяния смеси снега и нашатыря и нормальной температурой человеческого тела. По шкале Фаренгейта температура таяния льда (0° С) оказывается равной + 32°, а температура кипения воды при нормальном давлении +212°, таким образом, интервал от таяния снега до кипения воды оценивается в шкале Фаренгейта в 180° F.

За нуль температуры в шкале Реомюра принимается температура таяния снега или льда, как и в шкале Цельсия, но за градус принимается $\frac{1}{80}$ температурного интервала между температурой таяния снега и температурой кипения воды при нормальном давлении, таким образом, интервал от таяния снега до кипения воды оценивается в шкале Реомюра в 80° *R*.

Выражение для перевода температуры из одной температурной шкалы в другую имеет вид:

$$\frac{t^\circ C}{5} = \frac{T^\circ K - 273,16^\circ}{5} = \frac{t^\circ R}{4} = \frac{t^\circ F - 32^\circ}{9}$$

Количество теплоты. Количеством теплоты ΔQ называется количество переданной от одного тела к другому энергии теплового движения молекул посредством теплообмена между этими телами. Вследствие того, что измерение количества теплоты исторически стало производиться раньше, чем была установлена эквивалентность теплоты и работы, единица количества теплоты — калория — не входит в системы механических единиц.

Калория (*кал*) есть количество теплоты, необходимое для нагревания 1 *г* чистой воды от 19,5° С до 20,5° С при нормальном давлении.

Тысяча калорий составляет одну килокалорию (*ккал*).

Теплота. Понятие «теплота» употребляется в нескольких различных значениях. Во-первых, теплотой называется процесс перехода энергии от одного тела к другому посредством теплообмена. Во-вторых, часто самое количество теплоты, переданное таким образом, называется для краткости теплотой. В-третьих, теплотой называется хаотическое движение атомов и молекул, составляющих макроскопически неподвижное тело. В этом смысле говорят о «тепловом движении» молекул.

Наконец, энергия хаотического движения частиц тела называется тепловой энергией. Тепловая энергия складывается из энергии хаотического поступательного движения молекул, из энергии вращения молекул, а также из энергии колебания атомов в молекуле и частиц в твердом теле. Тепловая энергия представляет собой часть внутренней энергии тела (см. стр. 138). Внутренняя энергия тела складывается из энергии хаотического движения (тепловой) и энергии взаимодействия молекул — потенциальной энергии.

Помимо перечисленных значений слово «теплота» употребляется также для обозначения той части потенциальной энергии взаимодействия молекул тела, которая переходит в энергию хаотического движения частиц тела или наоборот при изменении агрегатного состояния или при перестройке его кристаллической решетки. В этом смысле говорят о «скрытой» теплоте плавления, парообразования, возгонки, перекристаллизации и т. п.

§ 4. Опытные газовые законы

Закон Бойля — Мариотта. **Для данной массы газа m при постоянной температуре T произведение давления на объем есть величина постоянная, т. е.**

$$pV = \text{const}.$$

Закон установлен экспериментально в 1662 г. английским физиком Робертом Бойлем (1627—1691) и независимо от него в 1679 г. французским ученым Эдме Мариоттом (1620—1684).

Процесс, происходящий при постоянной температуре, называется изотермическим, а график его — изотермой (рис. 64).

Закон Гей-Люссака. Для данной массы газа при постоянном давлении p объем V линейно зависит от температуры по закону:

$$V_t = V_0(1 + \alpha t^\circ) \quad \text{или} \quad V_T = V_0 \alpha T^\circ,$$

где V_0 — объем газа при нуле градусов Цельсия,
α — коэффициент объемного расширения,
t° — температура по шкале Цельсия,
T° — абсолютная температура, $\alpha \approx \frac{1}{273}$ *град*$^{-1}$.

Указанные зависимости приведены на рис. 58. Закон установлен опытным путем в 1802 г. французским физиком Жозефом Луи Гей-Люссаком (1778—1850).

Процесс в газе, происходящий при постоянном давлении, называется изобарическим, а его график — изобарой (рис. 65).

З а к о н Ш а р л я. Для данной массы газа m при постоянном объеме давление линейно зависит от температуры по закону:

$$p_t = p_0(1 + \beta t^\circ), \quad \text{или} \quad p_T = p_0 \beta T^\circ,$$

где p_0 — давление газа при 0° С,

β — термический коэффициент давления, $\beta \approx \frac{1}{273}$ *град*$^{-1}$.

Процесс, происходящий при постоянном объеме, называется изохорическим, а график его — изохорой (рис. 66).

О б ъ е д и н е н н ы й г а з о в ы й з а к о н. Для данной массы газа произведение давления на объем, отнесенное к абсолютной температуре, есть величина постоянная:

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \quad \text{при} \quad m = \text{const}.$$

Закон объединяет в себе три опытных газовых закона.

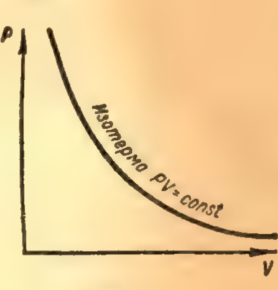


Рис. 64

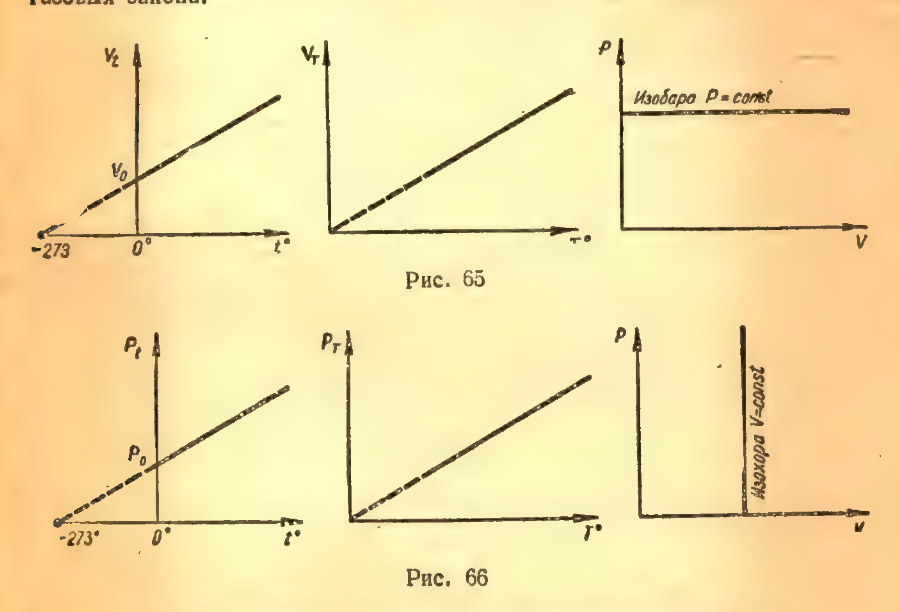


Рис. 65

Рис. 66

§ 5. Уравнение газового состояния идеального газа

Уравнением состояния газа называется соотношение, связывающее четыре параметра газового состояния: давление p, объем V, температуру T и массу m.

Постоянная в объединенном газовом законе зависит от выбранной массы газа, а при фиксированной массе (например, 1 *г*) — от природы газа. Однако, если взять 1 моль любого газа, то поскольку грамм-молекула любого газа содержит одно и то же число молекул — число Авогадро, постоянная будет иметь одно и то же значение для всех газов.

Отношение $\frac{pV}{T}$, вычисленное для одного моля газа, называется универсальной газовой постоянной R.

$$R = \frac{1\,ат \cdot 22{,}41\,\frac{л}{моль}}{273^\circ\,K} = 0{,}082\,\frac{л \cdot ат}{град \cdot моль} =$$

$$= 8{,}31 \cdot 10^7\,\frac{эрг}{град \cdot моль} = 8{,}31\,\frac{дж}{град \cdot моль} \simeq$$

$$\simeq 1{,}9856\,\frac{кал}{град \cdot моль} \simeq 2\,\frac{кал}{град \cdot моль}.$$

Уравнение Клапейрона

$$pV = RT$$

справедливо для одного моля газа.

Уравнение Клапейрона — Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

справедливо для любого числа $n = \frac{m}{\mu}$ молей газа,

где m — взятая масса,

а μ — молекулярный вес газа.

Идеальный газ. Газ, подчиняющийся уравнению Клапейрона — Менделеева, называется идеальным газом. Реальные газы обнаруживают отступления от этого уравнения при температурах, меньших и сравнимых с критической и при больших давлениях. Из реальных газов приближается к свойствам идеального газа водород, гелий и др.

§ 6. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газа

Основным уравнением молекулярно-кинетической теории газа или уравнением Рудольфа Клаузиуса (1822—1888) называется уравнение, устанавливающее связь между давлением, объемом и энергией газа:

$$p = \frac{1}{3} m \frac{N}{V} \overline{u}^2,$$

где N — число молекул газа в сосуде,

m — масса одной молекулы,

$\overline{u}$ — среднеквадратичная скорость молекулы:

$$\overline{u}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N} v_k^2}{N},$$

т. е. арифметическое значение корня квадратного из величины среднего квадрата молекулярных скоростей v_k.

Основное уравнение можно записать в виде:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m\bar{u}^2}{2}, \text{ или } pV = \frac{2}{3} W_{кин}.$$

Таким образом, произведение давления газа на его объем равно $\frac{2}{3}$ кинетической энергии хаотического поступательного движения молекул газа.

Кинетическая энергия поступательного движения всех молекул в моле газа равна:

$$W_{кин} = \frac{3}{2} RT,$$

как это следует из сопоставления предыдущего равенства с уравнением Клапейрона.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы:

$$W_{кин.\,пост} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} T,$$

где N_0 — число Авогадро.

Отношение универсальной газовой постоянной R к числу Авогадро называется постоянной Больцмана k:

$$k = \frac{R}{N_0} = \frac{8,31 \frac{эрг}{град \cdot моль}}{6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{моль}} = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{эрг}{град}.$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы:

$$W_{кин.\,пост} = \frac{3}{2} kT.$$

Абсолютная температура, как видно из последнего равенства, есть мера интенсивности теплового движения молекул, мера средней кинетической энергии движения молекул.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории приводится к виду:

$$p = nkT,$$

где $n = \frac{N}{V}$ — концентрация молекул.

Среднеквадратичная скорость молекул из сопоставления основного уравнения молекулярно-кинетической теории газа и уравнения Клапейрона определяется в виде:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где $\mu = mN_0$ — молекулярный вес газа.

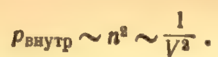
§ 7. Уравнения состояния реальных газов

Свойства реальных газов описываются уравнениями состояния более сложного вида, чем уравнение Клапейрона — Менделеева.

Уравнение Ван-дер-Ваальса качественно хорошо описывает газообразное и жидкое состояния. Это уравнение для одного моля имеет вид:

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT,$$

где a и b — постоянные, поправка к давлению $\frac{a}{V^2}$ учитывает силы взаимодействия между молекулами реальных газов. Внутреннее давление на единицу площади, вызываемое этими силами пропорционально концентрациям молекул газа с обеих сторон от выделенной в газе площадки, а эти концентрации обратно пропорциональны объему газа, поэтому,



$$p_{внутр} \sim n^2 \sim \frac{1}{V^2}.$$

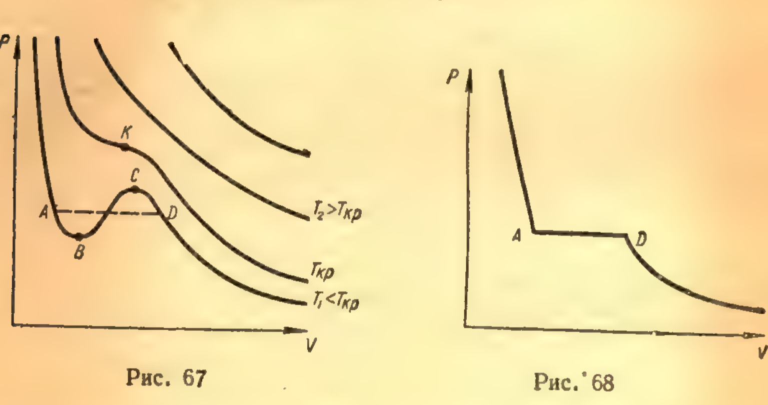


Рис. 67 Рис. 68

Поправка к объему b—есть объем наиплотнейшей упаковки молекул. Изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса приведены на рис. 67. Участок AB соответствует растянутой жидкости, участок CD — пересыщенному пару. При $T = T_{крит}$ изотерма имеет точку перегиба K. При температурах, больших $T_{крит}$, изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса приближаются к изотермам идеального газа.

Реальная изотерма, полученная при исследовании углекислого газа Эндрюсом, приводится на рис. 68.

Уравнение Бертло представляет собой видоизменение уравнения Ван-дер-Ваальса и для одного моля имеет вид:

$$\left(p+\frac{a'}{TV^2}\right)(V-b)=RT.$$

Оно хорошо согласуется с опытными данными при давлениях ниже 5—6 *атм* и температурах выше критической, а также при низких температурах и малых давлениях.

Постоянные a', b и R выражаются через значения критических параметров состояния:

$$a' = 3p_{крит} \cdot V_{крит}^2, \quad b = \frac{1}{3} V_{крит},$$

$$R = \frac{8p_{крит} \cdot V_{крит}}{3T_{крит}}.$$

Уравнение Клаузиуса предполагает более сложную зависимость внутреннего давления от объема газа:

$$\left(p+\frac{a}{T\,(V+c)^2}\right)(V-b)=RT.$$

Значения постоянных a, b, c и R связаны со значениями параметров состояния в критической точке:

$$p_{\text{крит}}=\frac{RT_{\text{крит}}}{8\,(b+c)},\quad V_{\text{крит}}=3b+2c,\quad T_{\text{крит}}=\sqrt{\frac{8a}{27R\,(b+c)}}.$$

Одну из этих постоянных (обычно c) задают произвольно или определяют из дополнительных условий.

Приведенные уравнения состояния. Приведенными *параметрами* π, φ, τ называются переменные:

$$\pi=\frac{p}{p_{\text{крит}}},\quad \varphi=\frac{V}{V_{\text{крит}}},\quad \tau=\frac{T}{T_{\text{крит}}}.$$

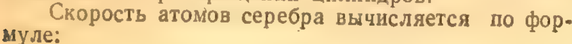
Уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенных переменных:

$$\left(\pi+\frac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi-1)=8\tau$$

не содержит постоянных a и b. В нем исключены индивидуальные свойства того или иного вещества. Уравнение в приведенных переменных одинаково справедливо для всех веществ, описываемых уравнением Ван-дер-Ваальса.

§ 8. Опыт Штерна по определению скоростей молекул газа

В 1932 г. Отто Штерн опытным путем определил молекулярные скорости. В его опыте (см. рис. 69) два коаксиальных цилиндра вращаются с одинаковой угловой скоростью ω. С натянутой по оси цилиндров платиновой проволочки, покрытой слоем серебра, при нагревании ее электрическим током атомы серебра через щель вдоль внутреннего цилиндра попадают на внутреннюю стенку внешнего цилиндра. За то время, в течение которого атомы пролетают расстояние между цилиндрами l, цилиндры поворачиваются на угол $\varphi=\omega t$. Очевидно, $l=vt$, где v — скорость молекулы. Угол φ измеряется как угол между направлениями на след, оставленный атомами на стенке внешнего цилиндра, когда система неподвижна, и на след, остающийся при вращении цилиндров.



Скорость атомов серебра вычисляется по формуле:

$$v=\frac{\omega l}{\varphi}.$$

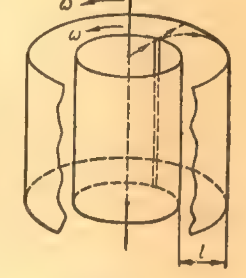


Рис. 69

§ 9. Распределение молекул по скоростям

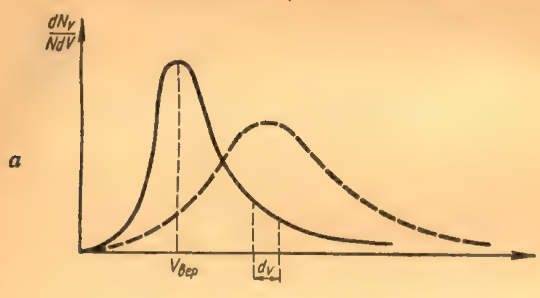
Вследствие того, что отдельные атомы серебра в опыте Штерна имеют различные скорости, полоска на стенке внешнего цилиндра оказывается несколько размазанной, причем толщина налета серебра соответствует распределению числа молекул по скоростям.

Относительное число молекул газа $\frac{dN_v}{N}$, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, является функцией v, так как наличие большего или

меньшего числа таких молекул зависит от того, вблизи какого значения скорости выбран интервал.

Функция распределения молекул по скоростям $\frac{dN_v}{Ndv}$ (рис. 70) была получена в 1860 г. Джемсом Клерком Максвеллом и имеет вид:

$$\frac{dN_v}{Ndv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$





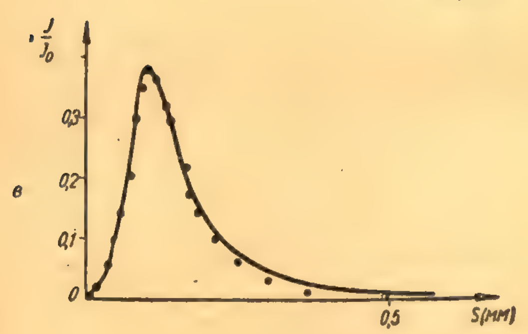


Рис. 70

Функция убывает до нуля при $v \to \infty$ и $v \to 0$, поэтому относительное число молекул, скорости которых очень велики или очень малы, ничтожно.

Наивероятнейшая скорость молекул определяется значением скорости, для которого распределение имеет максимум. Эта скорость равна

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

При возрастании температуры максимум кривой распределения сдвигается вправо (рис. 70, *а*). В результате взаимодействия между молекулами, как

показал Людвиг Больцман, при любом исходном распределении скоростей в конце концов весьма быстро устанавливается максвелловское распределение молекул по скоростям.

Справедливость максвелловского распределения весьма точно была проверена экспериментально Истерманом, Симпсоном и Штерном в опыте, где измерялось отклонение пучка атомов цезия, пропускаемого через узкие горизонтальные щели, в гравитационном поле Земли (рис. 70, *б*). Отклонение S, обусловленное полем тяжести, пропорционально $\frac{1}{v^2}$. На рис. 70, *в* приведено распределение интенсивности I по поперечному сечению пучка. Экспериментальные точки и расчетная кривая показывают хорошее совпадение.

§ 10. Барометрическая формула

Зависимость атмосферного давления p от высоты z (рис. 71) описывается барометрической формулой:

$$p(z) = p_0 \cdot e^{\frac{-mgz}{kT}},$$

где $p(z)$ — давление на высоте z,
p_0 — атмосферное давление на поверхности Земли,
m — масса молекулы,
g — ускорение свободного падения и
k — постоянная Больцмана.

Применение распределения Больцмана к случаю атмосферы Земли верно лишь приближенно. Опыты со Спутниками Земли, проводимые в СССР, показали, что плотность атмосферы на больших высотах оказывается значительнее, чем это следует из барометрической формулы. Для реальной атмосферы имеет место неоднородность состава и неодинаковость температуры на разных высотах.

§ 11. Эффект Джоуля — Томсона

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры (см. стр. 141). Зависимость внутренней энергии реального газа от объема и давления была выяснена Джоулем и Томсоном (лорд Кельвин) путем расширения газа в вакуум. В этом опыте газ из одного сосуда через вентиль расширялся в другой сосуд, в котором предварительно создавался вакуум. Исследовалось изменение температуры газа.

Эффектом Джоуля — Томсона называется изменение температуры реального газа при расширении. В случае, если газ охлаждается, эффект считается положительным, если газ нагревается — отрицательным.

Расширение газа без совершения им работы и подвода или отнятия тепла происходит при постоянной энергии, однако, изменение потенциальной энергии взаимодействия молекул реального газа при изменении расстояний между ними приводит к изменению и кинетической энергии хаотического теплового движения молекул, т. е. к изменению температуры газа. Расширение газа без изменения количества теплоты происходит при постоянной энтальпии I.

Величина

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p}$$

определяет дифференциальный эффект Джоуля — Томсона, показывая, насколько изменится температура газа при изменении давления на единицу.

Для идеального газа:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I = 0.$$

Для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{C_p}.$$

Точкой инверсии $T_{\text{инв}}$ называется температура, при которой эффект меняет свой знак, $T_{\text{инв}} = \frac{2a}{Rb}$.

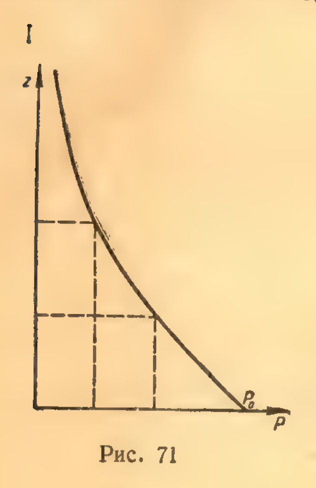


Рис. 71

Температуры инверсии при $p = 1$ *ат*

Газ	$t_{\text{ин}}$ °C
Гелий	—239
Водород	— 57
Азот	592
Кислород	763
Углекислый газ .	1 777

Точка инверсии гелия и водорода ниже комнатной температуры. Для этих газов наблюдается повышение температуры. Для азота, кислорода и углекислого газа наблюдается понижение температуры. Следует учитывать, что в последнем равенстве теплоемкость отрицательна.

§ 12. Сжижение газов

Эффект Джоуля — Томсона используется для осуществления сжижения воздуха в машине Линде (Карл Пауль Линде, 1842—1934). Воздух в машине Линде сжимается компрессором до давления порядка 200 *ат*, охлаждается и выпускается в резервуар низкого давления. При этом его температура падает на величину, определяемую интегральным эффектом Джоуля — Томсона:

$$T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I dp.$$

Эта порция воздуха используется для предварительного охлаждения перед расширением следующей порции воздуха, температура которой в конце расширения оказывается более низкой, чем у первой порции. Через несколько часов после пуска установки температура очередной

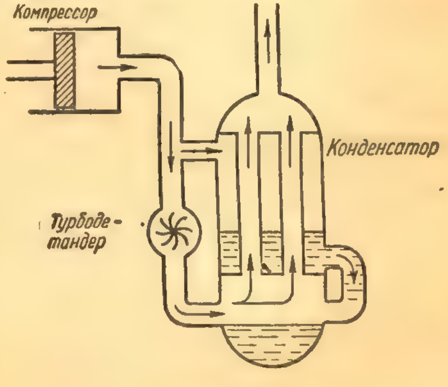


Рис. 72

порции воздуха понижается настолько, что он частично превращается в жидкость.

Турбодетандер П. Л. Капицы использует для сжижения воздуха путь охлаждения воздуха при совершении им внешней работы. Сжатый компрессором до давления 5—6 *ат* воздух частично поступает в конденсатор, а в большей части вращает лопатки турбины, понижает при этом давление и температуру и затем поступает в конденсатор, где его используют для сжижения, поступившего в конденсатор непосредственно сжатого воздуха, поскольку при температуре межтрубного пространства конденсатора давление насыщенных паров воздуха меньше пяти атмосфер. При перетекании жидкого воздуха в конденсатор давление над ним уменьшается, часть жидкого воздуха испаряется, а оставшаяся часть за счет отнятия от нее скрытой теплоты испарения охлаждается до температуры, при которой давление насыщенных паров воздуха не превышает 1 *ат*.

Схема процесса изображена на рис. 72.

§ 13. Критическое состояние вещества

Изотерма Ван-дер-Ваальса, имеющая точку перегиба *К* (рис. 67), называется критической, а температура, соответствующая ей — критической температурой $T_{кр}$.

В точке *К* исчезает различие между жидким и газообразным состояниями вещества. Эта точка соответствует особому критическому состоянию вещества. Понятие о критической температуре было введено Дмитрием Ивановичем Менделеевым в 1861 г. Критическая температура по Менделееву — это температура, при которой поверхностное натяжение данной жидкости становится равным нулю, а стало быть, исчезает граница между жидкостью и насыщенным паром над ней. При критической температуре переход жидкости в пар осуществляется, минуя двухфазную систему жидкость — насыщенный пар.

При температурах выше критической вещество никакими давлениями не может быть переведено из газообразного в жидкое состояние. Выяснение этого имело большое значение для техники сжижения газов.

Критические постоянные газов

Газ	Крит. давл. *ат*	Крит. т-ра, °C	Крит. плотн., *г/см³*
Азот	33,49	—147,13	0,311
Аммиак	112,3	132,9	0,233
Аргон	47,996	—122,44	0,531
Бром	—	302	—
Водород	12,80	—239,91	0,031
Водяной пар	217,96	374	0,329
Гелий	2,261	—267,91	0,069
Кислород	49,713	—118,82	0,430
Криптон	54,24	— 62,6	—
Ксенон	58,22	16,6	1,154
Метан	45,8	— 82,1	0,162
Неон	26,86	—228,71	0,484
Окись углерода	5	—139	0,303
Углекислый газ	72,72	30,96	0,464
Хлор	76,1	144	0,573

Психрометрическая таблица

(относительные влажности по показаниям сухого и мокрого термометров)

Разность показаний термометров, °С	Показания сухого термометра, °С								
	0	5	10	15	20	25	30	35	40
1	81	87	88	89	90	92	93	93	94
2	64	72	76	80	82	85	86	87	88
3	46	59	66	71	74	77	79	81	82
4	29	45	55	62	66	70	73	75	76
5	13	33	44	53	59	63	67	70	72
6	—	21	34	44	52	57	61	64	66
7	—	9	25	36	45	50	55	59	61
8	—	—	15	28	38	44	50	54	56
9	—	—	6	20	30	38	44	50	52
10	—	—	—	13	24	33	39	44	48

§ 14. Явления переноса

Распространение молекул примеси в жидкости или газе от места их введения при отсутствии макроскопических перемещений в жидкости или газе носит название диффузии.

Возникновение силы трения между двумя слоями жидкости или газа, движущимися с различными скоростями, является проявлением внутреннего трения или вязкости.

Переход энергии от более нагретых областей к более холодным при отсутствии перемешивания жидкости или газа и конвекционных течений в них называется теплопроводностью.

Внутренний механизм этих трех явлений один, — это хаотическое тепловое движение молекул, приводящее к их перемешиванию. Эти явления называются явлениями переноса, так как при диффузии осуществляется перенос вещества примеси, при внутреннем трении — перенос количества движения, а при теплопроводности — перенос количества теплоты.

Длина свободного пробега молекул. Средней длиной свободного пробега молекулы называется среднее расстояние, проходимое молекулой между последовательными столкновениями ее с другими молекулами.

За единицу времени выделенная молекула столкнется со всеми молекулами, центры которых окажутся внутри ломаного цилиндра, радиус которого равен диаметру молекулы d, а длина равна относительной средней скорости молекулы $\bar{u}_{отн}$. Объем этого цилиндра $\bar{u}_{отн} \cdot \pi \cdot d^2$, а число молекул в нем $n\bar{u}_{отн} \cdot \pi \cdot d^2$. Поскольку в каждом столкновении участвуют одновременно две молекулы, полное число столкновений в единице объема за единицу времени $\frac{1}{2} \pi \cdot d^2 \, \bar{u}_{отн} n^2$.

За единицу времени молекула на пути $\bar{u}_{абс}$ испытывает $\pi d^2 \, n\bar{u}_{отн}$ столкновений, поэтому средняя длина свободного пробега:

$$l = \frac{\bar{u}_{абс}}{\pi d^2 \, n\bar{u}_{отн}},$$

или, поскольку $\bar{u}_{отн} = \sqrt{2}\, \bar{u}_{абс}$,

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\, \pi d^2 n}.$$

Диффузия. Если в газе распределена примесь с концентрацией $n(x)$, то при наличии градиента концентрации $\frac{dn}{dx} \neq 0$ хаотическое движение молекул будет способствовать выравниванию концентрации вдоль оси Ox.

Поток молекул примеси через площадку ΔS, нормальную к оси Ox, в положительном направлении:

$$\Delta N_{+} = \frac{1}{6} n_1 \bar{u} \Delta S \Delta t,$$

где n_1 — концентрация примеси от площадки,

Δt — промежуток времени.

Поток молекул примеси через эту же площадку в отрицательном направлении:

$$\Delta N_{-} = \frac{1}{6} n_2 \bar{u} \Delta S \Delta t,$$

где n_2 — концентрация молекул примеси справа от площадки.

Коэффициент $\frac{1}{6}$ в последних равенствах обусловлен хаотичностью движения молекул.

Поскольку выравнивание концентраций происходит в результате соударений молекул, концентрации n_1 и n_2 следует считать определенными на расстояниях в длину свободного пробега l от площадки ΔS.

Поток молекул примеси через единицу площади за единицу времени:

$$I = \frac{\Delta N_{+} - \Delta N_{-}}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\bar{u} = -\frac{1}{3}\bar{u}l\frac{n_1 - n_2}{2l} = -\frac{1}{3}\bar{u}l\frac{\Delta n}{\Delta x}.$$

Произведение $\frac{1}{3}\bar{u}l = D$ называется коэффициентом диффузии.

Поток молекул примеси, диффундирующих через единицу площади за единицу времени, прямо пропорционален градиенту концентрации примеси:

$$I = -D\frac{\Delta n}{\Delta x}.$$

Знак минус показывает, что поток диффузии направлен в сторону уменьшения концентрации примеси.

Внутреннее трение или вязкость. Если один слой газа перемещается относительно другого, т. е. градиент скорости в направлении, нормальном к поверхности слоя, отличен от нуля, то вследствие перехода молекул из одного слоя в другой в хаотическом движении осуществляется перенос количества движения из слоя в слой.

Через выделенную на границе слоев площадку ΔS в одном направлении переносится количество движения:

$$mv_1 \cdot \Delta N_{+} = \frac{1}{6} mv_1 \cdot n\bar{u}\Delta S \cdot \Delta t,$$

где v_1 — скорость направленного перемещения газа в слое, из которого выходят молекулы, на расстоянии длины свободного пробега от выделенной площадки.

В противоположном направлении переносится количество движения:

$$mv_2 \Delta N_{-} = \frac{1}{6} mv_2 n\bar{u}\Delta S \Delta t,$$

где v_2 — скорость направленного перемещения газа на расстоянии дли-

ны свободного пробега по другую сторону от площадки.

Изменение количества движения слоя равно импульсу силы трения:

$$\Delta F_{тр} \cdot \Delta t = mv_1 \Delta N_+ - mv_2 \Delta N_- .$$

Сила трения, действующая на единицу площади границы соседних слоев:

$$F_{тр} = -\frac{1}{3} nm\bar{u} l \frac{v_2 - v_1}{2l} = -\frac{1}{3} nm\bar{u} l \frac{\Delta v}{\Delta x} .$$

Произведение $\frac{1}{3} l \bar{u} nm = \eta$ называется коэффициентом внутреннего трения или вязкостью.

Сила внутреннего трения при движении слоев в газе прямо пропорциональна градиенту скорости

$$F_{тр} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} .$$

Для движения шара радиуса r со скоростью v в жидкости с вязкостью η справедлива формула Стокса (Габриэль Стокс, 1819—1903), согласно которой сила сопротивления:

$$F_{сопр} = -6\pi\eta r v .$$

Вязкость жидкостей в 10^{-5} пуаз

Жидкость	Т-ра, °С	Вязкость	Жидкость	Т-ра, °С	Вязкость
Азотная кислота	10	1 770	Масло	—	—
Ацетон	20	330	» льняное	30	$331 \cdot 10^2$
Бензин	20	649	» оливков.	20	$84 \cdot 10^3$
Глицерин	20	$83 \cdot 10^4$	Серная кислота	20	$22 \cdot 10^3$
Ксилол мета	20	615	Сероуглерод	20	367
» орто	20	807	Скипидар	20	1 490
» пара	20	643	Спирт метилов.	20	591
Масло касторов	20	$986 \cdot 10^3$	» этилов.	20	1 192
			Эфир	20	234

Вязкость газов в 10^{-5} пуаз

Газ	Т-ра, °С	Вязкость	Газ	Т-ра, °С	Вязкость
Азот	20	18,4	Метан	20	12,0
Аммиак	20	10,8	Неон	0	29,8
Аргон	0	21,0	Окись азота	20	18,6
Водород	20	9,5	Окись углерода	20	18,4
Водяной пар	15	9,8	Сернистый газ	20	13,8
Воздух	20	18,1	Сероводород	20	13,0
Гелий	0	18,9	Углекислый газ	20	16,0
Кислород	20	20,9	Хлор	20	14,7
Криптон	0	23,3	Хлористый водород	0	14,0
Ксенон	0	21,1			

Теплопроводность. Через газ, заключенный между параллельными стенками, имеющими разные температуры T_A и T_B, в направлении оси Ox, нормальной стенкам будет распространяться поток тепла.

Молекулы, проходящие через площадку ΔS, нормальную оси, переносят в положительном направлении оси энергию:

$$w_1 \cdot \Delta N_+ = \frac{i}{2} kT_1 \cdot \frac{1}{6} \bar{u} n \Delta S \Delta t.$$

В противоположном направлении переносится энергия:

$$w_2 \Delta N_- = \frac{i}{2} kT_2 \cdot \frac{1}{6} \bar{u} n \Delta S \cdot \Delta t.$$

Здесь i — число степеней свободы молекул газа, а T_1 и T_2 — значения температуры в плоскостях $x - \lambda$ и $x + \lambda$ соответственно. Поток тепла через единицу площади за единицу времени:

$$q = \frac{w_1 \Delta N_+ - w_2 \Delta N_-}{\Delta S \cdot \Delta t} = -\frac{1}{3} n\bar{u}l \, \frac{T_2 - T_1}{2l} \cdot \frac{i}{2} k.$$

Величина $\lambda = \frac{1}{3} l \bar{u} n \frac{i}{2} k$ называется коэффициентом теплопроводности.

Теплопроводность некоторых веществ

(в 10^{-4} кал · см$^{-1}$ · сек$^{-1}$ · °С$^{-1}$)

Вещества	Объемн. вес, г/см³	Теплопроводн.	Вещества	Объемн. вес, г/см³	Теплопроводн.
Твердые вещества			Стеклянное волокно	0,22	0,9
Асбестовое волокно, бумага	0,5	3,5	Стружка стальная	0,10	1,9
Бетон	2,2 ок.	25	Хлопчатое волокно	0,08	1,0
Бумага	—	1,2	Целлулоид	1,4	5,0
Войлок (шерсть)	0,27	0,9	Шелк искусственный	—	1,0
Древесина бальса	0,14	1,3	Шлаковая шерсть	0,20	1,1
» деловая перпенд. волокнам	—	2,6—3,8	Эбонит	1,2	3,8
Древесина деловая, вдоль волокон	—	5,3—8,4	Шифер	—	33
Капок	0,015	0,8	*Жидкости*		
Кварц	2,2	24	Анилин	—	4,0
Кирпич	1,6	12	Бензин	—	3,3
Константан	8,9	540	Вода	—	14,0
Латунь	8,6	2 600	Керосин	—	3,6
Лед	0,92	53	Скипидар	—	3,3
Натриевое стекло	2,6	17	Спирт метиловый	—	5,0
Овчина	0,08	1,0	» этиловый	—	4,2
Опилки	0,20	1,4	*Газы* при 0 °С		
Почва (сухая)	—	4,3	Азот	—	0,55
Пробка	0,20	1,2	Водород	—	3,30
Резина (чистая)	—	3,1	Воздух	—	0,57
Снег	0,25	3,6	Кислород	—	0,56
Сталь	7,8	1 100	Метан	—	0,74
			Углекислый газ	—	0,33

Поток тепла, проходящий через единицу площади через единицу времени, прямо пропорционален градиенту температуры:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Минус показывает, что поток тепла направлен от слоя более высокой температуры к слою более низкой температуры.

ТЕРМОДИНАМИКА

Предмет и метод термодинамики. Термодинамика есть раздел физики, изучающий превращения энергии в различных явлениях, сопровождающихся тепловыми эффектами. Термодинамика основывается на трех опытных законах, называемых началами термодинамики.

§ 15. Полная и внутренняя энергия системы

Полная энергия любой термодинамической системы W складывается из кинетической энергии движения системы как целого $W_{кин}$, потенциальной энергии системы, обусловленной наличием внешнего поля сил, $W_{пот}$ и внутренней энергии системы U:

$$W = W_{кин} + W_{пот} + U.$$

Внутренняя энергия системы U складывается из собственных энергий отдельных частей, составляющих систему, и не зависит от движения всей системы, как целого, или присутствия внешних силовых полей.

Внутренняя энергия тела U складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул тела и потенциальной энергии их взаимодействия.

Внутренняя энергия системы является однозначной функцией состояния и, следовательно, обладает полным дифференциалом.

Предположение о том, что одному и тому же состоянию системы соответствуют два различных значения внутренней энергии U_1 и U_2, немедленно приводит к противоречию с законом сохранения энергии, так как при этом можно было бы отнять у системы часть энергии без того, чтобы в ней произошли какие-либо изменения, т. е. создать вечный двигатель первого рода.

§ 16. Работа и теплота

Передача энергии от одного тела к другому путем совершения работы одного тела над другим всегда необходимо связана с изменением внешних условий, с перемещением тела в целом или его отдельных макроскопических частей. Работа есть мера переданной от одного тела к другому механической энергии. Работа, совершенная телом, считается положительной, а работа, полученная телом, — отрицательной.

Передача энергии от одного тела к другому посредством теплового обмена между телами не связана с изменением внешних условий и перемещением тел. Количеством теплоты ΔQ называется величина переданной от одного тела к другому энергии теплового движения молекул посредством теплообмена между телами. Тепло, полученное телом, считается положительным, а отданное телом, — отрицательным.

Эквивалентность теплоты и работы. Английский ученый Джемс Прескот Джоуль (1818—1889) показал, что количество затраченной работы прямо пропорционально полученному при этом количеству теплоты. Теплота в опытах Джоуля получалась за счет жидкостного трения

при перемешивании воды в сосуде вращающейся мешалкой и оценивалась по повышению температуры воды. Мешалка приводилась в движение опускающимся грузом, поэтому произведенная работа определялась уменьшением потенциальной энергии груза за вычетом кинетической энергии груза к концу опускания.

Определенное количество теплоты ΔQ эквивалентно определенному количеству работы ΔA:

$$\Delta A = I \cdot \Delta Q,$$

где I — механический эквивалент теплоты, $I = 4{,}1868 \frac{дж}{кал}$.

§ 17. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики есть применение к тепловым явлениям закона сохранения и превращения энергии.

Для незамкнутой термодинамической системы, которая механически взаимодействует и обменивается теплотой с окружающей средой, изменение полной энергии системы $\Delta W = W_2 - W_1$ равно полученному системой количеству теплоты ΔQ за вычетом произведенной системой работы ΔA:

$$\Delta W = \Delta Q - \Delta A.$$

Для системы, находящейся в состоянии равновесия при отсутствии поля внешних сил, полная энергия W равна внутренней энергии U. Для такой системы первое начало имеет вид:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Количество тепла ΔQ, сообщенное системе, идет на увеличение внутренней энергии системы ΔU и на совершение системой внешней работы ΔA.

§ 18. Работа расширения газа

Если газ в цилиндре с поршнем оказывает на поршень давление p, причем поршень площади S перемещается на расстояние dl, то действующая сила есть pS, а произведение Sdl представляет собой увеличение объема, занимаемого газом dV.

Элементарная работа расширения газа:

$$d'A = p\,dV.$$

Полная работа расширения, совершенная газом

$$A = \int_A^B p dV.$$

Величина работы существенным образом зависит от того, при помощи какого процесса газ переводится из состояния A в состояние B.

Применение первого начала термодинамики к процессам в газе. Для газа первое начало термодинамики имеет вид:

$$dQ = dU + p\,dV;$$

а) для изохорического процесса $V = \text{const}$, $dV = 0$ и $dA = 0$, т. е. при изохорическом процессе газ не совершает механической работы. Все подводимое к газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии:

$$dQ = dU,$$

б) для изобарического процесса $p = \text{const}$.

Работа при изобарическом процессе:

$$A = p(V_2 - V_1),$$

где V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа.

При изобарическом процессе подводимое к газу тепло частично расходуется на увеличение его внутренней энергии, а частично идет на совершение газом работы расширения:

$$\Delta Q = \Delta U + p(V_2 - V_1),$$

в) для изотермического процесса $T = \text{const}$. Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, при изотермическом расширении $dT=0$ и $dU=0$.

При изотермическом процессе все подводимое к газу тепло целиком расходуется на совершение работы расширения:

$$dQ = dA.$$

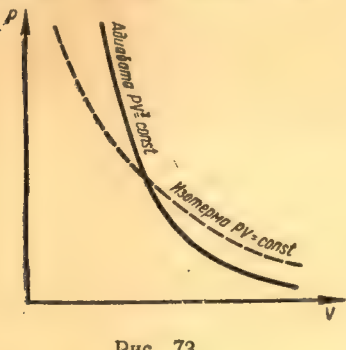


Рис. 73

Работа моля газа при изотермическом процессе:

$$A = RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где V_1 — начальный и V_2 — конечный объемы газа,

г) для адиабатического процесса $dQ=0$. Адиабатическим процессом называется процесс, происходящий без теплового обмена с внешней средой. Всякий быстро протекающий процесс в газе практически адиабатен, если за время его проведения теплообмен не успевает произойти.

При адиабатическом процессе внешняя работа совершается газом за счет убыли его внутренней энергии:

$$dA = -dU.$$

Работа моля газа при адиабатическом процессе:

$$A = -C_V \Delta T = -C_V(T_2 - T_1) = C_V(T_1 - T_2),$$

где C_V — теплоемкость при постоянном объеме, T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры газа.

Уравнение Пуассона. Первое начало термодинамики для адиабатического процесса может быть записано в виде:

$$p\,dV = -C_V\,dT.$$

Внося в это выражение давление из уравнения Клапейрона $p = \frac{RT}{V}$ и интегрируя полученное дифференциальное уравнение, придем к уравнению Пуассона (Симеон Пуассон, 1781—1840) для адиабатического процесса:

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ есть отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Поскольку $\gamma > 1$, график адиабатического процесса — адиабата — круче спадает к оси объемов, чем изотерма (рис. 73).

§ 19. Степени свободы

Числом степеней свободы i называется число независимых переменных, которые необходимо задать для определения положения объекта в пространстве.

Материальная точка имеет три степени свободы, так как ее положение в пространстве определяется тремя ее координатами.

Две материальных точки на неизменном расстоянии одна от другой — «гантель» — имеют пять степеней свободы.

Три и большее число точек на неизменных расстояниях одна от другой (в частности, — твердое тело) имеют шесть степеней свободы, так как из девяти координат трех точек три координаты не являются независимыми и выражаются через остальные.

§ 20. Внутренняя энергия идеального газа

Как следствие из основного уравнения молекулярно-кинетической теории газа, полная энергия поступательного движения молекул в моле газа равна:

$$U_{пост} = \frac{3}{2} RT.$$

Максвелл выдвинул постулат о равномерном распределении энергии молекул по степеням свободы. Так как для поступательного движения число степеней свободы равно трем, то на одну степень свободы приходится энергия хаотического теплового движения:

$$U_0 = \frac{1}{2} RT.$$

Внутренняя энергия грамм-моля идеального газа с числом степеней свободы i равна:

$$U = \frac{i}{2} RT.$$

Число степеней свободы газа зависит от числа атомов в его молекулах. Молекулы одноатомных газов можно рассматривать как материальные точки. Для одноатомных газов $i=3$. Молекулы двухатомных газов уподобляются гантели. Для двухатомных газов $i=5$. Для многоатомных газов, молекулы которых состоят из трех или более атомов, $i=6$.

§ 21. Теплоемкости

Количество теплоты, необходимое для нагрева данного тела на один градус Цельсия, называется теплоемкостью данного тела. Теплоемкость реальных тел и газов не является строго постоянной, а несколько зависит от температуры.

Количество теплоты, необходимое для нагрева одного грамма данного вещества на один градус Цельсия, называется удельной теплоемкостью c данного вещества.

Количество теплоты, необходимое для нагрева одного грамм-моля данного вещества на один градус Цельсия, называется **молярной теплоемкостью** C данного вещества.

Для газов величина теплоемкости существенным образом зависит от того, при каком процессе осуществляется подвод тепла к газу. Поэтому в том или ином процессе при обозначении теплоемкости в качестве индекса ста-

вится величина, которая остается постоянной в данном процессе, например, C_p — молярная теплоемкость при постоянном давлении, C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме и т. д.

Молярная теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R,$$

где i — число степеней свободы молекул газа,

R — универсальная газовая постоянная.

Молярная теплоемкость при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{i+2}{2} R.$$

Молярная теплоемкость C_p превосходит теплоемкость C_V на величину работы расширения моля газа при постоянном давлении и увеличении температуры на один градус.

Работа расширения идеального газа при нагревании моля газа на один градус и постоянном давлении равна универсальной газовой постоянной R:

$$\Delta A = p\,\Delta V = p \cdot \frac{R\,\Delta T}{p} = R, \quad \text{так как } \Delta T = 1°.$$

Теплоемкости C_p и C_V связаны уравнением Роберта Майера (1814—1878):

$$C_p - C_V = R.$$

Теплоемкость при изотермическом процессе $C_T = \pm\infty$.

Теплоемкость при адиабатическом процессе $C_Q = 0$.

§ 22. Обратимые и необратимые процессы

Обратимым процессом называется такой процесс, который может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс проведен сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система вернулась в исходное состояние, ни в ней, ни в окружающей среде не возникает никаких остаточных изменений.

Процессы, представляющие собой непрерывную последовательность равновесных состояний системы, называются квазистатическими. Квазистатические процессы обратимы. Идеальные процессы — изотермический, изобарический, изохорический, адиабатический обратимы.

Реальные тепловые процессы необратимы. Например, расширение газа в пустоту происходит самопроизвольно, а обратный процесс можно реализовать, лишь затратив работу, т. е. произведя в окружающей среде остаточные изменения.

Замкнутым процессом или циклом называется такой процесс, по завершении которого система возвращается в исходное состояние.

Прямыми циклами называются такие циклы, в которых некоторое количество теплоты превращается в работу. В прямых циклах линия расширения на диаграмме pV располагается выше линии сжатия газа. Прямые циклы совершают тепловые машины. Обратными циклами называются такие циклы, в которых затрачивается механическая энергия. В них линия расширения газа на диаграмме pV лежит ниже линии сжатия. Обратные циклы совершают холодильные машины.

§ 23. Цикл Карно

Французский инженер Сади Карно (1796—1832) рассмотрел в 1824 г. идеальный цикл, состоящий из двух отрезков изотерм и двух отрезков адиабат (рис. 74). От состояния A газ расширяется изотермически, получая от нагревателя количество теплоты Q_1. От точки B, в которой нагреватель убирают, расширение газа продолжается адиабатически до точки C. Работа расширения происходит за счет убыли внутренней энергии газа и его температура уменьшается до $T_2 < T_1$. От точки C до точки D газ изотермически сжимается, отдавая холодильнику количество теплоты Q_2. В точке D холодильник убирают и газ сжимается адиабатически, повышая при этом свою температуру вновь до T_1. Система возвращается в исходное состояние, цикл завершен.

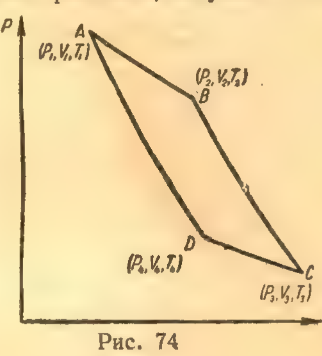


Рис. 74

Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно с идеальным газом:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

§ 24. Второе начало термодинамики

Второе начало термодинамики определяет направление процессов, происходящих в природе.

Теплота не может сама собой переходить от тела с более низкой температурой к телу с более высокой температурой (формулировка Клаузиуса).

В природе невозможен процесс, полный эффект которого состоял бы в охлаждении теплового резервуара и в эквивалентной механической работе (формулировка В. Томсона и М. Планка).

После выяснения невозможности создания вечного двигателя, совершающего работу без затраты энергии (вечного двигателя первого рода), возникла идея создания тепловой машины, которая работала бы за счет внутренней энергии одного теплового резервуара, например, запаса внутренней энергии вод океана. Такая машина получила название вечного двигателя второго рода. В соответствии с формулировкой Томсона и Планка второго начала термодинамики вечный двигатель второго рода (перпетуум мобиле II) невозможен.

Энтропия. Статистический смысл второго начала. Макроскопическое состояние газа с некоторыми значениями параметров представляет собой смену микроскопических состояний, которые отличаются одно от другого нахождением одних и тех же молекул в разных частях объема и перераспределением энергии между молекулами.

Термодинамической вероятностью данного макросостояния W называется число микросостояний, соответствующих этому макросостоянию. Термодинамическая вероятность состояния характеризует степень неупорядоченности макроскопического состояния.

Функция

$S = k \ln W$, где k — постоянная Больцмана, называется энтропией системы.

Людвиг Больцман (1844—1906) сформулировал второе начало термодинамики: «Природа стремится от состояний, менее вероятных, к состояниям, более вероятным».

Энтропия является функцией состояния и для замкнутой системы при любом процессе либо возрастает, либо остается неизменной, т. е. $dS \geqslant 0$. Изменение энтропии в обратимых процессах равно нулю, в необратимых процессах — больше нуля. Для незамкнутых систем энтропия может, конечно, и уменьшаться.

Если система получает в обратимом процессе количество теплоты dQ, причем температура системы T, то изменение энтропии

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Аналитическая запись второго начала термодинамики:

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \leqslant S_B - S_A,$$

где интеграл берется по пути, по которому реализуется процесс между начальным состоянием A и конечным состоянием B, S_A и S_B — значения энтропии в этих состояниях. Знак равенства соответствует обратимому процессу, а знак неравенства — необратимому.

Второе начало термодинамики утверждает, что разность энтропий двух состояний системы равна интегралу от $\frac{dQ}{T}$ между этими состояниями по обратимому пути и больше этого интеграла по пути необратимому. Это не значит, что разность энтропий зависит от пути между этими состояниями, а значит лишь, что в случае необратимого пути интеграл от $\frac{dQ}{T}$ уже не выражает изменения энтропии, а меньше его.

Аналитическая запись второго начала термодинамики в дифференциальной форме:

$$dS \geqslant \frac{dQ}{T}.$$

В отличие от первого начала термодинамики, выполняющегося абсолютно, второе начало термодинамики носит статистический характер и выполняется с точностью до флуктуаций. Если, например, в сосуде две молекулы, то второе начало требует их равномерного распределения по объему, однако, не исключена возможность, что обе окажутся в одной половине сосуда. При громадном числе молекул вероятность того, что все они окажутся в одной половине сосуда, исчезающе мала. Таким образом, чем значительнее отступления от второго начала термодинамики, тем менее они вероятны.

§ 25. Третье начало термодинамики

В 1906 г. Вальтер Нернст (1864—1941) сформулировал утверждение, получившее название третьего начала термодинамики.

При абсолютном нуле температур внутренняя энергия системы распределена между частицами, входящими в нее единственным образом: электроны в атомах находятся на наиболее низких энергетических уровнях, а атомы

расположены в узлах кристаллической решетки твердого тела. Это состояние полностью упорядочено и его термодинамическая вероятность равна единице.

Поэтому энтропия

$$S_{T\to 0} = k \ln 1 = 0,$$

т. е. при абсолютном нуле температур энтропия тела равна нулю — это и есть формулировка третьего начала термодинамики.

Теорему Нернста можно формулировать и так: Нельзя достигнуть абсолютного нуля температуры отнятием от тела теплоты посредством конечных реальных процессов. Иными словами, нельзя создать машину, способную охладить тело до абсолютного нуля. Абсолютный нуль температуры недостижим.

Вблизи абсолютного нуля значения теплоемкостей c_p и c_V приближаются к нулю, т. е.

$$\lim_{T\to 0} c_p = \lim_{T\to 0} c_V = 0.$$

§ 26. Термодинамические функции

Джозайя Уиллард Гиббс (1839—1903) разработал аналитический метод решения задач термодинамики на основе использования термодинамических функций.

Термодинамические функции являются функциями состояния и обладают полным дифференциалом. Термодинамические функции при определенных условиях (равновесие системы) проходят через экстремум.

К термодинамическим функциям относятся:

а) внутренняя энергия. На основании первого начала термодинамики дифференциал внутренней энергии dU:

$$dU = d'Q - d'A.$$

С учетом второго начала термодинамики:

$$dU = T\,dS - y\,dx,$$

где y — обобщенная сила, а

x — обобщенная координата.

Из первого и второго начал термодинамики:

$$dU + y\,dx - T\,dS < 0.$$

Для частного случая расширения газа:

$$dU + p\,dV - T\,dS < 0, \quad \text{так как } y = p, \quad dx = dV.$$

Если $dV = 0$, $[dx = 0]$ и $dS = 0$, то $dU < 0$. В состоянии равновесия внутренняя энергия проходит через минимум, а при необратимых процессах ее изменение меньше нуля;

б) свободная энергия

$$F = U - TS.$$

Дифференциал:

$$dF = dU - T\,dS - S\,dT.$$

Если $dx = 0$, $dT = 0$, то $d(U - TS) < 0$ или $dF < 0$.

В условиях равновесия системы свободная энергия F проходит через минимум.

Внутреннюю энергию U можно представить в виде двух слагаемых:

$$U = (U - TS) + TS = F + TS.$$

Первое слагаемое есть свободная энергия, а второе TS представляет собой ту часть внутренней энергии, которая не может быть использована для совершения работы и была названа Германом Гельмгольцем (1821—1894) связанной энергией;

в) тепловая функция или энтальпия:

$$I = U + xy.$$

Дифференцируем:

$$dI = dU + x\,dy + y\,dx.$$

Если $dS = 0$ и $dy = 0$, то $dI < 0$.

В состоянии равновесия системы энтальпия имеет минимум;

г) термодинамический потенциал Гиббса:

$$\Phi = U - TS + xy.$$

Дифференцируем:

$$d\Phi = dU - T\,dS - S\,dT + x\,dy + y\,dx,$$

или

$$d\Phi = -S\,dT + x\,dy.$$

Если $dy = 0$ и $dT = 0$, то $d\Phi < 0$.

В состоянии равновесия системы термодинамический потенциал Гиббса проходит через минимум;

д) энтропия S также является функцией состояния.

Для идеального газа:

$$dU = C_V\,dT, \quad U = C_V\,T + U_0,$$

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T} = \frac{C_V\,dT}{T} + \frac{R\,dV}{V} = C_V\,d\ln T + R\,d\ln V,$$

откуда

$$S = C_V \ln T + R\ln V + S_0.$$

Свободная энергия:

$$F = U - TS = U_0 + C_V\,T(1 - \ln T) - RT\ln V - TS_0.$$

Потенциал Гиббса:

$$\Phi = U + pV - TS = F + pV = U_0 + C_V\,T(1 - \ln T) + RT(1 - \ln V) - TS_0,$$

или

$$\Phi = U_0 + C_p\,T(1 - \ln T) - RT(1 - \ln p) - T(R\ln R + S_0).$$

Энтропия:

$$S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_p = C_p\ln T - R\ln p + R(1 + \ln R) + S_0.$$

Химический потенциал μ представляет собой работу, затрачиваемую на увеличение числа молекул в системе на единицу при постоянстве всех остальных переменных.

Вследствие этого производная каждой из термодинамических функций по числу молекул N равна химическому потенциалу:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,\,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,\,V} = \left(\frac{\partial I}{\partial N}\right)_{S,\,p} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)_{T,\,p} = \mu.$$

Химический потенциал μ

$$\mu = U + pV - TS$$

и

$$d\mu = dU + p\,dV + V\,dp - T\,dS - S\,dT,$$

но так как

$$dU = T\,dS - p\,dV,$$

то:

$$d\mu = -S\,dT + V\,dp,$$

следовательно, химический потенциал является функцией температуры T и давления p. Если умножить химический потенциал μ однокомпонентной системы на число молекул, то полученная величина, являющаяся функцией числа молекул N и обобщенных сил, определит потенциал Гиббса (изобарно-изотермический потенциал):

$$\Phi = N\mu.$$

Если две части сложной системы имеют различные химические потенциалы (уровни Ферми), то между ними происходит обмен частицами до тех пор, пока потенциалы не сравняются. Это широко используется в теории полупроводников, например, при контакте *p*- и *n*-областей, в процессе обмена электронами.

§ 27. Термодинамическое равновесие

Гомогенной системой называется однородная система, каждой точке которой в условиях равновесия отвечают одинаковые значения давления p, температуры T и концентрации C.

Гетерогенной системой называется сложная система, состоящая из нескольких однородных или гомогенных систем, например, система лед — вода, лед — вода — пар, растворы частично растворимых веществ, суспензии и эмульсии.

Однородная часть гетерогенной системы, имеющая границу раздела с остальными частями и могущая быть отделена от них, называется фазой. Независимая часть системы, которую можно выделить, не нарушая условий существования системы, называется компонентом.

Условия равновесия в гетерогенной системе определяются исходя из того, что в случае равновесия все термодинамические функции проходят через экстремум:

$$dU = 0, \quad dI = 0, \quad dF = 0, \quad d\Phi = 0, \quad dS = 0.$$

Для системы, в которую входят r фаз и n компонент, если система замкнута, имеют место условия постоянства энтропии, объема и массы всей системы:

$$\sum S = \text{const}, \quad \sum V = \text{const}, \quad \sum_r m_r = \text{const}.$$

Если, например, в системе неизменны все величины, кроме энтропий первой и второй фаз S_1 и S_2, то $dS_1 + dS_2 = 0$ или $dS_1 = -dS_2$. Изменение внутренней энергии:

$$dU = dU_1 + dU_2 = T_1\,dS_1 + T_2\,dS_2 = dS_1\,(T_1 - T_2) = 0$$

и так как $dS_1 \neq 0$, то $T_1 = T_2$.

Аналогично можно провести рассуждение для других фаз, поэтому при равновесии гетерогенной системы температуры всех ее фаз равны:

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_r.$$

Сходным образом, если меняются только объемы первой и второй фаз V_1 и V_2, то $dV_1 = -dV_2$, и так как

$$dU = -p_1\,dV_1 - p_2\,dV_2 = 0,$$

то

$$dU = dV_1 (p_2 - p_1) = 0.$$

Следовательно, при равновесии гетерогенной системы давления во всех ее фазах равны:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_r.$$

Если, наконец, изменяются лишь массы первой компоненты в первой фазе и первой компоненты во второй фазе, то

$$dm_1^1 = -dm_2^1,$$

и

$$dU = \mu_1^1 dm_1^1 + \mu_2^1 dm_2^1 = dm_1^1 (\mu_1^1 - \mu_2^1) = 0,$$

но так как

$$dm_1^1 \neq 0,$$

то отсюда следует равенство химических потенциалов первого компонента в первой и второй фазах:

$$\mu_1^1 = \mu_2^1.$$

Таким образом, при равновесии гетерогенной системы химические потенциалы каждой ее компоненты равны во всех фазах:

$$\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = \ldots = \mu_r^{(1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_1^{(n)} = \mu_2^{(n)} = \ldots = \mu_r^{(n)}.$$

Равенство температур T определяет равенство кинетических энергий частиц во всех фазах, равенство давлений p определяет механическое равновесие в гетерогенной системе, равенство химических потенциалов показывает, что удельные энергии каждой из компонент во всех фазах одинаковы.

Связь числа фаз и числа компонент, имеющихся в системе, находящейся в состоянии равновесия, определяется правилом фаз Гиббса. Условия равенства температур и давлений в фазах при равновесии суть тождества, а условия равенства химических потенциалов — уравнения, так как $\mu = \mu(T, p)$, число таких уравнений в строке равно $r - 1$, и так как строк n, то общее число уравнений равно $n(r - 1)$, в то время, как число неизвестных равно $rn + 2$ (rn химических потенциалов, давление и температура). Однако число переменных в каждой строке можно сократить на единицу, пользуясь относительными значениями химических потенциалов. Тогда число неизвестных окажется равным $r(n - 1) + 2$. Система условий равновесия окажется несовместной, если число уравнений больше числа неизвестных, поэтому

$$n(r-1) < r(n-1) + 2 \quad \text{или} \quad r < n + 2.$$

Правило фаз Гиббса утверждает: для существования равновесия в гетерогенной системе необходимо, чтобы число фаз было равно или меньше числа компонент плюс два.

Например, система лед — вода — пар не имеет ни одной степени свободы и может находиться в равновесии лишь в одной точке (см. стр. 151). Вообще число степеней свободы системы i равно разности числа переменных и числа уравнений:

$$i = n - r + 2.$$

Это число показывает, сколько параметров можно изменять, не нарушая состояния равновесия системы (хотя и смещая его положение).

Для состоящей из одной фазы гомогенной системы термодинамический потенциал Гиббса является функцией давления p, температуры T и числа частиц n_i каждой из k ее компонент:

$$\Phi = \Phi(p, T, n_1 n_2, \ldots, n_k).$$

При постоянном давлении и объеме

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_1}\right)_{p, T, n_2, \ldots, n_k} \cdot dn_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_k}\right)_{p, T, n_1, \ldots, n_{k-1}} \cdot dn_k = 0,$$

но частные производные равны химическим потенциалам соответствующей компоненты, поэтому в условиях равновесия гомогенной системы сумма произведений химических потенциалов компонент на изменение числа частиц каждой компоненты равно нулю:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \, dn_i = 0.$$

Для идеального газа химический потенциал μ_i равен

$$\mu_i = q_i + (C_i + R - C_i \ln R - S_0 - R \ln R)\, T - (C_i + RT \ln T + RT \ln p + RT \ln x_i,$$

где $x_i = \dfrac{n_i}{\sum n_i}$ — молярная дробь, т. е. отношение числа молекул данного компонента к общему числу молекул всех компонент,

C_i — молярная теплоемкость при постоянном объеме,

q_i — химическая энергия, выделенная или поглощенная одним молем при наличии химической реакции в системе;

$$C_i + R - C_i \ln R - S_0 - R \ln R = a_i,$$

S_0 — постоянная в выражении энтропии.

Внося это выражение в указанное выше равенство, определяющее условие равновесия в гомогенной системе, где происходят химические реакции, получим, производя преобразования и обозначив для краткости:

$$\sum n_i q_i = q_0; \quad -\sum n_i a_i = R \ln a; \quad \sum n_i C_i = Rb; \quad \sum n_i = \Theta,$$

выражение закона действующих масс:

$$\prod x_i^{n_i} = a e^{-\frac{q_0}{RT}} \cdot T^{b+\theta} \cdot p^{-\theta} = k(p, T),$$

где $k(p, T)$ — постоянная химического равновесия. Определение ее является одной из важных задач химической термодинамики и статистической физики, так как ее знание позволяет выбрать наиболее выгодные для практики условия протекания реакции.

§ 28. Фазовые переходы первого рода

Фазовыми переходами первого рода называются фазовые превращения, сопровождающиеся поглощением или выделением скрытой теплоты и изменением удельного объема.

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса:

$$T \cdot \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{v_2 - v_1}.$$

Термические постоянные химических элементов

$T_{пл}$ — температура плавления (°С), $T_{кип}$ — температура кипения (°С) при нормальном давлении, c — удельная теплоемкость (*кал* · $г^{-1}$ · $град^{-1}$), L — скрытая теплота плавления (*кал* · $г^{-1}$), α — коэффициент линейного расширения (10^{-6} $град^{-1}$), λ — теплопроводность (*кал* · $см^{-1}$ · $сек^{-1}$ · $град^{-1}$).

Элемент	$T_{пл}$	$T_{кип}$	c		L	α	λ
			обл. т-р °С	знач.			
Азот	—209,9	—195,8	—208÷—196	0,028	—	—	—
Алюминий	660,1	2 330	17÷100	0,217	94	26	0,504
Аргон	—189,2	—186	—	—	—	—	—
Барий	704	1 600	18	0,07	—	—	—
Бериллий	1 280	2 770	0÷100	0,425	—	12	—
Бор	2 100	2 550	0÷100	0,307	—	—	—
Бром	— 7,3	59	13÷45	0,107	16	—	—
Ванадий	1 720	—	0÷100	0,115	—	—	—
Висмут	271	1 470	17÷100	0,0303	14	12	0,019
Водород	—259	—252,7	—253	6,0	—	—	—
Вольфрам	3 380	—	20÷100	0,034	—	4	0,48
Галлий	30,0	2 100	—	—	—	—	—
Гелий	—272	—268,8	—	—	—	—	—
Германий	958	2 700	0÷100	0,074	—	—	—
Железо	1 535	2 450	18÷100	0,113	49	12	0,161
Золото	1 063	2 700	17÷100	0,031	16	14	0,70
Индий	156	2 100	0÷100	0,057	—	46	—
Йод	113,5	184,4	9÷98	0,054	12	90	—
Иридий	2 443	—	18÷100	0,0323	—	7	0,141
Иттрий	1 490	—	—	—	—	—	—
Кадмий	320,9	772	20	0,0549	13	30	0,222
Калий	62,5	760	0÷56	0,19	15	80	0,23
Кальций	850	1 400	0÷20	0,149	—	—	—
Кислород	—218,8	—182,970	—200÷—183	0,35	—	—	—
Кобальт	1 492	3 000	15÷100	0,104	58	12	—
Кремний	1 440	2 600	20	0,170	—	7	—
Криптон	—157	—153	—	—	—	—	—
Ксенон	—112	—108	—	—	—	—	—
Лантан	920	1 800	0÷100	0,045	—	—	—
Литий	186	1 360	0÷100	1,09	—	60	0,17
Магний	651	1 120	17÷100	0,247	37	26	0,38
Марганец	1 260	2 150	0÷100	0,110	—	21	—
Медь	1 083	2 310	15÷100	0,093	42	17	0,92
Молибден	2 625	4 800	15÷93	0,072	—	5	0,346
Мышьяк	возг.	450	0÷100	0,08	—	5	—
Натрий	97,5	883	0	0,283	27	70	0,31
Неодим	1 024	—	—	—	—	—	—
Неон	—249	—245,9	—	—	—	—	—
Никель	1 453	3 000	15÷100	0,109	65	13	0,142
Ниобий	2 415	3 300	—	—	—	—	—
Олово	231,9	2 337	20	0,054	14	23	0,155
Осмий	2 700	—	19÷98	0,031	—	7	—
Палладий	1 552	3 560	18÷100	0,059	36	12	0,168
Платина	1 769	3 910	15÷100	0,0322	27	9	0,166

Элемент	$T_{пл}$	$T_{кип}$	c		L	α	λ
			обл. т-р °C	знач.			
Празеодим . . .	932	—	—	—	—	—	—
Радий	700	1 440	—	—	—	—	—
Родий	1 960	—	10÷100	0,058	—	9	0,210
Ртуть	— 38,87	356,58	20	0,0333	3	—	0,019
Рубидий	38,7	679	—	0,08	—	90	—
Рутений	2 450	—	0÷100	0,061	—	10	—
Самарий	1 050	—	—	—	—	—	—
Свинец	327,3	1 750	20÷100	0,0305	6	—	0,083
Селен	220	690	22÷62	0,084	84	37	—
Сера (ромбич.) .	112,8	444,60	0÷55	0,18	9	70	0,0005
» (моноклин.)	119,0	—	—	—	—	—	—
Серебро	960,8	2 193	15÷100	0,056	26	19	0,974
Стронций	770	1 300	—	—	—	—	—
Сурьма	630,5	1 440	20	0,0503	39	12	0,042
Таллий	302	1 460	20÷100	0,033	7	31	0,09
Тантал	2 850	—	58	0,036	—	7	0,13
Теллур	452	1 007	15÷100	0,048	—	17	—
Титан	1 660	—	20	0,142	—	—	—
Торий	1 842	—	0÷100	0,028	—	12	—
Углерод	возг.	3 600	11	0,160	—	5	—
Уран	1 133	—	0÷100	0,03	—	—	—
Фосфор	44	282	7÷30	0,19	5	124	—
Фтор	—223	—188	—	—	—	—	—
Хлор	—102	— 34	0÷24	0,226	—	—	—
Хром	1 800	2 200	17÷100	0,110	32	—	—
Цезий	30	690	0÷26	0,048	4	—	—
Церий	800	1 400	0÷100	0,045	—	—	—
Цинк	419,5	908	20	0,0924	26	28	0,265
Цирконий	1 860	—	0÷100	0,067	—	—	—

описывает изменение давления насыщенного пара в зависимости от температуры для процессов, протекающих в системе по линии насыщения.

На диаграмме давление — температура (рис. 75) эти процессы изображаются кривыми, имеющими одну общую точку. *CA* — кривая парообразования, описывающая равновесие системы жидкость — пар, *CB* — кривая плавления, описывающая равновесие в системе твердое тело — жидкость. *CD* — кривая сублимации (возгонки), описывающая равновесие в системе твердое тело — пар, *C* — «тройная точка».

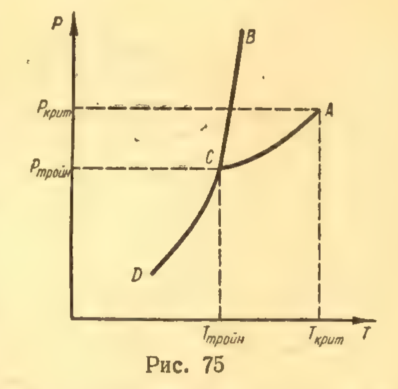


Рис. 75

В уравнении Клапейрона — Клаузиуса для случая испарения жидкости λ — удельная теплота парообразования; v_1 — удельный объем жидкости, v_2 — удельный объем пара. Для случая плавления твердого тела λ — удельная теплота плавления, v_1 — удельный объем твердого тела и v_2 — удельный объем жидкости. Для случая возгонки твердого тела λ — удельная

теплота сублимации, v_1 — удельный объем твердого тела и v_2 — удельный объем пара.

В уравнении Клапейрона — Клаузиуса $\lambda > 0$, а разность удельных объемов может быть разного знака. У большинства тел при плавлении $v_2 > v_1$ и, следовательно, $\frac{dp}{dT} > 0$. Однако у воды, висмута и чугуна при плавлении твердой фазы объем уменьшается, поэтому $\frac{dp}{dT} < 0$ и точка плавления с увеличением давления понижается.

§ 29. Фазовые переходы второго рода

Фазовыми переходами второго рода называются фазовые превращения, происходящие без поглощения или выделения тепла и изменения удельного объема.

При фазовых переходах второго рода энтропия и термодинамический потенциал Гиббса изменяются непрерывно. Теплоемкость при постоянном давлении C_p, изотермический коэффициент сжимаемости:

$$\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

и коэффициент объемного расширения

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

при фазовых переходах второго рода испытывают скачкообразное изменение.

Уравнения Эренфеста:

$$\Delta C_p = -T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^2 \cdot \Delta\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \Delta\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

устанавливают связь между скачками C_p, β_T и α и наклоном кривой равновесия в точке фазового перехода второго рода.

К фазовым переходам второго рода относятся:

а) переход вещества из ферромагнитного в парамагнитное состояние в точке Кюри, сопровождающийся коренным изменением структуры металла;

б) сверхпроводимость, открытая в 1911 г. Камерлинг — Оннесом и заключающаяся в том, что при определенной температуре, близкой к абсолютному нулю температуры, сопротивление металла падает до нуля;

в) сверхтекучесть, состоящая в том, что при температуре 2,9° К жидкий гелий разделяется на две фазы — He_I и He_{II}, причем последняя фаза не обладает сдвиговой вязкостью.

§ 30. Поверхностное натяжение жидкости

Поскольку молекула на поверхности жидкости лишь со стороны жидкости окружена молекулами жидкости, потенциальная энергия такой молекулы вдвое выше, чем у молекул внутри жидкости. Стремясь занять положе-

ние с минимальной потенциальной энергией, молекулы жидкости на поверхности стремятся втянуться внутрь объема. Жидкость под действием внутренних сил молекулярного притяжения стремится уменьшить свою свободную поверхность.

Опыт Плато. Капля жидкости взвешена в другой жидкости с таким же удельным весом, что и у первой (например, трансформаторного масла в водном растворе спирта). Оказалось, что при этом капля жидкости принимает сферическую форму, т. е. форму, для которой при одном и том же объеме поверхность минимальна.

На границу свободной поверхности жидкости действует сила поверхностного натяжения жидкости, направленная касательно к поверхности жидкости и нормально к границе свободной поверхности:

$$\Delta F_{\text{пов нат}} = \alpha \Delta l,$$

где Δl — элемент длины контура границы,
α — коэффициент поверхностного натяжения.

Работа увеличения свободной поверхности жидкости на величину ΔS равна

$$\Delta A = \alpha \Delta S.$$

Коэффициент поверхностного натяжения равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность жидкости. В то же время коэффициент поверхностного натяжения равен работе увеличения поверхности жидкости на единицу поверхности, α есть свободная энергия единицы площади поверхности жидкости.

Для большинства жидкостей поверхностное натяжение убывает с температурой линейно по закону:

$$\alpha = \frac{k}{v^{2/3}} \cdot (T_{\text{кр}} - T),$$

где v — молярный объем,
k — постоянная, для недиссоциированных жидкостей $k \simeq 2{,}1$.

Поверхностное натяжение

Приведены значения при 20°C, в *дин/см*, на границе соприкосновения жидкости с воздухом

Амилацетат	24,7	Концентриров. H_2SO_4	55
Бензин	28,9	» HNO_3	41
Вода при 5°C	74,92	Оливковое масло	33
Глицерин	64	Скипидар	27
Керосин	26	Хлороформ	27,2

Для каждого *г* безводной соли на 100 *см*³ воды (приблизительное значение) следует прибавить к значению для дистиллированной воды:

$CaCl_2$	0,29	KCl	0,19	NaCl	0,28
$CuSO_4$	0,11	KOH	0,32	NaOH	0,50
				NH_4Cl	0,26

§ 31. Смачивание

Если молекулы жидкости, соприкасающиеся со стенкой сосуда, взаимодействуют с молекулами твердого тела сильнее, чем между собой, то жидкость будет стремиться увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом и растечься по нему. Говорят, что жидкость смачивает твердое тело,

Если взаимодействие молекул жидкости больше, чем молекул жидкости и твердого тела, жидкость стремится сократить поверхность соприкосновения с твердым телом и является несмачивающей.

Например, вода смачивает стекло, а ртуть не смачивает.

Процесс растекания жидкости по поверхности твердого тела, которое она смачивает, или процесс стягивания жидкости на поверхности, которую она не смачивает, прекращается, когда угол θ между свободной поверхностью

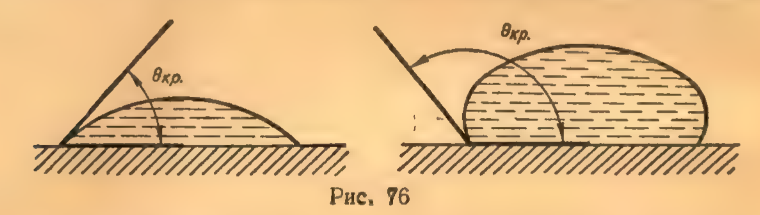


Рис. 76

жидкости и поверхностью твердого тела достигает предельного значения, называемого **краевым углом**.

Для случая смачивания краевой угол острый, для несмачивания — тупой (рис. 76).

§ 32. Капиллярные явления

В тонких пленках и узких сосудах проявляются капиллярные явления, обусловленные тем, что благодаря силам поверхностного натяжения давление внутри жидкости отличается на некоторую величину $\Delta p_{доп}$ от внешнего давления газа над поверхностью жидкости.

В случае произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны дополнительное давление определяется формулой Лапласа:

$$\Delta p_{доп} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности.

В случае сферической поверхности радиуса R:

$$\Delta p_{доп} = \frac{2\alpha}{R}.$$

В узких трубках (капиллярах) вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок сосуда кривизна жидкой поверхности (мениск) становится значительной. Дополнительное давление вызывает заметное поднятие или опускание уровня жидкости.

Поверхностное натяжение некоторых жидкостей $\sigma\ \frac{дн}{см} \left(\frac{эрг}{см^2}\right)$ **при различных температурах.**

Вещество	0°C	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C
Анилин $C_6H_5NH_2$	45,42	44,38	43,30	42,24	41,20	40,1	38,4
Ацетон CH_3COCH_3	25,21	25,0	23,32	22,01	21,16	19,9	18,61
Вода H_2O	75,64	74,22	72,75	71,18	69,56	67,91	66,18
Гексан C_6H_{14}	20,52	19,4	18,42	17,4	16,35	15,3	14,2
Метиловый спирт CH_3OH	24,5	23,5	22,6	21,8	20,9	20,1	19,3

Вещество	0°C	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C
Нитробензол $C_6H_5NO_2$ . .	46,4	45,20	43,90	42,7	41,5	40,2	39,0
Ртуть Hg	—	—	471,6	—	468,2	—	—
Толуол $C_6H_5CH_3$	30,8	29,6	28,53	27,40	26,2	25,0	23,8
Уксусная кислота CH_3COOH	29,7	28,8	27,63	26,8	25,8	24,65	23,8
Хлорбензол C_6H_5Cl	36,0	34,8	33,28	32,3	31,1	29,9	28,7
Четыреххлористый углерод CCl_4	29,38	28,05	26,70	25,54	24,41	23,22	22,38
Этиловый спирт C_2H_5OH .	24,05	23,14	22,32	21,48	20,60	19,80	19,01

§ 33. Кипение жидкости

Кипением жидкости называется процесс испарения жидкости, происходящий не только с ее свободной поверхности, но и по всему объему жидкости внутрь образующихся при этом пузырьков пара. Пузырьки пара в жидкости быстро увеличиваются, всплывают на поверхность жидкости и лопаются, вызывая бурление жидкости.

Давление извне на поверхность пузырька газа в жидкости складывается из внешнего давления на жидкость p_0, гидростатического давления вышележащих слоев жидкости $p_ж$ и давления Δp, вызванного поверхностным натяжением в жидкой пленке на границе пузырька:

$$p = p_0 + p_ж + \Delta p = p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r},$$

где r — радиус пузырька,

h — расстояние от центра пузырька до поверхности жидкости,

ρ — плотность жидкости и

α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Условие наступления кипения жидкости заключается в том, что давление насыщенного пара $p_{нас}$ внутри пузырька должно быть не меньше давления на поверхность пузырька извне:

$$p_{нас} \geqslant p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r}.$$

При выполнении этого условия происходит рост пузырька, если условие не выполнено, происходит конденсация пара в пузырьке и его «захлопывание».

Поскольку для маленьких пузырьков насыщенного пара роль последнего слагаемого велика, жидкость для наступления кипения необходимо нагреть до высокой температуры, при которой давление насыщенного пара внутри пузырьков обусловит их рост.

Обычно в жидкости имеются пузырьки растворенного в ней газа, являющиеся центрами парообразования, поскольку для них роль члена $\frac{2\alpha}{r}$ мала. Если высота сосуда невелика, можно пренебречь и гидростатическим давлением на пузырек вышележащей жидкости. Приближенное условие наступления кипения жидкости поэтому $p_{нас} = p_0$.

Температура жидкости, при которой давление ее насыщенного пара $p_{нас}$ равно внешнему давлению p_0 на жидкость, называется температурой кипения.

Температура жидкости, кипящей при постоянном давлении p_0, не изменяется, а все подводимое к ней тепло расходуется на работу отрыва молекул от жидкости и переход их в фазу пара.

Количество теплоты $\lambda_{кип}$, необходимое для испарения единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называется удельной теплотой парообразования. Эта теплота убывает с увеличением температуры кипения и становится равной нулю при критической температуре. Например, для воды,

$t_{кип}$ °C	100	150	200	250	300	350	374	374,1
$\lambda\left(\frac{кал}{г}\right)$	539,0	505,0	463,5	409,7	335,4	213,3	27,4	0

Давление и плотность насыщенного водяного пара при различной температуре

t °C	p *мм рт. ст.*	$\rho\ \frac{г}{м^3}$	t °C	p *мм рт. ст.*	$\rho\ \frac{г}{м^3}$
—20	0,772	0,88	25	23,756	23,0
—18	0,935	1,05	26	25,209	24,4
—16	1,128	1,27	27	26,739	25,8
—14	1,357	1,51	28	28,349	27,2
—12	1,627	1,80	29	30,043	28,7
—10	1,946	2,14	30	31,824	30,3
— 8	2,321	2,54	31	33,695	32,0
— 6	2,761	2,99	32	35,663	33,8
— 4	3,276	3,51	33	37,729	35,6
— 2	3,879	4,13	34	39,898	37,6
0	4,579	4,84	35	42,175	39,6
2	5,294	5,60	36	44,563	41,7
4	6,101	6,40	37	47,067	44,0
6	7,013	7,3	38	49,692	46,2
8	8,045	8,3	39	52,442	48,6
10	9,209	9,4	40	55,324	51,2
11	9,844	10,0	45	71,88	65,6
12	10,518	10,7	50	92,51	83,2
13	11,231	11,4	55	118,04	104,6
14	11,987	12,1	60	149,38	130,5
15	12,78	12,8	65	187,54	161,5
16	13,634	13,6	70	233,71	198,4
17	14,530	14,5	75	289,13	242,1
18	15,477	15,4	80	355,12	293,8
19	16,477	16,3	85	433,62	354,1
20	17,535	17,3	90	525,76	424,1
21	18,650	18,3	95	633,90	505,0
22	19,847	19,4	100	760,00	598,0
23	21,068	20,6	110	1 074,26	827,0
24	22,377	21,8	120	1 489,14	1 122,0

критическая температура которой 374,1° С, зависимость удельной теплоты парообразования от температуры кипения приведена в таблице.

Кипение жидкости принадлежит к фазовым переходам первого рода (см. стр. 149) и описывается уравнением Клапейрона — Клаузиуса.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Предмет статистической физики. Статистическая физика представляет собой раздел физики, занимающийся изучением систем, состоящих из весьма большого числа частиц. Статистическая физика использует методы теории вероятностей, поскольку точное решение уравнений движения (даже, если они известны) для большого числа частиц невозможно.

Термодинамическая вероятность. Математика определяет вероятность как отношение числа случаев, благоприятствующих наступлению данного события к общему числу возможных случаев. Однако при решении задач статистической физики общее число возможных случаев определить затруднительно.

Термодинамической вероятностью W называется число случаев, благоприятствующих наступлению данного события. Общее число возможных случаев в каждой физической задаче является константой. Макросостояние системы из N частиц с общей энергией E определяется в термодинамике экспериментально определимыми параметрами: давлением, объемом, температурой и т. п. При определенных значениях этих параметров частицы в системе могут быть различными способами распределены по группам, имеющим одну и ту же энергию. Каждое из состояний системы с определенным распределением в ней частиц в пространстве и по значениям энергии называется микросостоянием. Одному макросостоянию отвечает множество микросостояний. Термодинамическая вероятность определяет число микросостояний, соответствующих одному данному макросостоянию.

Микросостояние и различные статистики. Различные статистические подходы к различным физическим задачам связаны с разными способами распределения частиц по возможным состояниям и, следовательно, с различным количеством микросостояний в этих задачах. Например, если имеются две частицы, находящиеся в двух энергетических состояниях с энергиями ε_1 и ε_2, то число микросостояний зависит от того, обладают ли частицы индивидуальностью, т. е. различимы ли они, и от того, могут ли они одновременно находиться в одном и том же состоянии.

По статистике Больцмана частицы обладают индивидуальностью, поэтому возможны случаи: 1) две частицы в первом состоянии; 2) две частицы во втором состоянии; 3) первая частица в первом состоянии, а вторая — во втором; 4) первая частица во втором состоянии, а вторая — в первом.

В статистике Бозе — Эйнштейна частицы неразличимы, поэтому возможны случаи: 1) две частицы в первом состоянии; 2) две частицы во втором состоянии; 3) одна частица в первом состоянии и одна частица во втором состоянии.

В статистике Ферми — Дирака учитывается принцип Стонера — Паули: в одном состоянии может находиться только одна частица. В рассматриваемом примере число возможных распределений равно единице: одна частица в первом состоянии и одна во втором состоянии.

§ 34. Статистика Больцмана

Классическая статистика получила развитие в работах Клаузиуса, Максвелла, Больцмана и других ученых. Если имеется система из N частиц и i энергетических ячеек или групп с энергиями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$, то число способов, которыми можно разместить N частиц по ячейкам так, чтобы в первой было n_1 частиц, во второй n_2 и т. д., находится методами теории сочетаний:

$$W = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_i!}.$$

Поскольку энтропия системы S и термодинамическая вероятность W связаны согласно теореме Больцмана выражением:

$$S = k \ln W,$$

где k — постоянная Больцмана, статистическое выражение энтропии S имеет вид:

$$S = k \ln \frac{N!}{\prod_i n_i!},$$

где Π — символ произведения.

Предполагая, что не только число частиц N в системе, но и число частиц в каждой ячейке весьма велико по сравнению с единицей (последнее предположение неверно при больших температурах), и применяя формулу Стирлинга $n! \simeq e^{-n} \cdot n^n$, получим для термодинамической вероятности:

$$W \approx \frac{N^N e^{-N}}{n_1^{n_1} n_2^{n_2} \ldots n_i^{n_i} e^{-(n_1+n_2+\ldots+n_i)}}$$

и, поскольку сумма всех частиц постоянна: $n_1 + n_2 + \ldots + n_i = N$, будем иметь:

$$W \approx \frac{N^N e^{-N}}{e^{-N} \prod_i n_i^{n_i}} = \frac{N^N}{\prod_i n_i^{n_i}}.$$

Приближенное выражение для энтропии S имеет вид:

$$S \simeq k \ln \frac{N^N}{\prod_i n_i^{n_i}} = k\left(N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i\right).$$

З а к о н р а с п р е д е л е н и я. Закон распределения энергии между частицами, т. е. выражение, показывающее, какое число частиц n_i находится в определенной энергетической ячейке ε_i, иными словами, имеет определенную энергию, может быть установлен в предположении, что термодинамическому равновесию отвечает наиболее вероятное распределение частиц по энергиям. В соответствии с точкой зрения термодинамики энтропия и термодинамическая вероятность имеют в состоянии равновесия максимум. Система предполагается изолированной от внешних воздействий, и, следовательно, справедлив закон сохранения энергии в форме:

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \text{const}.$$

Условие постоянства числа частиц в системе записывается в виде:

$$N = \sum_i n_i = \text{const}.$$

Задачи на условный экстремум решаются методом Лагранжа, в соответствии с которым выражение для энтропии S и указанные выше дополнительные условия варьируются, полученные из дополнительных условий выражения умножаются на неопределенные множители α и β соответственно, после чего все три выражения суммируются и сумма полагается равной нулю.

В рассматриваемом случае:

$$\delta S = k\delta\left(N \ln N - \sum_i n_i \ln N_i\right) = -k\sum_i (\ln n_i + 1)\delta n_i = 0,$$

$$-\alpha\delta N = -\alpha\sum_i \delta n_i = 0; \quad -\beta\delta E = -\beta\sum_i \varepsilon_i \delta n_i = 0.$$

Суммируя последние равенства при условии, что $\ln n_i \gg 1$, получим:

$$-\sum_i (\ln n_i + \alpha + \beta\varepsilon_i)\delta n_i = 0,$$

откуда

$$\ln n_i + \alpha + \beta\varepsilon_i = 0,$$

или

$$n_i = e^{-\alpha-\beta\varepsilon_i}.$$

Внося выражение числа частиц n_i, имеющих одинаковую энергию, в выражение для энтропии S, получим

$$S = k\left(N \ln N + \alpha\sum_i n_i + \beta\sum_i n_i\varepsilon_i\right).$$

Поскольку $\sum_i n_i\varepsilon_i = E$ и $\sum_i n_i = N = e^{-\alpha}\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}$ выражение S можно переписать так

$$S = k(N \ln N + \alpha N + \beta E) = kN \ln \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} + k\beta E.$$

Сумма состояний $\sum_{i=1}^{M} e^{-\beta\varepsilon_i}$, где M — число фазовых ячеек, должна зависеть от объема V системы, так как число энергетических ячеек зависит от объема.

Определяя дифференциал энтропии:

$$dS = k \ln \sum_{i=1}^{M} e^{-\beta\varepsilon_i} dN + kNd \ln \sum_{i=1}^{M} e^{-\beta\varepsilon_i} + k\beta\, dE$$

и сравнивая его с выражением дифференциала энтропии в термодинамике:

$$dS = \frac{dE + p\, dV - \mu\, dN}{T},$$

где μ — химический потенциал,
p — давление,
T — температура,
можно определить физический смысл постоянных α и β, а также числа фазовых ячеек;

$$k\beta = \frac{1}{T}, \quad \beta = \frac{1}{kT},$$

$$\mu = -kT \ln \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} = -kT\alpha - kT \ln N.$$

$$p = NkT\frac{d \ln \sum e^{-\beta\varepsilon_i}}{dV},$$

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}} = A.$$

Закон распределения частиц по энергиям в статистике Больцмана может быть получен, если в выражение для n_l, приведенное выше, внести значения α и β.

Он имеет вид:

$$n_l = e^{-\alpha} e^{-\beta \varepsilon_l} = Ae^{-\frac{\varepsilon'_l}{kT}}.$$

§ 35. Фазовое пространство

Состояние частицы в пространстве может быть в каждый момент времени задано указанием трех ее геометрических координат x, y, z и трех динамических координат — компонент импульса p_x, p_y и p_z. Описание движения частицы удобно проводить в воображаемом фазовом пространстве. Фазовое пространство для частицы имеет шесть осей: три оси геометрических координат x, y и z и три оси динамических координат p_x, p_y и p_z. Каждой точке фазового пространства отвечает определенная энергия. Например, для гармонического осциллятора уравнение энергии имеет вид:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha^2}{2} x^2 = E, \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{\alpha^2}{2E} x^2 = 1.$$

В фазовом пространстве траекториями гармонического осциллятора являются кривые равных энергий — эллипсы, поскольку написанное выше уравнение есть уравнение эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{2mE} \quad \text{и} \quad b = \frac{\sqrt{2E}}{\alpha}, \text{ где } \alpha = m\omega^2.$$

Площадь эллипса:

$$\sigma = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{4mE^2}{\alpha^2}} = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu},$$

где ν — частота осциллятора.

В случае квантового осциллятора существует лишь счетное множество эллипсов, соответствующих энергиям $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому фазовое пространство квантового осциллятора разделено на ряд областей, каждая из которых описывает одно определенное состояние осциллятора с энергией E_n.

Область, заключенная между двумя эллипсами и представляющая минимальный объем фазового пространства, называется фазовой ячейкой или элементом фазового пространства.

Объем фазовой ячейки в двумерном фазовом пространстве равен постоянной Планка h:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{E_2 - E_1}{\nu} = \frac{h\nu}{\nu} = h.$$

Каждая новая степень свободы повышает порядок измерения ячейки фазового объема на h. Так, единица фазового объема плоского ротатора равна h^2, единица фазового объема пространства идеального одноатомного газа равна h^3. В общем случае объем фазовой ячейки равен h^i, где i — число пар сопряженных координат (геометрических и импульсов), необходимых для определения состояния частицы.

§ 36. Сравнение статистического метода Максвелла—Больцмана с методом Гиббса

Совокупность событий, подлежащих статистическому рассмотрению, называется статистическим ансамблем, а сами события — членами ансамбля. Свойства ансамбля определяются законом распределения того или иного свойства (например, энергии) между членами ансамбля, а также средними значениями величин, характеризующих эти свойства.

Различие между методами Максвелла — Больцмана и Гиббса состоит в выборе ансамбля.

В методе Максвелла — Больцмана членом ансамбля является частица, например, молекула идеального газа. Однако применение метода Максвелла—Больцмана к системе частиц, взаимодействующих друг с другом, наталкивается на трудности, так как приходится вводить в рассмотрение столько элементов фазового пространства, сколько частиц взаимодействует между собой.

В методе Гиббса единицей ансамбля является коллектив частиц, реальная макроскопическая система. Макроскопические свойства коллектива представляют собой средние значения по времени, относящиеся к одному члену ансамбля Гиббса. В то же время знание закона распределения для данного ансамбля дает возможность вычислять лишь средние по ансамблю.

Основная гипотеза статистической физики (эргодическая гипотеза) состоит в том, что среднее по временному ансамблю предполагается равным среднему по ансамблю Гиббса. Этим предполагается, что историю одного члена ансамбля можно заменить одновременным рассмотрением многих членов этого ансамбля. Статистическая физика вычисляет средние по ансамблям Гиббса и сравнивает их с опытом, хотя экспериментально измеренные средние величины являются средними по времени для одного члена ансамбля.

§ 37. Распределение Гиббса

Ансамбль, состоящий из тождественных систем с практически равными энергиями, называется микроканоническим ансамблем. Подобные ансамбли отображают свойства изолированных систем.

Ансамбль, состоящий из систем, обменивающихся энергией с обширной системой, запас энергии которой настолько велик, что практически не изменяется при обмене, называется каноническим ансамблем. Большая система называется термостатом.

Пусть $W(\varepsilon_i)$ — вероятность того, что квазизамкнутая система находится в состоянии с энергией ε_i, и $W(E_0)$ — вероятность того, что термостат находится в состоянии с энергией E_0. Учет сказанного выше о характере обмена между квазизамкнутой системой и термостатом позволяет написать для энергии всей системы E равенство:

$$E = E_0 + \varepsilon_i \approx \text{const}.$$

Воспользовавшись теоремой об умножении вероятностей, найдем, что вероятность нахождения системы в состоянии с энергией ε_i, а термостата с соответствующей энергией $E_0 = E - \varepsilon_i$ есть

$$W_i = W(E_0)\, W(\varepsilon_i).$$

Вероятность состояния квазизамкнутой системы $W(\varepsilon_i)$ зависит от числа состояний системы с энергией ε_i, равного $\Omega(\varepsilon_i)$, поэтому:

$$W(\varepsilon_i) \sim \Omega(\varepsilon_i).$$

Вероятность состояния термостата $W(E_0)$ зависит от числа состояний термостата с энергией E_0, равного $\Omega(E-\varepsilon_l)$, поэтому

$$W(E_0) \sim \Omega(E-\varepsilon_l).$$

Учитывая, что число состояний является мультипликационной функцией (число состояний системы равно произведению числа состояний независимых частей системы), а энергия аддитивна (энергия системы равна сумме энергий ее частей), представим число состояний термостата с энергией $E-\varepsilon_l$ в виде:

$$\Omega(E-\varepsilon_l) = e^{\sigma(E-\varepsilon_l)},$$

где $\sigma(E-\varepsilon_l)$ функция аргумента $E-\varepsilon_l$, также аддитивная. Разлагая $\sigma(E-\varepsilon_l)$ в ряд по степеням малой величины ε_l и ограничиваясь первым членом, получим:

$$\sigma(E-\varepsilon_l) \approx \sigma(E) - \frac{\partial\sigma}{\partial E}\cdot\varepsilon_l = \sigma(E) - \frac{\varepsilon_l}{\theta}.$$

Поэтому число состояний термостата с энергией E_0 равно

$$\Omega(E-\varepsilon_l) \approx e^{\sigma(E)}\cdot e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}}.$$

Вероятность нахождения квазизамкнутой (слабо взаимодействующей) системы в одном из $\Omega(\varepsilon_l)$ состояний с энергией, заключенной между ε_l и $\varepsilon_l+\delta\varepsilon_l$, равна

$$W_l = \text{const}\cdot e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}}\,\Omega(\varepsilon_l).$$

Определение вероятности позволяет получить, суммируя по всем возможным состояниям, условие нормировки

$$\sum W_l = 1.$$

Отсюда

$$\text{const} = \frac{1}{\sum e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}}\,\Omega(\varepsilon_l)}.$$

Распределение вероятностей, указанное в 1901 году Гиббсом, принимает вид:

$$W_l = \frac{e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}}\,\Omega(\varepsilon_l)}{\sum e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}}\cdot\Omega(\varepsilon_l)}.$$

Оно называется каноническим распределением Гиббса.

Величина Θ называется модулем распределения или статистической температурой.

Величина

$$z = \sum e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}}\,\Omega(\varepsilon_l)$$

называется суммой состояний или суммой по состояниям.

С введением суммы состояний распределение Гиббса записывается:

$$W_l = \frac{1}{z}\,e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}}\,\Omega(\varepsilon_l).$$

Распределение Гиббса позволяет вычислять средние значения любой величины, зависящей от состояния системы. Если $L(\varepsilon_l)$ — значение этой величины для состояния с энергией ε_l, то среднее значение:

$$\overline{L} = \sum L(\varepsilon_l) w_l = \frac{1}{z} \sum L(\varepsilon_l) e^{\frac{-\varepsilon_l}{\theta}} \Omega(\varepsilon_l).$$

Статистическая температура. Модуль распределения θ характеризует свойства всего собрания систем, а не выделенной части. Модуль распределения θ существенно положителен, так как вероятность состояния с энергией ε_l должна убывать с ростом энергии ε_l, а следовательно θ в распределении Гиббса положительно.

Если два канонических ансамбля соединены через перегородку, идеально проводящую теплоту, то системы должны придти в состояние равновесия. Но они образуют новый канонический ансамбль лишь в том случае, если показатель вероятности системы, включающей обе рассматриваемые системы, равен сумме показателей вероятности этих систем.

Это возможно только при $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$. Таким образом, равенство модулей распределения θ в статистической физике эквивалентно равенству температур T в термодинамике:

$$\theta = kT.$$

§ 38. Статистика Бозе — Эйнштейна

Квантовая статистика Бозе — Эйнштейна справедлива для частиц, не подчиняющихся запрету Паули. Ее исходными положениями являются дискретность энергетических уровней и неразличимость частиц.

Для N частиц, образующих систему с энергией E, в предположении, что энергии частиц могут принимать значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, а число элементарных ячеек, соответствующих одному энергетическому уровню ε_l, равно z_l, число способов распределения n_l частиц по ячейкам, считая различными лишь размещения, отличающиеся числом частиц или величиной энергии, является равным:

$$W_l = \frac{(n_l + z_l - 1)!}{n! (z_l - 1)!}.$$

Каждому заданному распределению в данной энергетической области l соответствует $\frac{n_j + z_j - 1}{n_j! (z_j - 1)!}$ распределений в каждой из остальных областей j, поэтому полное число способов распределения энергии по n_l частиц получится, если перемножить все возможности распределения энергии между частицами во всех энергетических областях. Термодинамическая вероятность, поэтому равна:

$$W = \prod_l W_l = \prod_l \frac{(n_l + z_l - 1)!}{n_l! (z_l - 1)!}.$$

Энтропия S системы равна:

$$S = k \sum_l \ln \frac{(n_l + z_l - 1)!}{n_l! (z_l - 1)!}.$$

Использование условий постоянства числа частиц в системе $\sum_i n_i = N =$ $= \text{const}$ и постоянства энергии системы $\sum_i n_i \varepsilon_i = E$ позволяет найти условный экстремум энтропии методом Лагранжа аналогично тому, как это делалось при получении закона распределения в статистике Больцмана.

Через постоянные α и β, используемые в методе Лангранжа, выражение энтропии S записывается:

$$S = \alpha k N + \beta k E - k \sum_i (z_i - 1) \ln \left(1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}\right).$$

Закон распределения частиц по энергиям имеет вид:

$$n_i = \frac{z_i - 1}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1}.$$

Дифференцируя выражение энтропии S по числу частиц N и по энергии E:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_E = k\alpha, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = k\beta$$

и сравнивая полученные выражения с производными, известными из термодинамики:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{p,T} = -\frac{\mu}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T},$$

можно определить значения постоянных α и β:

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

использованием этих значений выражение энтропии в статистике Бозе — Эйнштейна записывается:

$$S = -\frac{N\mu}{T} + \frac{E}{T} + k \sum_i (z_i - 1) \ln \left(1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}\right).$$

Выражение

$$\sum_i (z_i - 1) \ln \left(1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}\right)$$

является квантовым аналогом логарифма суммы состояний.

Закон распределения в статистике Бозе — Эйнштейна имеет вид:

$$n_i = \frac{z_i - 1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}.$$

Часто пренебрегают единицей в числителе по сравнению с z_i. Следует заметить, что число мест в энергетической ячейке z_i не может быть меньше двух, так как при z_i, равном 1, ячейка пуста.

Для систем с непостоянным числом частиц (случай излучения, где число фотонов непостоянно) условие $\sum_i n_i = \text{const}$ не имеет места. Закон распределения имеет вид:

$$n_i = \frac{z_i - 1}{e^{\frac{\varepsilon_i}{\kappa T}} - 1}.$$

Он отличается от приведенного выше тем, что здесь $\alpha = 0$. Поскольку в случае излучения $\mu = 0$, термодинамика подтверждает это заключение.

§ 39. Статистика Ферми — Дирака

Квантовая статистика Ферми — Дирака справедлива для частиц, подчиняющихся принципу Паули. В каждой энергетической ячейке может быть *не более одной* частицы.

Число способов, которыми можно распределить в энергетической области ε_i, содержащей z_i элементарных ячеек, n_i частиц таким образом, чтобы в каждой ячейке находилось не более одной частицы, равно:

$$W_i = \frac{z_i!}{n_i!\,(z_i - n_i)!}.$$

Каждое распределение для данного энергетического уровня E_i может быть проведено при любых возможных распределениях на других энергетических уровнях, поэтому общее число распределений находится перемножением числа распределений для всех уровней. Термодинамическая вероятность W, равная полному числу способов распределения n_i частиц по z_i ячейкам, соответствующим ε_i, уровней энергии определяется в виде:

$$W = \prod_i \frac{z_i!}{n_i!\,(z_i - n_i)!}.$$

Замена факториалов по формуле Стирлинга приводит к равенству:

$$W = \prod_i \frac{z_i^{z_i}}{n_i^{n_i}\,(z_i - n_i)^{z_i - n_i}}.$$

Энтропия S записывается в виде:

$$S = k \sum_i [\ln z_i - n_i \ln n_i - (z_i - n_i) \ln (z_i - n_i)].$$

Определение максимума энтропии методом Лагранжа посредством варьирования последнего выражения и условий постоянства энергии и числа частиц приводит к равенствам:

$$\delta S = k \sum_i [-\ln n_i + \ln (z_i - n_i)]\,\delta n_i = 0;$$

$$-\alpha\delta n = -\alpha \sum_i \delta n_i = 0; \quad -\beta\delta E = -\beta \sum_i \varepsilon_i\,\delta n_i = 0.$$

Сумма вариаций:

$$\sum_i \left(\ln \frac{z_i - n_i}{n_i} - \alpha - \beta\varepsilon_i\right) \delta n_i = 0.$$

Закон распределения в статистике Ферми — Дирака:

$$n_i = \frac{z_i}{e^{\alpha + \beta\varepsilon_i} + 1}.$$

Преобразуем выражение энтропии к виду:

$$S = kN\alpha + k\beta E + k \sum_i z_i \ln\left(1 + e^{-\alpha - \beta\varepsilon_i}\right),$$

дифференцируя полученное выражение по энергии E и числу частиц N, можно определить постоянные α и β, если сравнить частные производные с их выражениями в термодинамике. Получим:

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Распределение Ферми — Дирака имеет вид:

$$n_i = \frac{z_i}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}.$$

Выражение энтропии записывается в форме:

$$S = -N\frac{\mu}{T} + \frac{E}{T} + k \sum_i z_i \ln\left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}\right).$$

§ 40. Сравнение различных статистик

На рис. 77 приводится ход изменения числа частиц n_i с определенной энергией ε согласно распределениям Максвелла — Больцмана, Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака.

Распределение Бозе — Эйнштейна наиболее чувствительно к уменьшению энергии, для него с уменьшением энергии число частиц растет наиболее резко.

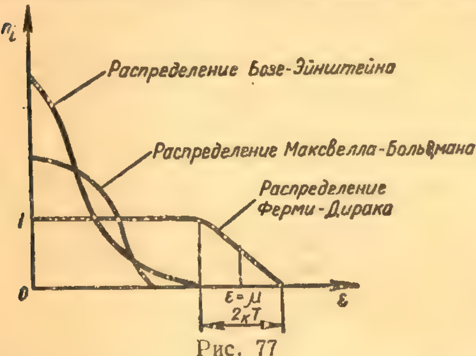


Рис. 77

Распределение Ферми — Дирака при малых энергиях слабо зависит от величины энергии и фактически приводит к постоянному числу частиц. Зависимость числа частиц от энергии для него сказывается лишь при энергиях, близких к величине химического потенциала μ, и проявляется в энергетическом интервале шириной $2kT$.

В распределении Бозе — Эйнштейна частицы с малыми энергиями встречаются чаще, а в распределении Ферми — Дирака реже, чем в распределении Максвелла — Больцмана. Вследствие этого давление в газе Бозе меньше, а в газе Ферми больше, чем в газе Максвелла.

Связь между давлением p, объемом V и полной энергией $\overline{E}$ идеального газа одинакова независимо от того, какой статистике подчиняется газ:

$$pV = \frac{2}{3}\overline{E}.$$

§ 41. Применение статистики Бозе — Эйнштейна к фотонному газу

Число фазовых ячеек z_i в элементе фазового пространства $dx \cdot dy \cdot dz \times$ $\times dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$ равно отношению величины элемента к h^3:

$$Z_i = \frac{dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z}{h^3}.$$

Для выражения произведения дифференциалов импульсов через кинетическую энергию ε целесообразно перейти к сферическим координатам (p, θ, φ):

$$p_x = p \sin\theta \cos\varphi, \quad p_y = p \sin\theta \sin\varphi, \quad p_z = p \cos\theta.$$

Кинетическая энергия ε и импульс p связаны равенством:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m},$$

откуда $dp = \dfrac{\sqrt{2m}\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\,d\varepsilon}{2}$ и $p^2\,dp = \dfrac{(2m)^{3/2}\,\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{2}$.

Число энергетических ячеек z_i равно:

$$z_i = \frac{dV \cdot p^2\,dp \sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{h^3} = \frac{(2m)^{3/2}\,dV\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon \sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{2h^3}.$$

Число частиц газа, подчиняющегося статистике Бозе—Эйнштейна:

$$N = \sum_i n_i = \frac{(2m)^{3/2}}{2h^3}\int_0^V dV \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1} =$$

$$= \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1}.$$

Полная энергия:

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1}.$$

Излучение рассматривается как идеальный газ, состоящий из атомов света — фотонов. Энергия фотона ε равна $h\nu$, импульс фотона p равен $\dfrac{h\nu}{c}$, масса фотона согласно релятивистскому соотношению между энергией и массой равна $\dfrac{h\nu}{c^2}$.

Учитывая, что данной частоте ν соответствуют два фотона, отвечающие свету, поляризованному влево и вправо, из приводимого выше выражения для полного числа частиц можно найти выражение для числа фотонов dN_ν, которым соответствуют частоты в интервале от ν до $\nu + d\nu$:

$$dN_\nu = \frac{8\pi V p^2\, dp}{\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right) h^3}.$$

В последней формуле μ для излучения равно нулю.

Энергия равновесного излучения черного тела в указанном интервале частот:

$$E_\nu = \varepsilon_\nu \cdot dN_\nu = \frac{8\pi V h\nu^3\, d\nu}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)}.$$

Плотность энергии в единичном интервале частот можно получить, разделив энергию на объем V излучения и ширину интервала частот $d\nu$:

$$\frac{E_\nu}{V d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Последнее равенство называется формулой Планка (Макс Планк, 1858—1947).

Полная энергия излучения по всем частотам от 0 до ∞:

$$E = \int_0^\infty E_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3\, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4 = \sigma T^4,$$

где $\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3}$ называется константой Стефана — Больцмана. Выражение закона Стефана — Больцмана, полученное статистическим путем, отличается от полученного в термодинамике тем, что постоянная σ оказалась выраженной через фундаментальные постоянные.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

Электричество и магнетизм

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 1. Электрический заряд

Большое количество явлений в природе связано с проявлением особого свойства элементарных частиц вещества, а следовательно, в ряде случаев и составленных из них макроскопических тел — наличия у них электрического заряда. Эти явления были названы электрическими и магнитными.

Слово «электричество» происходит от греческого ἤλεκτρον — электрон (янтарь). Способность натертого янтаря приобретать заряд и притягивать легкие предметы была отмечена еще в античном мире.

Слово «магнетизм» происходит от названия города Магнезия в Малой Азии, вблизи которого были открыты свойства железной руды (магнитного железняка $FeO \cdot Fe_2O_3$) притягивать железные предметы и сообщать им магнитные свойства.

Учение об электричестве и магнетизме распадается на разделы:

а) учение о неподвижных зарядах и связанных с ними неизменных электрических полях — электростатика;

б) учение о равномерно движущихся зарядах — постоянный ток и магнетизм;

в) учение о неравномерно движущихся зарядах и создаваемых при этом переменных полях — переменный ток и электродинамика или теория электромагнитного поля.

§ 2. Электризация трением

Стеклянная палочка, натертая кожей, или эбонитовая палочка, натертая шерстью, приобретают при этом электрический заряд или, как говорят, электризуются.

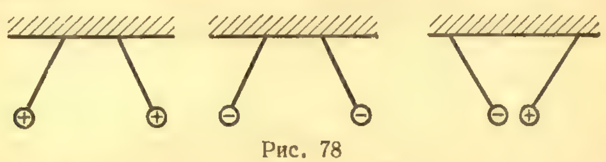


Рис. 78

Бузиновые шарики (рис. 78), к которым прикоснулись стеклянной палочкой, отталкиваются. Бузиновые шарики, к которым прикоснулись эбонитовой палочкой, отталкиваются. Если же к одному из них прикоснуться эбонитовой, а к другому стеклянной палочкой, то они притянутся.

Следовательно, существуют два типа электрических зарядов. Заряды, возникающие на потертом кожей стекле, условились называть положитель-

ными (+). Заряды, возникающие на потертом шерстью эбоните, условились называть отрицательными (—).

Опыты показывают, что однозначные заряды (+ и +, либо — и —) отталкиваются, разноименные (+ и —) притягиваются.

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями, на которых рассматривается воздействие этого заряда на другие заряды. Точечный заряд является абстракцией, подобно материальной точке в механике.

§ 3. Закон взаимодействия точечных зарядов (Закон Кулона)

В 1785 г. французский ученый Огюст Кулон (1736—1806) на основании опытов с крутильными весами, на конце коромысла которых помещались заряженные тела, а затем к ним подносились другие заряженные тела, установил закон, определяющий силу взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2, расстояние между которыми $r_{1,2}$:

$$F_{1,2} = k\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}.$$

Сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами прямо пропорциональна произведению их величин и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Коэффициент k зависит от выбора единиц и свойств среды, в которой осуществляется взаимодействие зарядов.

Величина, показывающая во сколько раз сила взаимодействия между зарядами в данном диэлектрике меньше силы взаимодействия между ними в вакууме, называется диэлектрической постоянной или диэлектрической проницаемостью среды ε_r или $\varepsilon_{отн}$.

Закон Кулона для взаимодействия в среде: сила взаимодействия между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 прямо пропорциональна произведению их величин и обратно пропорциональна произведению диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{отн}$ на квадрат расстояния $r_{1,2}$ между зарядами:

$$F_{1,2} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{1,2}^2}.$$

В системе СГСЭ множитель «k» считается равным единице; в системе МКСА $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Закон Кулона в векторной форме. Если рассматривать вектор $\mathbf{r}_{1,2}$, направленный от первого заряда ко второму, сила $\mathbf{F}_{1,2}$, действующая со стороны первого заряда q_1 на второй заряд q_2:

$$\mathbf{F}_{1,2} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r r_{1,2}^3}\cdot\mathbf{r}_{1,2}.$$

Аналогично, сила $\mathbf{F}_{2,1}$, действующая на первый заряд со стороны второго:

$$\mathbf{F}_{2,1} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r r_{2,1}^3}\cdot\mathbf{r}_{2,1}.$$

Поскольку вектор $\mathbf{r}_{2,1}$, проведенный от второго заряда к первому $\mathbf{r}_{2,1} = -\mathbf{r}_{1,2}$, очевидно, что $\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$ и справедлив 3-й закон Ньютона.

§ 4. Закон сохранения электрического заряда

Закон сохранения электрического заряда был опытным путем установлен в 1843 г. английским физиком Майклом Фарадеем (1791—1867).

В электрически изолированной системе, т. е. в системе, которая не обменивается зарядами с внешними телами, алгебраическая сумма электрических зарядов является постоянной величиной:

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = \mathrm{const}.$$

Векторный анализ позволяет выразить закон сохранения электрического заряда для каждой точки пространства в виде соотношения:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

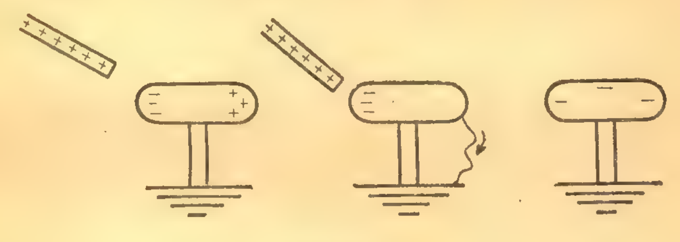


Рис. 79

Закон сохранения электрического заряда выполняется строго как в макроскопических взаимодействиях, например, при электризации тел трением, когда оба тела заряжаются численно равными зарядами противоположных знаков, так и в микроскопических взаимодействиях, в ядерных реакциях.

Электризация тела через влияние (электростатическая индукция).

При поднесении к изолированному проводнику заряженного тела происходит разделение зарядов на проводнике (рис. 79).

Если индуцированный на удаленном конце проводника заряд отвести в землю, а затем, сняв предварительно заземление, убрать заряженное тело, то оставшийся на проводнике заряд распределится по проводнику.

§ 5. Системы единиц измерения электрических и магнитных величин

Поскольку электромагнитные явления неразрывно связаны с механическими, в уравнения законов, описывающих электрические и магнитные взаимодействия материальных объектов, входят также механические величины (длина, масса, сила, энергия и т. д.), единицы измерения которых уже приняты ранее. Поэтому системы единиц измерения электрических и магнитных величин являются продолжениями в область электромагнитных явлений известных из механики систем единиц: практической МКС, либо физической СГС.

Как известно, для определения единицы измерения какой-либо величины в системе единиц используется физический закон, связывающий величину,

единица которой определяется, с величинами, единицы которых уже определены. Однако каждое из уравнений, описывающих электрические и магнитные явления, содержит не менее двух величин электрической или магнитной природы. Чтобы использовать подобное уравнение для определения единицы одной из этих величин, другую следует считать основной, т. е. ее единицу взять произвольным образом. В практической системе единиц МКСА за четвертую основную единицу принимается единица тока а м п е р (*а*), в системе единиц СГСЭ четвертой основной величиной является диэлектрическая проницаемость ε_0, а в системе единиц СГСМ — магнитная проницаемость μ_0 вакуума.

Практическая система единиц МКСА. Основными единицами системы МКСА являются единица длины метр (*м*), единица массы килограмм (*кг*), единица времени — секунда (*сек*) и единица тока — ампер (*а*).

Ампер есть сила неизменяющегося тока, который, будучи поддерживаем в двух параллельных прямолинейных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 *м* один от другого в пустоте, вызвал бы между этими проводниками взаимодействие силой, равной $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на один метр длины (ГОСТ 9867—61); формулировка принята XI Генеральной конференцией по мерам и весам. Ампер выбран произвольно, но так, чтобы он был просто связан с единицей тока, определенной на основе системы СГС. Поэтому ампер принят равным одной десятой доле единицы тока в системе единиц СГСМ.

Единица электрического заряда определяется из равенства, связывающего заряд q, прошедший через поперечное сечение проводника, с током I и временем t прохождения тока:

$$q = I \cdot t.$$

Единицей заряда в системе МКСА является к у л о н (*к*) — заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за 1 *сек* при токе силой в 1 *а*. Размерность кулона $[q] = сек \cdot а$.

Единица электрического потенциала в системе МКСА определяется из равенства, определяющего работу A электрического поля при перемещении электрического заряда q между точками с разностью потенциалов U:

$$A = qU.$$

Единицей потенциала в системе МКСА является в о л ь т (*в*) — разность потенциалов двух точек электрического поля при переносе заряда в 1 *к*, между которыми совершается работа в 1 *дж*. Размерность вольта

$$[U] = \frac{дж}{к} = \frac{м^2 \cdot кг \cdot сек^{-2}}{сек \cdot а} = м^2 \cdot кг \cdot сек^{-3} \cdot а^{-1}.$$

Единица электрической е м к о с т и C в системе МКСА определяется соотношением $C = \frac{q}{U}$, где q заряд, а U — потенциал проводника, если в этом соотношении положить заряд равным одному кулону, а потенциал — одному вольту. Единицей емкости является ф а р а д а (*ф*) — емкость проводника, сообщение которому заряда в 1 *к* приводит к увеличению потенциала на нем на 1 *в*. Размерность фарады:

$$[C] = \frac{сек \cdot а}{м^2 \cdot кг \cdot сек^{-3} \cdot а^{-1}} = м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot сек^4 \cdot а^2.$$

Единица сопротивления R в системе МКСА — о м определяется из формулы, выражающей закон Ома:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Ом (*ом*) есть сопротивление проводника, в котором при напряжении на его концах 1 *в* течет ток в 1 *а*. Размерность ома:

$$[R] = \frac{в}{a} = \frac{м^2 \cdot кг \cdot сек^{-3} \cdot a^{-1}}{a} = м^2 \cdot кг \cdot сек^{-3} \cdot a^{-2}.$$

Единица напряженности электрического поля E определяется из формулы, связывающей напряженность с разностью потенциалов U между точками, отстоящими на расстояние d и лежащими на линии напряженности:

$$E = \frac{U}{d}.$$

1 $\frac{\text{вольт}}{\text{метр}}\left(\frac{в}{м}\right)$ есть напряженность однородного электрического поля, в котором на расстоянии в 1 *м* вдоль линии напряженности потенциал поля изменяется на 1 *в*.

Единица диэлектрической проницаемости ε в системе МКСА определяется из формулы емкости плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$. Положив в ней расстояние между пластинами $d = 1$ *м*, площадь пластины $S = 1$ *м*^{2}, получим, что 1 единица МКСА (ε)

$$1МКСА\ (\varepsilon) = \frac{4\pi \cdot 1\ м \cdot \frac{1}{4\pi}\ ф}{1\ м^2} = 1\ \frac{ф}{м}.$$

$\frac{\text{Фарада}}{\text{метр}}\left(\frac{ф}{м}\right)$ — это диэлектрическая проницаемость диэлектрика, при заполнении которым промежутка между пластинами плоского конденсатора с площадью пластин по 1 *м*^{2} и расстоянием между пластинами 1 *м* конденсатор характеризуется емкостью $\frac{1}{4\pi}$ *ф*.

Размерность:

$$[\varepsilon] = \frac{[d]\,[c]}{[S]} = \frac{м \cdot м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot сек^4 \cdot a^2}{м^2} = м^{-3} \cdot кг^{-1} \cdot сек^4 \cdot a^2.$$

Свойства диэлектриков в физике и электротехнике описываются относительной диэлектрической проницаемостью, т. е. отношением диэлектрической проницаемости среды ε к диэлектрической проницаемости вакуума ε_0:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{отн} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Диэлектрическая проницаемость вакуума имеет ту же размерность, что и диэлектрическая проницаемость среды и, следовательно, относительная диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon_{отн}$ безразмерна.

Диэлектрическая проницаемость среды:

$$\varepsilon = \varepsilon_{отн} \cdot \varepsilon_0.$$

Числовое значение диэлектрической проницаемости вакуума ε_0 в системе МКСА может быть получено из закона Кулона:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{\varepsilon r^2}.$$

Опытно измерено, что два заряда по 1 *к* каждый на расстоянии один от другого в 1 *м* взаимодействуют в вакууме с силой $9 \cdot 10^9$ *н*. Поэтому:

$$9 \cdot 10^9\ н = \frac{1\ к^2}{\varepsilon_0\ 1\ м^2},$$

или

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{к^2}{м^2 \cdot н} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{к}{\frac{дж}{к} \cdot м} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{ф}{м}.$$

Единица электрической индукции D в системе МКСА определяется из равенства $D = \varepsilon E$ или $D = \varepsilon_{отн} \cdot \varepsilon_0 \cdot E$, если положить $\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{ф}{м}$, $\varepsilon_{отн} = 9 \cdot 10^9$ и напряженность поля $E = 1 \frac{в}{м}$.

$$1 \text{ единица МКСА } (D) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{ф}{м} \cdot 1 \frac{в}{м} = 1 \frac{ф \cdot в}{м^2} = 1 \frac{к}{м^2}.$$

$\frac{Кулон}{м^2} \left(\frac{к}{м^2}\right)$ есть электрическая индукция, которой обладает поле с напряженностью $1 \frac{в}{м}$ в диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью $9 \cdot 10^9$ единиц.

Единица потока электрической индукции N определяется по теореме Остроградского — Гаусса $N = 4\pi q$.

Ампер-секунда (*а · сек*) есть поток электрической индукции, создаваемый электрическим зарядом $\frac{1}{4\pi}$ *к*.

Единица потока магнитной индукции (магнитного потока) Φ определяется из закона Фарадея — Максвелла:

$$\mathscr{E}_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\mathscr{E}_{инд}$ — электродвижущая сила индукции, возникающая в контуре, если за время dt магнитный поток, связанный с ним, изменяется на величину $d\Phi$. Очевидно:

$$d\Phi = -\mathscr{E} dt.$$

Вебер (*вб*) есть магнитный поток, при убывании которого за одну секунду до нуля в контуре, сцепленном с этим потоком, возникает э. д. с. индукции в 1 *в*. Размерность вебера:

$$[d\Phi] = [\mathscr{E}]\,[dt] = м^2 \cdot кг \cdot сек^{-3} \cdot а^{-1} \cdot сек = м^2 \cdot кг \cdot сек^{-2} \cdot а^{-1}.$$

Единица магнитной индукции B в системе МКСА определяется из равенства:

$$B = \frac{\Phi}{S},$$

где Φ — магнитный поток через площадку S. Очевидно:

$$1\ \text{МКСА}\ (B) = \frac{1\ \textit{вб}}{1\ \textit{м}^2}.$$

$\frac{\text{Вебер}}{\textit{м}^2}$ $\frac{(\textit{вб})}{(\textit{м}^2)}$ есть магнитная индукция такого однородного магнитного поля, в котором магнитный поток через площадку в 1 $\textit{м}^2$, перпендикулярную к линиям индукции, равен 1 *вб*. Размерность единицы магнитной индукции:

$$[B] = \frac{[\Phi]}{[S]} = \frac{\textit{м}^2 \cdot \textit{кг} \cdot \textit{сек}^{-2} \cdot \textit{a}^{-1}}{\textit{м}^2} = \textit{кг} \cdot \textit{сек}^{-2} \cdot \textit{a}^{-1}.$$

Единица напряженности магнитного поля H определяется из равенства, выражающего напряженность поля, создаваемого прямолинейным бесконечно длинным проводником с током I на расстоянии r от него:

$$H = \frac{2I}{r}.$$

Если в этом равенстве положить ток равным одному амперу, а расстояние равным 2 *м*, то

$$1\ \text{МКСА}\ (H) = \frac{1\ \textit{a}}{1\ \textit{м}}.$$

$\frac{\text{Ампер}}{\textit{м}}$ $\frac{(\textit{a})}{(\textit{м})}$ есть напряженность магнитного поля прямого бесконечно длинного проводника с током в 1 *а* на расстоянии 2 *м* от него.

Единица магнитного момента p_m определяется из равенства:

$$M = p_m \cdot H \sin\alpha,$$

связывающего магнитный момент с механическим моментом M и напряженностью поля H, α — угол между направлениями поля и нормалью к плоскости витка (или осью магнита). Отсюда:

$$p_m = \frac{M}{H \sin\alpha}$$

и

$$1\ \text{МКСА}\ (p_m) = \frac{1\ \text{ньютон} \cdot \text{метр}}{\frac{\text{ампер}}{\text{метр}}} = 1\ \frac{\textit{н} \cdot \textit{м}}{\frac{\textit{a}}{\textit{м}}}.$$

За единицу магнитного момента p_m принимается магнитный момент такого витка с током или постоянного магнита, на который в однородном магнитном поле напряженности $1\ \frac{\textit{a}}{\textit{м}}$ действует максимальный вращающий момент, равный 1 ньютон · метр.

Единица индуктивности L в системе МКСА может быть определена из формулы:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -L \frac{di}{dt},$$

откуда

$$L = -\frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{\frac{di}{dt}}.$$

Генри (*гн*) есть индуктивность контура, в котором при изменении тока на 1 *а* за секунду возникает э. д. с. самоиндукции 1 *в*. Размерность генри:

$$[L] = \frac{[\mathscr{E}]}{\left[\frac{di}{dt}\right]} = \frac{м^2 \cdot кг \cdot сек^{-3} \cdot а^{-1}}{а \cdot сек^{-1}} = м^2 \cdot кг \cdot сек^{-2} \cdot а^{-2}.$$

Единица магнитной проницаемости μ в системе МКСА определяется из равенства, связывающего магнитную индукцию поля B с напряженностью H:

$$B = \mu H, \quad \mu = \frac{B}{H}; \quad 1\ \text{МКСА}\ (\mu) = \frac{1\ \frac{вб}{м^2}}{1\ \frac{а}{м}} = 1\ \frac{гн}{м}.$$

$\frac{\text{Генри (гн)}}{\text{метр (м)}}$ есть магнитная проницаемость вещества, в котором при магнитной индукции в $1\ \frac{вб}{м^2}$ напряженность магнитного поля равна $1\ \frac{а}{м}$. Размерность единицы магнитной проницаемости:

$$[\mu] = \frac{м^2 \cdot кг \cdot сек^{-2} \cdot а^{-2}}{м} = м \cdot кг \cdot сек^{-2} \cdot а^{-2}.$$

Магнитные свойства среды характеризуются не истинной магнитной проницаемостью μ, а относительной магнитной проницаемостью $\mu_{отн}$:

$$\mu_r = \mu_{отн} = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Поскольку магнитная проницаемость вакуума μ_0 имеет ту же размерность, что и истинная магнитная проницаемость среды, относительная магнитная проницаемость $\mu_{отн}$ безразмерна. Истинная магнитная проницаемость среды μ:

$$\mu = \mu_{отн} \cdot \mu_0.$$

Магнитная проницаемость вакуума μ_0 должна быть установлена экспериментально. Это можно, например, выполнить на основе закона Ампера для взаимодействия параллельных проводников длины l с токами I_1 и I_2, отстоящих один от другого на расстояние d:

$$F = \frac{2 \mu I_1 I_2 l}{d}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{Fd}{2 I_1 I_2 l}.$$

Установлено, что проводники с токами в 1 *а* и длинами по 1 *м* взаимодействуют в вакууме на расстоянии в 1 *м* с силой $2 \cdot 10^{-7}$ *н*. Следовательно,

$$\mu_0 = \frac{2 \cdot 10^{-7} н \cdot 1\ м}{2 \cdot 1\ а \cdot 1\ а \cdot 1\ м} = 10^{-7}\ \frac{н \cdot м}{а^2 \cdot м} = 10^{-7}\ \frac{гн}{м}.$$

Рационализированная система единиц МКСАр. Идея рационализации системы единиц заключается в том, что если множитель 4π записать в знаменателе закона Кулона:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon r^2},$$

а также внести этот множитель в знаменатель закона Ампера для взаимодействия токов, записав его в виде:

$$F = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi d},$$

то этот множитель исчезнет из наиболее часто встречающихся формул электромагнетизма.

Рационализированная система МКСА$_р$ широко применяется в электро- и радиотехнике. Уравнения законов электромагнитных явлений в рационализированной форме получаются формально из уравнений в нерационализированной форме, если в последних к величинам диэлектрической проницаемости ε, электрической индукции D и напряженности магнитного поля H приписать множитель 4π, а к магнитной проницаемости μ — множитель $\frac{1}{4\pi}$. Равенства, не содержащие ε, D, μ и H, записываются одинаково в рационализированной и нерационализированной системах. Смысл указанного формального правила раскрывается, если учесть, что внесение множителя 4π в знаменатель законов Кулона и Ампера необходимо связано с каким-либо изменением в единицах величин, входящих в эти законы. В системе МКСА$р$ диэлектрическая проницаемость вакуума принимается в 4π раз меньшей, чем в системе МКСА:

$$\text{МКСА}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi}\,\text{МКСАр}(\varepsilon); \quad \varepsilon_0\,(\text{МКСАр}) = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{ф}{м}.$$

Аналогичным образом магнитная проницаемость вакуума μ_0 в системе МКСА$_р$ принимается в 4π раза большей, чем в системе МКСА:

$$\text{МКСА}(\mu) = 4\pi\,\text{МКСАр}(\mu); \quad \mu_0\,(\text{МКСАр}) = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{гн}{м}.$$

Наиболее употребительные формулы электромагнетизма в нерационализированной и рационализированной форме (меняющие свою запись при рационализации) приводятся на стр. 178.

Система единиц СГСЭ. В системе единиц СГСЭ основными единицами являются основные единицы механической системы единиц СГС, на основе которой она строится, — сантиметр, грамм, секунда, а также электрическая постоянная ε_0, таким образом, диэлектрическая проницаемость вакуума в системе СГСЭ равна единице. Для простоты полагают также ε_0 безразмерной величиной, благодаря чему размерности всех электромагнитных единиц в рассматриваемой системе выражаются через *см*, *г* и *сек*.

Единица измерения электрического заряда q определяется из закона Кулона:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{\varepsilon r^2}.$$

Абсолютная электростатическая единица электрического заряда СГСЭ (q) есть такой заряд, который с равным ему зарядом в вакууме на расстоянии от него в 1 *см* взаимодействует с силой в 1 *дин*.

Размерность абсолютной электростатической единицы заряда:

$$[q] = [r][\sqrt{F}] = см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot сек^{-1}.$$

Содержание равенства	Нерационализированная запись	Рационализированная запись
Закон Кулона	$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{\varepsilon r^2}$	$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \pi \varepsilon r^2}$
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$	$E = \frac{q}{4 \pi \varepsilon r^2}$
Теорема Остроградского—Гаусса . .	$N = \frac{4\pi}{\varepsilon} \Sigma q$	$N = \frac{\Sigma q}{\varepsilon}$
Напряженность поля заряженной плоскости	$E = \frac{2 \pi \sigma}{\varepsilon}$	$E = \frac{\sigma}{2 \varepsilon}$
Напряженность поля заряженного шара	$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$	$E = \frac{q}{4 \pi \varepsilon r^2}$
Напряженность поля плоского конденсатора	$E = \frac{4 \pi \sigma}{\varepsilon}$	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
Потенциал поля точечного заряда .	$U = \frac{q}{\varepsilon r}$	$U = \frac{q}{4 \pi \varepsilon r}$
Емкость плоского конденсатора . .	$C = \frac{\varepsilon S}{4 \pi d}$	$C = \frac{\varepsilon S}{d}$
Емкость шара	$C = \varepsilon r$	$C = 4 \pi \varepsilon r$
Сила притяжения пластин плоского конденсатора	$F = \frac{\varepsilon S U^2}{8 \pi d^2}$	$F = \frac{\varepsilon S U^2}{2 d}$
Энергия плоского конденсатора . .	$W = \frac{\varepsilon S U^2}{8 \pi d}$	$W = \frac{\varepsilon S U^2}{2 d}$
Закон Био—Савара—Лапласа . .	$dH = \frac{I \sin\alpha \cdot dl}{r^2}$	$dH = \frac{I \sin\alpha \cdot dl}{4 \pi r^2}$
Напряженность поля прямого тока	$H = \frac{2 I}{r}$	$H = \frac{I}{2 \pi r}$
Напряженность поля кругового витка	$H = \frac{2 \pi I}{r}$	$H = \frac{I}{2 r}$
Напряженность поля соленоида . .	$H = 4 \pi I n$	$H = I n$
Закон Ампера для параллельных токов	$F = \frac{2 \mu I_1 I_2 l}{d}$	$F = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2 \pi d}$
Формула Гопкинсона	$\Phi = \frac{4 \pi I n}{\frac{l}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S_0}}$	$\Phi = \frac{I n}{\frac{l}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S_0}}$
Индуктивность соленоида	$L = 4 \pi \mu n^2 V^2$	$L = \mu n^2 V^2$
Плотность энергии электрического поля	$W_{эл} = \frac{\varepsilon E^2}{8 \pi}$	$W_{эл} = \frac{\varepsilon E^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$W_{маг} = \frac{\mu H^2}{8 \pi}$	$W_{маг} = \frac{\mu H^2}{2}$

Остальные производные единицы электромагнитных величин системы СГСЭ устанавливаются на основе определяющих уравнений, связывающих каждую из величин, единица которой определяется, с величинами, единицы которых уже определены. Единицы электромагнитных величин системы СГСЭ не имеют особых названий и обозначаются указанием системы, а затем в скобках или в виде нижнего индекса указанием самой единицы величины, например, СГСЭ (E) или $СГСЭ_E$ — единица напряженности электрического поля в системе СГСЭ.

Следует отметить, что электростатические величины часто употребляются в системе СГСЭ, однако, в области явлений тока и магнетизма эта система весьма мало употребительна.

Ниже приводятся определяющие уравнения и размерности единиц электрических и магнитных величин в системе СГСЭ:

Величина	Определяющее уравнение	Размерность
Электрический заряд q . . .	$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$	$см^{3/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Напряженность электрического поля E	$E = \frac{F}{q_0}$	$см^{-1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Электрическая индукция D .	$D = \varepsilon E$	$см^{-1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Поток электрической индукции N	$N = DS$	$см^{3/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Потенциал U	$A = qU$	$см^{1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Емкость C	$C = \frac{q}{U}$	$см$
Ток i	$i = \frac{q}{t}$	$см^{3/2}\ г^{1/2}\ сек^{-2}$
Сопротивление R	$R = \frac{U}{I}$	$см^{-1}\ сек$
Напряженность магнитного поля H	$H = \frac{2I}{r}$	$см^{1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-2}$
Магнитная проницаемость μ .	$F = \frac{2\mu I_1 I_2 l}{d}$	$см^{-2}\ сек^{2}$
Магнитная индукция B . . .	$B = \mu H$	$см^{-3/2}\ г^{1/2}$
Магнитный поток Φ	$\Phi = BS$	$см^{1/2}\ г^{1/2}$
Индуктивность L	$\mathcal{E}_{инд} = -L\frac{di}{dt}$	$см^{-1}\ сек^{2}$

Система единиц СГСМ. В системе единиц СГСМ, построенной на основе механической системы единиц СГС, основными единицами являются сантиметр, грамм, секунда, а за четвертую основную единицу принята магнитная постоянная μ_0; таким образом, в системе СГСМ за единицу магнитной проницаемости принята магнитная проницаемость вакуума. Для простоты μ_0 считается безразмерной величиной, вследствие чего размерности электромагнитных величин в системе СГСМ выражаются через *см*, *г* и *сек*.

За исходное определяющее уравнение в системе СГСМ принимается закон Ампера для взаимодействия параллельных токов:

$$F = \frac{2\mu I_1 \cdot I_2 \cdot l}{d}$$

где I_1 и I_2 — токи,

l — длина проводников,

d — расстояние между ними.

Из закона Ампера определяется единица тока I. За единицу тока I в системе СГСМ принимается такой ток, который, протекая по каждому из двух параллельных бесконечно длинных проводников малого кругового сечения, помещенных в вакууме на расстоянии 2 *см* один от другого, вызывает взаимодействие этих проводников с силой в 1 *дн* на 1 *см* длины проводника. Эта единица называется абсолютной электромагнитной единицей тока или коротко СГСМ (I). Размерность единицы тока:

$$[I] = \sqrt{\frac{[F]\,[d]}{[l]}} = см^{1/2}\, г^{1/2}\, сек^{-1}.$$

Единица напряженности магнитного поля в системе СГСМ определяется из равенства, определяющего напряженность H магнитного поля прямого бесконечно длинного проводника с током I на расстоянии r от него: $H = \frac{2I}{r}$. Эта единица называется эрстедом.

Эрстед (*э*) есть напряженность магнитного поля, создаваемого прямолинейным бесконечно длинным проводником с током в 1 СГСМ (I), (или, что все равно, в 10 *а*), на расстоянии 2 *см* от проводника. Размерность эрстеда:

$$[H] = \frac{[I]}{[r]} = \frac{см^{1/2}\, г^{1/2}\, сек^{-1}}{см} = см^{-\frac{1}{2}} \cdot г^{1/2}\, сек^{-1}.$$

Единица магнитной индукции B определяется из равенства $B = \mu H$ и получила название гаусса.

Гаусс (*гс*) есть магнитная индукция, создаваемая в вакууме магнитным полем с напряженностью в 1 *э*. Размерность гаусса, поскольку μ безразмерно, очевидно, совпадает с размерностью эрстеда.

Единица магнитного потока Φ определяется в системе СГСМ из равенства $\Phi = BS$ и называется максвеллом.

Максвелл (*мкс*) есть поток магнитной индукции через площадку в 1 $см^2$, расположенную нормально к линиям поля с магнитной индукцией в 1 *гс*.

Остальные единицы электромагнитных величин системы СГСМ не имеют особых названий и обозначаются указанием системы, а затем в скобках или в виде нижнего индекса величины, о единице которой идет речь, например, единица заряда системы СГСМ обозначается СГСМ (q) или $СГСМ_q$.

На стр. 181 приводится последовательность определяющих уравнений, а также размерности для единиц наиболее употребительных величин системы СГСМ.

Следует заметить, что электростатические величины весьма редко измеряются на практике в единицах системы СГСМ.

Система единиц СГС (Гаусса). В абсолютной системе единиц СГС (Гаусса), введенной в СССР ГОСТ 8033—56, основными единицами являются единицы системы СГС, т. е. сантиметр, грамм и секунда, а диэлектрическая проницаемость вакуума ε_0 и магнитная проницаемость вакуума μ_0 одновременно полагаются равными единице и безразмерными величинами. Производные единицы электрических величин в системе СГС (Гаусса) совпадают с единицами системы СГСЭ, а единицы магнитных величин — с единицами системы СГСМ. При этом, разумеется, оказывается не-

Величина	Определяющее уравнение	Размерность
Ток I	$F = \frac{2\mu I_1 I_2 l}{d}$	$см^{1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Напряженность магнитного поля H	$H = \frac{2I}{r}$	$см^{-1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Магнитная индукция B . . .	$B = \mu H$	$см^{-1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Магнитный поток Φ	$\Phi = BS$	$см^{3/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$
Электрический заряд q . . .	$q = It$	$см^{1/2}\ г^{1/2}$
Напряженность электрического поля E	$E = \frac{F}{q}$	$см^{1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость ε	$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$	$см^{-2}\ сек^{2}$
Электрическая индукция D .	$D = \varepsilon E$	$см^{-3/2}\ г^{1/2}$
Поток электрической индукции N	$N = DS$	$см^{1/2}\ г^{1/2}$
Потенциал U	$A = qU$	$см^{3/2}\ г^{1/2}\ сек^{-2}$
Емкость C	$C = \frac{q}{U}$	$см^{-1}\ сек^{2}$
Сопротивление R	$R = \frac{U}{I}$	$см\ сек^{-1}$
Удельное сопротивление ρ . .	$R = \rho \frac{l}{S}$	$см^{2}\ сек^{-1}$
Индуктивность L	$\mathscr{E}_{инд} = -L\frac{di}{dt}$	$см$

возможным положить во всех формулах электромагнетизма коэффициент пропорциональности равным единице. Этот коэффициент оказывается равным в одних формулах $\frac{1}{c}$, в других — $\frac{1}{c^2}$, причем c — электродинамическая постоянная, имеющая размерность и числовое значение скорости света в вакууме, $c \simeq 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*.

Связь единиц различных систем может быть установлена, если выяснена связь, например, единиц тока всех систем. Как отмечалось ранее, единица тока системы МКСА — ампер определена как 0,1 СГСМ (I). Связь единиц тока систем СГСМ и СГСЭ может быть определена лишь опытным путем, так как эти системы строятся независимо одна от другой. Различные опыты (см. стр. 223) показали, что отношение тока в единицах системы СГСЭ к току в единицах системы СГСМ численно и по размерности равно скорости света в вакууме $c \simeq 3 \cdot 10^{10}\ \frac{см}{сек}$. Очевидно, единица тока системы СГСМ больше единицы системы СГСЭ в c раз:

$$1\ СГСМ\ (I) \simeq 3 \cdot 10^{10}\ СГСЭ\ (I).$$

Ниже приводится связь единиц системы МКСА с единицами других систем. Из приводимых соотношений нетрудно установить связь между единицами каждых двух систем, так как их выражение через единицу системы МКСА приведено.

Величина	1 единица системы МКСА равна указанному ниже числу единиц в данной системе:		
	СГСЭ	СГСМ	МКСАр
Ток I	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}	1
Электрический заряд q	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}	1
Поверхностная плотность заряда σ	$3 \cdot 10^5$	10^{-5}	1
Потенциал U	$\frac{1}{300}$	10^8	1
Емкость C	$9 \cdot 10^{11}$	10^{-9}	1
Сопротивление R	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	10^9	1
Диэлектрическая проницаемость ε	$9 \cdot 10^9$	10^{-11}	$\frac{1}{4\pi}$
Напряженность электрического поля E	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$	10^6	1
Электрическая индукция D	$3 \cdot 10^5$	10^{-5}	$\frac{1}{4\pi}$
Поток электрической индукции N	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}	$\frac{1}{4\pi}$
Поток магнитной индукции Φ	$\frac{1}{300}$	10^8	1
Магнитная индукция B	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$	10^4	1
Напряженность магнитного поля H	$3 \cdot 10^7$	10^{-3}	$\frac{1}{4\pi}$
Магнитная проницаемость μ	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-13}$	10^7	4π
Магнитный момент p_m	$\frac{1}{3}$	10^{10}	4π
Индуктивность L	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	10^9	1

§ 6. Электростатическое поле. Напряженность

Неподвижный заряд q неразрывно связан с электрическим полем в окружающем его пространстве.

Электрическое поле представляет собой особый вид материи и является материальным носителем взаимодействия между зарядами даже в случае отсутствия вещества между ними.

Электрическое поле заряда q действует с силой F на помещаемый в какую-либо из точек поля пробный заряд q'.

Напряженность электрического поля. Вектор напряженности электрического поля E есть величина, измеряемая силой, действующей в данной точке поля на пробный единичный положительный заряд.

Если на заряд q' действует сила $\mathbf{F}$, то по определению

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q'}.$$

Линии напряженности. Линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают по направлению с вектором напряженности в этой точке, называются линиями напряженности.

Условились, что число линий напряженности, проходящих через единичную площадку, нормальную к линиям, должно равняться численному значению напряженности E в данном месте. Если проводить линии напряженности в соответствии с этим условием, то густота линий напряженности определяет величину напряженности.

Напряженность поля точечного заряда q на расстоянии r от него:

В системе СГСЭ

$$E = \frac{q}{\varepsilon_r r^2}\ г^{1/2}\ см^{-\frac{1}{2}}\ сек^{-1}.$$

В системе МКСА

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\ \frac{в}{м}.$$

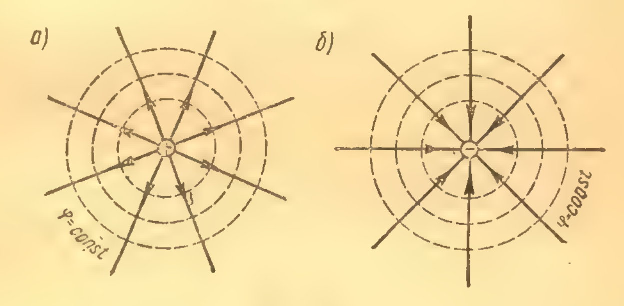


Рис. 80

Линии напряженности поля точечного заряда представляют собой лучи, выходящие из точки, где помещен заряд (для положительного заряда), или входящие в нее (для отрицательного заряда) (рис. 80*а*, *б*).

§ 7. Принцип суперпозиции электрических полей

Если электрическое поле создается зарядами q_1, q_2, ... q_n, то на пробный заряд q' действует сила F, как показывает опыт, равная геометрической сумме сил F_k, действующих на пробный заряд q' со стороны поля каждого из зарядов q_k:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} q'\mathbf{E}_k = q' \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_k = q'\mathbf{E}.$$

Вектор напряженности электрического поля системы зарядов равен геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_k.$$

Принцип суперпозиции (наложения) полей позволяет рассчитывать поля сложных систем зарядов.

§ 8. Работа сил поля при перемещении заряда

На точечный электрический заряд q' в электрическом поле напряженности E действует сила $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$, которая совершает работу при перемещении заряда в поле.

Элементарная работа перемещения заряда q' на расстояние dl:

$$dA = F \cdot dl \cos(\mathbf{F}, \widehat{d\mathbf{l}}) = q'Edl \cos(\mathbf{E}, \widehat{d\mathbf{l}}).$$

Если поле, в котором перемещается заряд q', создано точечным зарядом q, причем заряд q' перемещается из точки, отстоящей от заряда q на расстояние r_1, в точку, отстоящую от q на расстояние r_2, то

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \frac{q'q}{\varepsilon_r r^2} dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \frac{q'q}{\varepsilon_r} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{q'q}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

т. е. работа перемещения заряда в электростатическом поле зависит лишь от его начального и конечного положения и не зависит от формы пути.

Этот вывод сохраняется и для поля, созданного произвольным распределением зарядов, поскольку это поле представляет собой суперпозицию полей, создаваемых отдельными точечными зарядами, входящими в систему.

Работа перемещения заряда q' в электростатическом поле напряженности E из положения (*1*) в положение (*2*):

$$A_{1,2} = q' \int_1^2 Edl \cos(\mathbf{E}, \widehat{d\mathbf{l}}) = W_1 - W_2,$$

где W_1 и W_2 — значения потенциальной энергии переносимого заряда в начальной и конечной точках пути.

Циркуляция вектора напряженности. Криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру, называется циркуляцией вектора напряженности E электрического поля:

$$\oint Edl \cos(\mathbf{E}, \widehat{d\mathbf{l}}) = \oint E_l dl.$$

На основании результатов предыдущего пункта:

$$\oint E_l dl = 0,$$

т. е. работа перемещения заряда в электростатическом поле по замкнутому пути равна нулю. Таким образом, электростатическое поле является потенциальным.

§ 9. Электрический потенциал

Величина, определяемая отношением потенциальной энергии W пробного заряда q' в данной точке поля к его величине, называется электрическим потенциалом этой точки φ:

$$\varphi = \frac{W}{q'}$$

Потенциал характеризует свойства поля в данной точке.

Поскольку потенциальная энергия заряда при его удалении в бесконечность уменьшается до нуля, обычно считают

$$\varphi_\infty = 0,$$

т. е. принимают потенциал бесконечно удаленной точки равным нулю.

Потенциал точки (1) φ_1:

$$\varphi_1 = \frac{W_1}{q'} = \frac{W_1 - W_\infty}{q'} = \frac{A_{1,\infty}}{q'} = \int\limits_1^\infty E_l\, dl.$$

Потенциал электрического поля измеряется работой, которую совершают силы поля, перемещая единичный положительный заряд из данной точки в бесконечность (или в другую точку, потенциал которой условно принят равным нулю).

Работа перемещения заряда в электростатическом поле измеряется произведением величины переносимого заряда q' на разность потенциалов начальной (φ_1) и конечной (φ_2) точек пути и не зависит от формы пути:

$$A_{1,2} = q'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Эквипотенциальные поверхности. Совокупность всех точек поля, потенциал которых имеет одно и то же значение $\varphi = \text{const}$, называется эквипотенциальной поверхностью или поверхностью равного потенциала.

Работа перемещения заряда по поверхности равного потенциала равна нулю, так как

$$A_{1,2} = q'(\varphi - \varphi) = 0.$$

Эта же работа:

$$A_{1,2} = q' E dl \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = 0,$$

откуда $\cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = 0$, т. е. линии напряженности нормальны к поверхностям равного потенциала.

Например, линии напряженности поля точечного заряда суть лучи, исходящие из точки, где помещен заряд, а эквипотенциальные поверхности представляют собой семейство концентричных сфер с общим центром в этой же точке (рис. 80).

Связь напряженности и потенциала. Работа перемещения заряда q' из точки с потенциалом φ в точку с потенциалом $\varphi + d\varphi$ вдоль линии напряженности поля равна:

$$dA = q'[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q' d\varphi = q' E dn,$$

где dn — бесконечно малое перемещение по нормали к эквипотенциальной поверхности. Из последнего равенства:

$$E = -\frac{d\varphi}{dn} \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Вектор напряженности $\mathbf{E}$ равен численно градиенту потенциала, но направлен в противоположную сторону — в сторону падения потенциала.

§ 10. Электрическое поле в диэлектрике

Проводники и диэлектрики. Все тела состоят из молекул и атомов. Последние представляют собой сложные системы элементарных электрических зарядов, в целом электрически нейтральные.

Тела, в которых часть микроскопических электрических зарядов способна свободно перемещаться в пределах тела, называются проводниками. Они способны проводить электрический ток.

Тела, в которых все микроскопические заряды связаны друг с другом, не проводят электрического тока и называются диэлектриками или изоляторами.

К хорошим проводникам относятся металлы, растворы (и расплавы) кислот, щелочей и солей.

Изоляторами являются фарфор, резина и различные типы пластических масс, стекло.

Напряженность электрического поля в диэлектрике. Поместим пластину из диэлектрика во внешнее однородное электрическое поле напряженности E_0 (рис. 81).

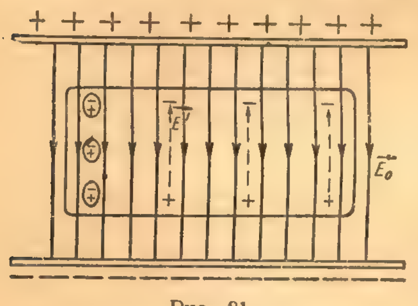


Рис. 81

Вне поля E_0 макроскопическое поле E, обусловленное взаимодействием полей связанных зарядов в диэлектрике, в среднем равно 0. При наличии поля E_0 происходит смещение микроскопических зарядов внутри диэлектрика (положительных — по полю, отрицательных — против поля), называемое поляризацией диэлектрика.

Поляризация диэлектрика не изменяет суммарного заряда (равного 0) в любом макроскопическом объеме внутри диэлектрика. Однако на границах диэлектрика возникают связанные некомпенсированные заряды. На рис. 81 внизу — положительные, вверху — отрицательные.

Связанные заряды на границах диэлектрика создают в диэлектрике дополнительное макроскопическое поле E', направленное против внешнего поля E_0.

Результирующее поле E внутри диэлектрика равно разности:

$$E = E_0 - E' < E_0.$$

§ 11. Электрическая индукция

В местах появления связанных зарядов на границах диэлектрика число линий напряженности результирующего электрического поля E меняется скачком.

На границе двух диэлектриков нормальные составляющие напряженности электрического поля E изменяются обратно пропорционально величинам диэлектрических проницаемостей граничащих сред, т. е.

$$\frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{\varepsilon_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(1)}},$$

где верхние индексы (1) и (2) относятся соответственно к первой и второй средам.

Скачкообразное изменение вектора напряженности электрического поля при переходе через границу диэлектрика неудобно при расчете полей.

Вектор $D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_{отн} E$, равный произведению вектора напряженности электрического поля на диэлектрическую проницаемость среды в данной точке, называется вектором электрической индукции (смещения).

Очевидно, на границе двух диэлектриков нормальные составляющие вектора электрической индукции D_n изменяются непрерывно.

Поэтому число линий электрической индукции при переходе через границу двух диэлектриков не изменяется.

В то же время, поскольку тангенциальные составляющие напряженности электрического поля E на границе двух диэлектриков меняются не-

прерывно, то тангенциальные составляющие вектора электрической индукции D_τ на границе двух диэлектриков изменяются прямо пропорционально диэлектрическим проницаемостям этих диэлектриков;

$$\frac{D_\tau^{(1)}}{D_\tau^{(2)}} = \frac{\varepsilon^{(1)}}{\varepsilon^{(2)}}.$$

На границе двух диэлектриков происходит своеобразное «преломление» линий электрической индукции (рис. 82).

Измерение электрической индукции в диэлектрике. Пусть в диэлектрике вырезана дискообразная щель, перпендикулярная линиям индукции, причем ее диаметр значительно превосходит толщину. В центре такой «поперечной» щели электрическая индукция **D** такая же, как в соседних со щелью точках диэлектрика. Но поскольку диэлектрическая проницаемость ε вакуума равна 1, электрическая индукция **D** и напряженность поля **E** в щели совпадают.

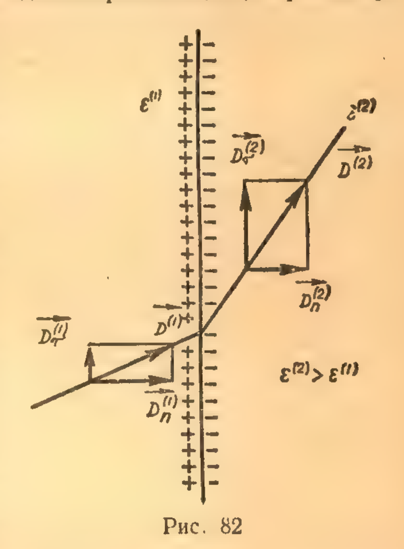


Рис. 82

Напряженность **E** равна силе, действующей на единичный пробный положительный заряд.

Следовательно, электрическая индукция **D** в диэлектрике есть величина, измеряемая силой, действующей на единичный положительный заряд в центре поперечной щели внутри данного диэлектрика.

Измерение напряженности электрического поля в диэлектрике. Пусть в диэлектрике вырезана «продольная» щель в виде цилиндра с осью, параллельной линиям напряженности и длиной, во много раз превосходящей диаметр. Напряженность в продольной щели такова же, что и в смежных точках диэлектрика, так как на боковой поверхности цилиндра не возникает связанных зарядов и, следовательно, напряженность поля **E** при переходе через эту поверхность не меняется.

Напряженность электрического поля в диэлектрике **E** есть величина, измеряемая силой, действующей на единичный положительный заряд в центре продольной щели внутри данного диэлектрика.

Поток электрической индукции. Потоком вектора электрической индукции **D** через элементарную площадку dS, нормаль к которой **n** образует угол α с направлением вектора электрической индукции **D**, называется выражение

$$dN = D\cos\alpha dS = D_n dS,$$

где $D_n = D\cos\alpha$ — проекция вектора **D** на направление нормали **n**.

Название «поток» величина получила по аналогии со случаем течения жидкости. Если бы вектор **D** играл роль скорости течения, то указанное выражение определяло бы объем жидкости, ежесекундно протекающей через площадку dS.

Полным потоком N электрической индукции через поверхность S называется сумма потоков электрической индукции через элементарные площадки, на которые может быть разбита поверхность S:

$$N = \int_S D_n \cdot dS.$$

Принцип суперпозиции (наложения) потоков электрической индукции. Векторы электрической индукции складываются геометрически. Величина $D\cos\alpha$, входящая в выражение потока электрической индукции, представляет собой проекцию вектора D на направление нормали к поверхности dS.

Как известно, проекция геометрической (векторной) суммы равна алгебраической сумме проекций векторных слагаемых на это же направление. Поэтому поток электрической индукции суммарного поля нескольких зарядов равен алгебраической сумме потоков электрической индукции полей каждого из этих зарядов в отдельности.

§ 12. Теорема Гаусса — Остроградского

Полный поток электрической индукции через замкнутую поверхность произвольной формы прямо пропорционален алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, и не зависит от зарядов, расположенных вне поверхности.

Множитель пропорциональности зависит от выбора системы единиц:

в системе СГСЭ:

$$N = 4\pi \sum_{k=1}^{n} q_k;$$

в системе МКСА:

$$N = \sum_{k=1}^{n} q_k,$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_n$ — заряды, заключенные внутри поверхности.

Учитывая выражение полного потока электрической индукции, теорему можно также записать:

в системе СГСЭ:

$$\oint_S D_n\, dS = 4\pi q;$$

в системе МКСА:

$$\oint_S D_n\, dS = q,$$

где q — полный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности S.

Теорема Гаусса — Остроградского позволяет легко рассчитывать напряженность электрических полей при симметричных распределениях зарядов и диэлектриков, вычисляя поток электрической индукции.

§ 13. Электрические поля при простейших распределениях зарядов

Линейное распределение заряда. Пусть электрический заряд распределен равномерно вдоль бесконечной прямой, причем заряд на единице длины (линейная плотность заряда) равна η.

Напряженность поля и электрический потенциал заряженной бесконечной прямой:

в системе СГСЭ:

$$E = \frac{2\eta}{\varepsilon_r r};$$

$$\varphi = -\frac{2\eta}{\varepsilon_r} \ln r;$$

в системе МКСА:

$$E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon r};$$

$$\varphi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon} \ln r,$$

где r — расстояние от прямой по перпендикуляру к ней.

Сферическое распределение заряда. Пусть q — полный заряд сферы радиуса a, r — расстояние от центра сферы.

а) Заряд равномерно распределен по поверхности сферы. Напряженность поля и электрический потенциал:

в системе СГСЭ:	в системе МКСА:
$E = \frac{q}{\varepsilon_r r^2}$ (при $r > a$),	$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$ (при $r > a$),
$E = 0$ (при $r < a$),	$E = 0$ (при $r < a$),
$\varphi = \frac{q}{\varepsilon_r r}$ (при $r > a$),	$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$ (при $r > a$),
$\varphi = \frac{q}{\varepsilon_r a}$ (при $r < a$);	$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon a}$ (при $r < a$).

Вне сферы (при $r > a$), поле такое же, как если бы оно создавалось зарядом q, помещенным в центре сферы. На поверхности шара напряженность терпит разрыв непрерывности. Графики зависимости E и φ от r изображены на рис. 83.

б) Заряд равномерно распределен по объему сферы, причем заряд единицы объема (объемная плотность заряда) ρ.

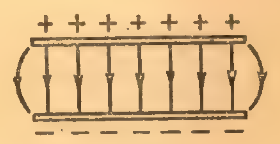


Рис. 84

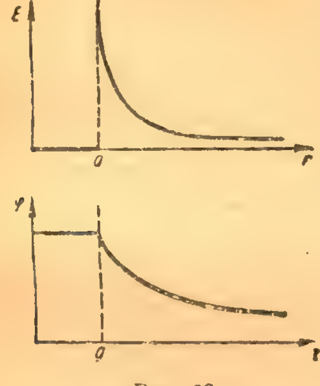


Рис. 83

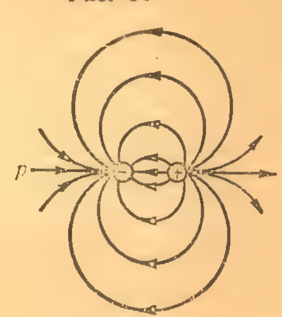


Рис. 85

Вне сферы поле такое же, как и в случае а.

Внутри сферы (при $r < a$) напряженность поля:

$$E = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\rho r}{\varepsilon_{\text{отн}}}, \qquad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon}.$$

Поле равномерно заряженной поверхности. Заряд, приходящийся на единицу поверхности (поверхностная плотность заряда) σ.

Напряженность поля:

в системе СГСЭ:	в системе МКСА:
$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_{\text{отн}}}$,	$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$.

Поле двух разноименно заряженных плоскостей с одинаковой по абсолютной величине поверхностной плотностью заряда σ.

В промежутке между плоскостями:

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_{\text{отн}}}, \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

В остальном пространстве $E = 0$.

Таким образом, поле безгранично протяженного плоского конденсатора целиком сосредоточено между его обкладками и однородно. В реальном конденсаторе нарушение однородности поля имеет место у краев пластин (рис. 84).

Электрический диполь. Диполем называется совокупность двух равных по абсолютной величине разноименных зарядов q, помещенных на некотором расстоянии l один от другого.

Величина, измеряемая произведением величины одного из зарядов q на плечо диполя l, называется электрическим моментом диполя $p = lq$.

Дипольный момент удобно рассматривать как вектор, направленный по оси диполя от положительного к отрицательному заряду.

Если расстояние r от диполя много больше плеча диполя l, то напряженность поля диполя E:

$$E = \frac{p}{\varepsilon r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}, \quad (r \gg l),$$

где φ — угол между направлениями в точку, где вычисляется напряженность, из середины расстояния между зарядами и оси диполя.

Картина линий напряженности поля диполя изображена на рис. 85. Поля, подобные полю диполя, образуются около полярных молекул, вокруг шаров искровых разрядников и т. п.

§ 14. Вектор поляризации

За меру поляризации диэлектрика принимается вектор поляризации **P**, равный геометрической сумме дипольных моментов молекул **p** в единице объема V диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}.$$

Степень ориентации молекул диэлектрика пропорциональна напряженности поля **E** в диэлектрике.

Поэтому вектор поляризации **P** пропорционален напряженности поля **E**:

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E},$$

где $\varkappa$ — поляризуемость или коэффициент поляризации. Пусть пластина из диэлектрика находится между обкладками плоского конденсатора. Напряженность поля при отсутствии диэлектрика E_0 связана с поверхностной плотностью заряда σ на обкладках:

$$E_0 = 4\pi\sigma.$$

Напряженность дополнительного поля E', вызванного поляризацией диэлектрика, аналогично связана с поверхностной плотностью связанных зарядов на поверхности диэлектрика σ':

$$E' = 4\pi\sigma'.$$

Напряженность поля в диэлектрике **E**:

$$E = E_0 - E' = 4\pi(\sigma - \sigma') = \frac{E_0}{\varepsilon_{\text{отн}}} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_{\text{отн}}},$$

где $\varepsilon_{\text{отн}}$ — диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Плотность связанных зарядов:

$$\sigma' = \frac{4\pi\sigma - E}{4\pi} = \frac{\varepsilon_{отн} E - E}{4\pi} = \frac{\varepsilon_{отн} - 1}{4\pi} E = \varkappa E.$$

Плотность поверхностных связанных зарядов σ' численно равна нормальной составляющей вектора поляризации.

Коэффициент поляризации $\varkappa$ и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{отн}$ связаны соотношением:

$$\varepsilon_{отн} = 1 + 4\pi\varkappa \quad \text{или,} \quad \varkappa = \frac{\varepsilon_{отн} - 1}{4\pi}$$

Так как вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

Диэлектрическая проницаемость различных веществ

Вещество	t °C	ε	Вещество	t °C	ε
Алмаз	18	16,5	Сероуглерод	20	2,6
Амилацетат	18	4,8	Сильвин	18	4,9
Анилин	18	7,3	Скипидар	20	2,2
Апатит	18	8,5	Слюда	18	5,7—7
Асфальт	18	2,7	Специальная керамика, содержащая BO и TiO_2	18	1 000—10000
Ацетон	20	21,5	Спирт метиловый	13,4	35,4
Бакелит	18	3—5	Спирт этиловый	14,7	26,8
Бальзам канадский	18	2,7	Стекло зеркальное	18	6—7
Бензол	18	2,3	Стекло крон	18	5—9
Бром	5	3,1	Стекло флинт	18	7—10
Бумага	18	2—2,5	Титанат бария	20	1 200
Вода	18	80,4	Толуол	14,4	2,4
Воск	18	2,5—3	Турмалин ∥ оси	18	6,0
Гетинакс	18	3,5—5	Фарфор	18	5—6,8
Глицерин	15	39,1	Хлороформ	22	5,2
Дерево	18	2,2—3,7	Целлулоид	18	4,1
Двуокись титана	18	40—80	Четыреххлористый углерод	18	2,2
Каменная соль	20	5,6	Шеллак	18	3,1—3,7
Кварц кристаллический	18	4,5	Эбонит	18	2,5—2,8
Кварц плавленый	18	3,5—4,1	Эфир этиловый	18	4,3
Кость слоновая	18	6,9	Янтарь	18	2,7—2,9
Ксилол	18	2,4	*Газы*		
Лед	18	3,2	Азот	0	1,000606
Масло касторовое	10,9	4,6	Азот	20	1,000581
Масло оливковое	21	3,2	Водород	0	1,000264
Масло парафиновое	20	4,7	Водород	20	1,000273
Масло трансформаторное	18	2,2—2,5	Воздух	0	1,000590
Мрамор	18	8,3	Воздух	19	1,000576
Нефть, керосин	21	2,1	Гелий	0	1,000068
Нитробензол	18	36,4	Кислород	0	1,000524
Парафин	20	2,0—2,5	Метан	0	1,000953
Рутил ⊥ оси	20	86	Окись углерода	0	1,000690
Рутил ∥ оси	—	170	Углекислый газ	0	1,000946
Сера	18	3,6—4,3			

то

$$D = E + 4\pi\varkappa E = E + 4\pi P.$$

Вектор электрической индукции равен сумме вектора напряженности поля **E** и умноженного на 4π вектора поляризации **P**.

В системе МКСА $\varepsilon_{отн} = 1 + \varkappa_{МКСА}$, так как в системе МКСА численное значение диэлектрической восприимчивости в 4π раз больше, чем в системе СГСЭ, вследствие применения рационализации формул.

§ 15. Типы диэлектриков

Диэлектрики с жесткими диполями. Диэлектрические среды, составленные из полярных молекул, характеризуются тем, что составляющие их молекулы обладают постоянным по величине дипольным моментом **p**. В отсутствии поля эти моменты хаотически ориентированы. В присутствии поля моменты молекулярных диполей приобретают определенную степень ориентированности. Поляризация таких диэлектриков называется дипольной.

Диэлектрики с мягкими диполями. Дипольные моменты молекул диэлектриков с мягкими диполями не только ориентируются при наличии электрического поля, но и изменяют свою величину, так как при этом происходят смещения электрических зарядов внутри молекулы.

Неполярные диэлектрики. Молекулы неполярных диэлектриков в отсутствии электрического поля не являются диполями, так как заряды внутри молекул распределены симметрично. Молекулы неполярных диэлектриков становятся диполями в электрическом поле вследствие того, что при этом центр положительных зарядов в молекуле сдвигается на некоторое расстояние от центра отрицательных зарядов.

Момент, приобретаемый такой молекулой, тем больше, чем легче происходит смещение электронов в молекуле. Поэтому поляризация неполярных диэлектриков называется электронной.

Пьезоэлектрический эффект. Электрическая поляризация, возникающая при растяжении или сжатии кристалла твердого диэлектрика, построенного из полярных молекул, называется пьезоэлектрическим эффектом. При этом на противоположных гранях пластинки, вырезанной из диэлектрика, появляются разноименные связанные заряды.

Пьезоэлектрическими свойствами обладают турмалин, кварц, сахар, сегнетова соль, цинковая обманка. Эти свойства используются в пьезоэлектрических датчиках, позволяющих регистрировать деформации и толчки, преобразуя их в электрические импульсы, в звукоснимателях и т. п.

Обратным пьезоэлектрическим эффектом называется деформация кристаллического диэлектрика, к которому приложена разность потенциалов. Обратный эффект имеет место для тех же веществ, что и прямой. Обратный пьезоэлектрический эффект является частным случаем явления электрострикции — изменения размеров тела под действием внешнего электрического поля.

Электрострикция пьезокварца используется для возбуждения ультразвуковых волн.

Сегнетоэлектрики (ферроэлектрики). Вещества с большим значением диэлектрической постоянной называются сегнетоэлектриками. Их типичный представитель сегнетова соль — двойная натрийкалиевая соль винной кислоты $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$.

При комнатной температуре диэлектрическая проницаемость сегнетовой соли достигает 10000, а при 25° С падает до обычных значений.

Кристаллы фосфата калия KH_2PO_4 имеют аномально большую диэлектрическую проницаемость в интервале температур от —190° до — 130° С,

Свойства сегнетоэлектриков были изучены советскими физиками И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко.

Советский физик Б. М. Вул обнаружил сегнетоэлектрические свойства титаната бария в широком интервале температур.

В кристаллах сегнетоэлектриков имеются микроскопические области, в которых дипольные моменты отдельных молекул ориентированы одинаково и в отсутствии внешнего электрического поля. Во внешнем поле по полю ориентируются сразу целые поляризованные области. Это объясняет громадное значение диэлектрической постоянной сегнетоэлектриков.

Поляризация сегнетоэлектриков в этом смысле аналогична намагничению ферромагнетиков. Подобно явлениям остаточного намагничения и магнитного гистерезиса у последних сегнетоэлектрики проявляют остаточную электрическую поляризацию и электрический гистерезис. В связи с указанной аналогией сегнетоэлектрики называют также ферроэлектриками.

§ 16. Распределение заряда на проводнике

В условиях электростатики заряды распределяются на внешней поверхности проводника, которая представляет в условиях равновесия зарядов поверхность равного потенциала.

Линии напряженности нормальны к поверхности проводника. Внутри проводника в условиях равновесия зарядов электрический потенциал постоянен $\varphi = \text{const}$ и напряженность электрического поля $E = 0$.

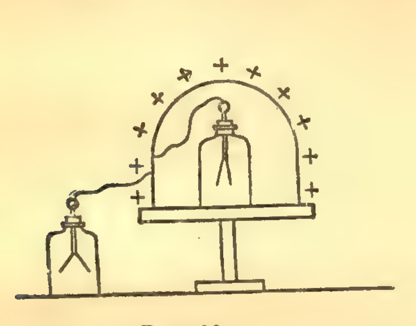


Рис. 86

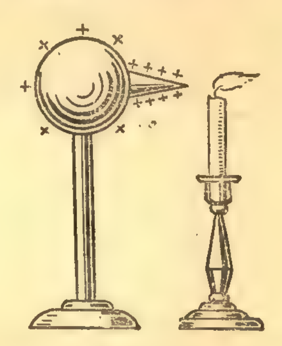


Рис. 87

Отсутствие поля внутри проводника, помещенного в электрическое поле, используется в технике в целях электростатической защиты от внешних электрических полей — экранировки.

Опыт Фарадея. В сказанном выше можно убедиться, поместив электроскоп внутри колокола из проволочной сетки. Если сетка заряжена, то листки электроскопа, соединенного с ней, не расходятся, так как весь заряд находится на внешней поверхности проводника (рис. 86).

Связь между напряженностью поля у поверхности проводника и поверхностной плотностью заряда. Напряженность поля на границе проводника $E = E_n = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$.

Наибольшая плотность заряда оказывается (в силу отталкивания частей заряда друг от друга) в наиболее выпуклых местах поверхности проводников — на ребрах и остриях. Вблизи этих мест эквипотенциальные поверхности расположены ближе одна к другой, чем где-либо, поэтому напряженность E (градиент потенциала) максимальна. Это приводит к стеканию электричества с острия (рис. 87). «Электрический ветер» — это поток заряженных молекул, на которых размещаются заряды, стекающие с острия.

§ 17. Электрическая емкость проводников

Электроемкость проводника C численно равна величине заряда, который можно сообщить проводнику, чтобы увеличить его потенциал на единицу:

$$C = \frac{dq}{d\varphi}.$$

В системе СГСЭ единица емкости 1 *см.*

В системе МКСА единица емкости

$$1 \text{ фарада} = \frac{\text{кулон}}{\text{вольт}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{СГСЭ заряда}}{\frac{1}{300} \text{СГСЭ потенц.}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Электроемкость шара радиусом r:

$$C_{\text{шара}} = \varepsilon_{\text{отн}} \cdot r \text{ см}, \quad C_{\text{шара}} = 4\pi\varepsilon r \text{ ф}.$$

Электроемкость уединенного проводника зависит от его геометрических размеров, формы и диэлектрической проницаемости среды, окружающей его, и не зависит от заряда на проводнике.

Электроемкость конденсатора. Конденсатором называется совокупность двух (или нескольких) проводников, разделенных прослойкой диэлектрика.

Электроемкостью конденсатора называется величина, измеряемая отношением заряда одной из его обкладок q к разности потенциалов U между обкладками:

$$C_{\text{конд}} = \frac{q}{U}.$$

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_{\text{отн}} S}{4\pi d} \text{ см}; \quad C = \frac{\varepsilon S}{d} \text{ ф}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора, состоящего из двух коаксиальных обкладок радиусов r_1 и r_2 и высоты h:

$$C = \frac{\varepsilon_{\text{отн}} h}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ см}; \quad C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ ф} \quad (r_2 > r_1).$$

Емкость сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических обкладок радиусом r_1 и r_2:

$$C = \frac{\varepsilon_{\text{отн}} r_1 r_2}{r_2 - r_1} \text{ см}; \quad C = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \text{ ф} \quad (r_2 > r_1).$$

При параллельном соединении конденсаторов общая емкость C равна сумме соединяемых емкостей $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k.$$

При последовательном соединении конденсаторов величина, обратная общей емкости батареи, равна сумме величин, обратных соединяемым емкостям $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}.$$

§ 18. Энергия электрического поля

Энергия системы неподвижных точечных зарядов. Энергия электрического заряда q, находящегося в поле других зарядов с электрическим потенциалом φ в точке, где помещен заряд, измеряется произведением заряда q на величину потенциала:

$$W = q\varphi.$$

Энергия системы двух зарядов q_1 и q_2 измеряется работой, которую совершает сила электрического поля при удалении одного из этих зарядов в бесконечность. Если $\varphi_{2,1}$ — потенциал поля первого заряда в точке, где находится второй заряд, и $\varphi_{1,2}$ — потенциал поля второго заряда в точке, где находится первый, то:

$$W = q_1 \cdot \varphi_{1,2} = q_2 \cdot \varphi_{2,1} = \frac{1}{2}(q_1 \cdot \varphi_{1,2} + q_2 \cdot \varphi_{2,1}).$$

Для системы неподвижных точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_n$ энергия:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} q_k \varphi_k,$$

где φ_k — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме k-го в точке, где находится заряд q_k.

Энергия заряженного проводника. Увеличение энергии проводника dW при получении им заряда dq измеряется произведением потенциала проводника φ на dq: $dW = \varphi dq$.

Энергия заряженного проводника:

$$W = \int dW = \int \varphi dq = \int \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C},$$

причем постоянная интегрированная положена равной 0, так как энергия незаряженного проводника равна 0; q — полный заряд проводника, C — емкость проводника.

Учитывая связь заряда q, емкости C и потенциала φ: $C = \frac{q}{\varphi}$, найдем энергию проводника, заряженного зарядом q до потенциала φ:

$$W = \frac{q\varphi}{2}.$$

Энергия проводника емкостью C, заряженного до потенциала φ:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Энергия электрического поля. Плотностью энергии w называется величина, измеряемая энергией W в единице объема V:

$$w = \frac{dW}{dV}.$$

Плотность энергии электрического поля w_E:

в системе СГСЭ:

$$w_E = \frac{1}{8\pi} \cdot \varepsilon_{\text{отн}} E^2 = \frac{ED}{8\pi} \ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3};$$

в системе МКСА

$$w_E = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} \ \frac{\text{дж}}{\text{м}^3}.$$

Энергия электрического поля в объеме V определяется интегралом по объему V:

$$W = \int w_E \, dV.$$

в системе СГСЭ: в системе МКСА:

$$W_E = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V ED \, dV \text{ эрг}; \qquad W_E = \frac{1}{2} \int\limits_V ED \, dV \text{ дж}.$$

Из последних соотношений очевидно, что энергия рассредоточена по всему объему, занимаемому полем, а не локализована в заряженном теле. Таким образом, этой энергией обладает электрическое поле как один из видов материи.

Теорема Ирншоу. Анализ различных равновесных конфигураций неподвижных зарядов убеждает, что всегда имеется такое изменение конфигурации зарядов, при котором потенциальная энергия системы уменьшится, а стало быть рассматриваемое равновесие зарядов неустойчиво.

Формулировка теоремы Ирншоу: устойчивое статическое распределение электрических зарядов невозможно.

Из теоремы Ирншоу следует, что атомы и молекулы, представляющие собой устойчивые системы электрических зарядов, должны являться динамическими системами, части которых находятся в непрерывном движении.

Пондеромоторные силы. Силы взаимодействия между заряженными телами называются пондеромоторными, от латинских слов pondus — вес и motus — движение.

Пластины плоского конденсатора притягиваются с силой:

$$F = \frac{\varepsilon_{\text{отн}} E^2}{8\pi} S \text{ дин},$$

где S — площадь пластины.

Сила притяжения пластин, приходящаяся на единицу площади пластины, равна плотности энергии поля.

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 19. Электрический ток

Электрическим током называется направленное перемещение электрических зарядов.

Различаются:

а) ток проводимости, когда микроскопические электрические заряды перемещаются внутри неподвижного макроскопического тела (твердого, жидкого или газообразного);

б) конвекционный ток, когда заряды переносятся вместе с макроскопическими частицами или телами, на которых они находятся;

в) ток в вакууме, когда микроскопические заряженные частицы (ионы или электроны) движутся независимо от макроскопических тел в вакууме.

Сила тока. Величина i, определяемая количеством электричества dq, проходящим через поперечное сечение проводника за бесконечно малый промежуток времени dt, называется силой тока:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Если за любые равные промежутки времени через поперечное сечение проводника проходят одинаковые заряды, ток i называется постоянным (по величине и по направлению) и обозначается I.

Плотностью тока j называется величина, измеряемая зарядом, протекающим за единицу времени через единицу поверхности проводника.

Плотность тока есть вектор, нормальный к поверхности, через которую протекает ток.

Численно $j = \frac{I}{S}$, где S — площадь поперечного сечения проводника.

За направление электрического тока условно принимается направление движения положительных зарядов (или направление, противоположное направлению движения отрицательных зарядов).

§ 20. Закон Ома для участка цепи

Падение потенциала ($\varphi_1 - \varphi_2$) на участке электрической цепи, не содержащем источников тока, называется напряжением U, приложенным на этом участке.

В 1826 г. немецкий ученый Георг Симон Ом (1787—1854) установил экспериментально закон для участка цепи: ток I в проводнике прямо пропорционален напряжению U на концах проводника:

$$I = GU.$$

Коэффициент пропорциональности G называется проводимостью проводника, а величина, обратная проводимости — сопротивлением R проводника, т. е.

$$I = \frac{U}{R}.$$

Существенно, что в зависимости, найденной Омом, сопротивление R выступает как постоянная величина, присущая данному проводнику и не зависящая от приложенного к нему напряжения.

График зависимости, выражаемой законом Ома (вольтамперная характеристика), есть прямая (рис. 88).

Удельное сопротивление. Для цилиндрического однородного проводника его сопротивление R прямо пропорционально длине l и обратно пропорционально площади поперечного сечения S:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Рис. 88

Коэффициент пропорциональности ρ называется удельным сопротивлением вещества, из которого выполнен проводник.

Установим единицу удельного сопротивления:

$$1 \frac{ом \cdot см^2}{см} = 1\ ом \cdot см.$$

Это есть удельное сопротивление вещества, цилиндр из которого длиной в 1 *см* и площадью поперечного сечения в 1 *см*^{2} имеет сопротивление в 1 *ом*.

Для проволок удобно длину измерять в *м*, а площадь поперечного сечения в *мм*^{2}, тогда R измеряется в $\frac{ом \cdot мм^2}{м}$:

$$1 \frac{ом \cdot мм^2}{м} = \frac{1\ ом \cdot (10^{-1}\ см)^2}{100\ см} = 10^{-4}\ ом \cdot см.$$

Сопротивления некоторых веществ

(в *мком · см* при 20°С, температурные коэффициенты — при 20°С)

Металл	Сопротивление	Температурный коэффициент	Металл	Сопротивление	Температурный коэффициент
Алюминий	2,82	0,0036	Никель	7,24	0,0054
Висмут	120	0,004	Нихром	ок. 100	0,0004
Вольфрам	5,5	0,0052	Олово	11,4	0,0044
Железо	9,8	0,005	Палладий	10,7	0,0036
Золото	2,42	0,0036	Платина	10,5	0,0037
Инвар	78	0,002	Платинид	ок. 38	ок. 0,00028
Иридий	6,15	0,0037	Ртуть	95,77	0,00089
Кобальт	5,7	0,0055	Свинец	20,63	0,0040
Константан	49	0,00001	Серебро	1,62	0,0036
Латунь	ок. 8	ок. 0,0015	Сталь легированная	ок. 45	ок. 0,0015
Магний	4,46	0,0039	Сталь мягкая	ок. 15	ок. 0,0033
Манганин	ок. 44	ок. 0,00001	Сталь струнная	ок. 12	ок. 0,0032
Медь	1,72	0,0040	Сурьма	42	0,0038
Молибден	5,6	0,0047	Тантал	15,5	0,0031
Нейзильбер	ок. 28	ок. 0,0003	Фосфористая бронза	ок. 8	ок. 0,0035
			Цинк	5,92	0,0035

Изоляторы (в *ом · см* при 18°С)

Бакелит (чистый, без наполнит.)	$2 \cdot 10^{16}$
Кварц (паралл. оси)	$1 \cdot 10^{14}$
Кварц (перпенд. оси)	$3 \cdot 10^{16}$
Листовое стекло	$2 \cdot 10^{13}$
Неглазурованный фарфор	$3 \cdot 10^{14}$
Парафин	$3 \cdot 10^{18}$
Плавленый кварц (600°С)	$6 \cdot 10^{7}$
Сера	$1 \cdot 10^{17}$
Слюда (чистая)	$5 \cdot 10^{16}$
Фибра	$2 \cdot 10^{10}$
Целлулоид	$2 \cdot 10^{10}$
Шеллак	$1 \cdot 10^{16}$
Шифер	$1 \cdot 10^{8}$
Эбонит	$2 \cdot 10^{15}$
Янтарь	$5 \cdot 10^{16}$

§ 21. Сторонние силы. Электродвижущая сила (э. д. с.)

Наличие тока в проводнике приводит к нейтрализации помещенных на его концах зарядов. Для поддержания постоянной разности потенциалов, а следовательно, и тока, необходимо наличие сторонних сил неэлектрической природы, осуществляющих разделение электрических зарядов.

Природа сторонних сил может быть различна. В генераторах электрического тока разделение зарядов осуществляется силами магнитного поля, в гальванических элементах и аккумуляторах — химическими и т. д.

Величина, измеряемая работой сторонних сил при переносе ими единицы положительного заряда в цепи, называется электродвижущей силой (э. д. с.) источника тока $\mathscr{E}$.

Напряжением U на участке цепи $1-2$, содержащем э. д. с., называется величина, измеряемая работой электростатических и сторонних сил по переносу единицы положительного заряда из точки 1 в точку 2:

$$U_{12} = (G_2 - G_2) + \mathscr{E}.$$

Закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.:

$$IR_{1,2} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E},$$

где $R_{1,2}$ — сопротивление участка цепи,

$(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов на его концах,

$\mathscr{E}$ — э. д. с., действующая на участке.

Закон Ома для замкнутой цепи. Для замкнутой цепи $U_{1,2} = 0$ и $R_{1,2} = R + r$, т. е. полное сопротивление цепи складывается из сопротивления внешнего участка цепи R и внутреннего сопротивления источника тока r, поэтому:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}.$$

Измерение э. д. с. По закону Ома для участка цепи $I = \frac{U}{R}$. Для замкнутой цепи $I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}$. Приравнивая эти два уравнения, получаем:

$$\frac{U}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R + r},$$

откуда

$$U = \mathscr{E}\frac{R}{R + r}, \qquad U = \mathscr{E}\frac{1}{1 + \frac{r}{R}}.$$

Если сопротивление R внешнего участка цепи бесконечно велико ($R = \infty$), то $U = \mathscr{E}$.

Электродвижущая сила источника тока численно равна напряжению на зажимах его при разомкнутой внешней цепи.

Электродвижущая сила гальванических элементов

Стандартный элемент Вестона. Э. д. с. при 20° С составляет 1,01830 междунар. вольта. В области температур от 20 до 40° С э. д. с. зависит от температуры по следующему закону:

$$\text{э. д. с.} = 1{,}01830 - 406 \cdot 10^{-7}(t - 20) - 9{,}5 \cdot 10^{-7}(t - 20)^2 + 0{,}1 \cdot 10^{-7}(t - 20)^3.$$

Стандартный элемент Кларка. Э. д. с. при 15° С составляет 1,4328 междунар. вольта. В области температур от 0 до 30° С:

$$\text{э. д. с.} = 1{,}4328 - 119 \cdot 10^{-5}(t - 15) - 0{,}7 \cdot 10^{-5}(t - 15)^2.$$

Максимальный ток, который может быть получен от стандартных элементов без их существенной поляризации, имеет порядок величины $5 \cdot 10^{-5}a$.

Распространенные гальванические элементы

Элемент	Приблиз. э. д. с., в	Состав
Лекланше	1,5	Амальгамированный цинк; насыщенный раствор аммиачной соли; двуокись марганца и уголь; уголь.
Даниэля	1,1	Амальгамированный цинк; раствор серной кислоты в воде (60 *см³/л*); насыщенный раствор медного купороса; уголь.
Грене	2,0	Амальгамированный цинк; раствор 90 *г* $K_2Cr_2O_7$, 100 *см³* H_2SO_4, 900 *см³* H_2O; уголь.
Бунзена	1,9	Амальгамированный цинк; раствор серной кислоты в воде (80 *см³/л*); концентрированная азотная кислота; уголь.

Термоэлектродвижущая сила некоторых элементов и сплавов в паре со свинцом

Значения приближенные, испытывают сильное влияние структуры и чистоты металлов. Температура холодного спая 0° С:

$$T.\ э.\ д.\ с.\ (мкв) = At + Bt^2$$

Положительное значение т.э.д.с. указывает, что в горячем спае ток идет из свинца. Для спая любых двух металлов т.э.д.с. равна разности значений их т. э. д. с., указанных в таблице (с учетом знаков).

Металл	*A*	*B*	Область температур, °С
Алюминий	— 0,50	0,00086	0÷200
Висмут	—74	—	0÷100
Вольфрам	1,59	0,017	0÷100
Железо	16,7	—0,015	—230÷100
Золото	2,9	0,0046	0÷200
Иридий	2,4	—0,0014	— 80÷100
Константан	—38,1	—0,045	0÷400
Латунь	0,14	0,0026	0÷100
Медь	2,76	0,006	0÷100
Нейзильбер	—10,9	—0,016	—200÷100
Никель	—16,3	—0,027	—200÷100
Нихром	25	—	0÷420
Олово	— 0,17	0,0009	0÷200
Платина	— 3,0	—0,016	—200÷300
Ртуть	— 8,8	—0,016	0÷200
Серебро	3,0	0,0034	—200÷100
Цинк	3,05	—0,01	0÷100

§ 22. Закон Джоуля — Ленца

Закон установлен английским физиком Джемсом Прескотом Джоулем (1818—1889) и русским физиком Эмилием Христиановичем Ленцем (1804—1865).

Тепло, выделяемое в проводнике, по которому течет ток, прямо пропорционально квадрату тока I, сопротивлению проводника R и времени прохождения тока t:

$$Q = kI^2Rt.$$

Если I измерено в амперах, R в омах и t в секундах, то правая часть получается в джоулях:

$$Q = 0{,}24\, IUt \text{ кал};$$

$$Q = 0{,}24\, I^2Rt \text{ кал};$$

$$Q = 0{,}24\, \frac{U^2}{R} t \text{ кал}.$$

Это различные формы записи закона Джоуля — Ленца.

Мощность тока $P = IU$. Если справедлив закон Ома $U = IR$, можно пользоваться формулами:

$$P = I^2R \quad \text{и} \quad P = \frac{U^2}{R}.$$

§ 23. Законы Кирхгофа для разветвленной цепи

Узлом в разветвленной цепи называется точка, где сходится более двух проводников.

Контуром в разветвленной цепи называется замкнутый участок такой цепи.

Ветвью называется участок цепи между соседними узлами.

Следующие законы были установлены в 1847 г. немецким физиком Густавом Робертом Кирхгофом (1824—1887).

Первое правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю, если считать подходящие к узлу токи положительными и отходящие — отрицательными:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0.$$

Это правило выражает закон сохранения электрического заряда. В противном случае в узлах осуществлялось бы накопление заряда, так как за единицу времени к узлу подходило бы и от узла отходило разное количество электричества.

Второе правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления (включая и внутреннее) равна алгебраической сумме электродвижущих сил, действующих в замкнутом контуре:

$$\sum IR + \sum Ir = \sum \mathcal{E}.$$

При этом и токи, и э. д. с., совпадающие с произвольно выбранным направлением обхода контура, считаются положительными, а направленные навстречу обходу — отрицательными.

Первое и второе правило Кирхгофа, если известны сопротивления и э. д. с., включенные в разветвленную цепь, позволяют составить систему алгебраических уравнений первой степени относительно неизвестных токов в ветвях и найти все эти токи, решая систему.

Примечание. Поскольку направления токов в процессе составления уравнений на основании правил Кирхгофа неизвестны, следует расставить стрелки, указывающие эти направления, предположительно, руководствуясь лишь тем, чтобы для каждого узла имелись как подходя-

щие к нему, так и отходящие от него токи. Если значение какого-либо из токов, определенное из решения уравнений, получается отрицательным, это значит, что предположительно указанное направление тока следует изменить на противоположное.

Эквивалентные замены в ветвях. Ветвь, состоящую из нескольких последовательно соединенных сопротивлений (внешних и внутренних), можно заменить одним сопротивлением, равным сумме этих сопротивлений.

Несколько сопротивлений, включенных параллельно между двумя узлами, можно заменить одним, сопротивление которого определяется по правилам параллельного соединения.

Соединение сопротивлений. Последовательным соединением участков цепи называется такое, при котором конец предыдущего соединяется с началом последующего (рис. 89, *а*).

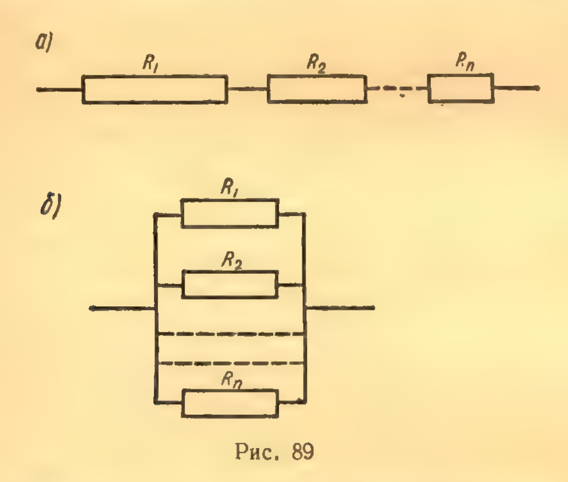


Рис. 89

Сопротивление R цепи последовательно соединенных сопротивлений R_1, R_2, ..., R_n равно сумме этих сопротивлений:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

Параллельным соединением участков цепи называется такое, при котором начала всех участков соединяются в один узел, а концы — в другой (рис. 89, *б*).

Величина, обратная сопротивлению параллельного соединения сопротивлений, равна сумме величин, обратных сопротивлению каждого из участков:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.$$

Соответственно проводимость G параллельного соединения сопротивлений равна сумме проводимостей каждого из участков:

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k.$$

Действительно, при параллельном соединении ток $I = \frac{U}{R}$ равен сумме токов в каждом из участков $I_1 = \frac{U}{R_1}$, $I_2 = \frac{U}{R_2}$ и т. д.

Поэтому

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n},$$

что после сокращения на общее для всех участков напряжение U приводит к указанному выше правилу.

Соединение э. д. с. При последовательном соединении э. д. с. полная э. д. с., действующая на участке, равна алгебраической сумме соединяемых э. д. с., поскольку работы сил складываются алгебраически

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k.$$

Общее внутреннее сопротивление последовательно соединенных э. д. с. равно сумме внутренних сопротивлений каждой из э. д. с.:

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \sum_{k=1}^{n} r_k.$$

При параллельном соединении n одинаковых э. д. с. соединяют между собой одинаковые полюсы всех источников. В этом случае полная э. д. с. равна э. д. с. каждого из соединяемых источников, полное внутреннее сопротивление в n раз меньше внутреннего сопротивления каждого из соединяемых источников.

Источники э. д. с. разной величины параллельно не соединяются, так как при этом ток через меньшую э. д. с. проходил бы в направлении, противоположном обычному, как это следует из правил Кирхгофа. Меньшая из э. д. с. являлась бы в этом случае лишь вредным фактором.

§ 24. Определение заряда электрона из законов Фарадея

Майкл Фарадей в 1833 г. экспериментально показал, что при прохождении к электродам числа ионов, равного числу Авогадро N, с валентностью n отношение перенесенного ими заряда q к их валентности является постоянной величиной:

$$F = \frac{q}{n} = 96\,496 \text{ кулон}$$

и в настоящее время называется числом Фарадея.

Заряд одновалентного иона e равен, очевидно, отношению числа Фарадея F к числу Авогадро N:

$$e = \frac{F}{N} = \frac{96\,496 \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ заряда}}{6{,}025 \cdot 10^{23}} \cong 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ заряда.}$$

Начиная с этого времени, идея атомарного строения электрического заряда получила развитие в работах Вильгельма Вебера (1804—1891),

Вильяма Крукса (1832—1919), Германа Гельмгольца (1821—1894), Сванте Аррениуса (1859—1927), Гендрика Антона Лоренца (1853—1928) и др.

Развитие представлений об атомарности, дискретности электрического заряда привело к открытию элементарной частицы электрона — носителя элементарного отрицательного электрического заряда.

§ 25. Определение удельного заряда электрона

Опыт Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси (1913 г.). Катушка из изолированного проводника, выводы которой присоединены к телефону (рис. 90), приводится в колебательное движение вокруг оси. Благодаря инерции свободных зарядов в проводнике, намотанном на катушку, при крутильных колебаниях ее на концах провода возникает переменная разность потенциалов и телефон издает звук.

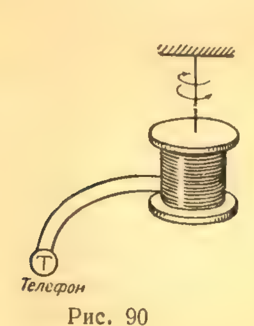


Рис. 90

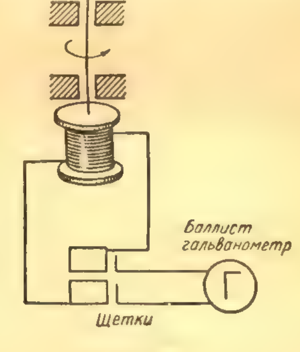


Рис. 91

Опыт Стюарта и Толмэна (1916 г.). Катушка приводится в быстрое вращательное движение вокруг оси и затем резко тормозится. Выводы катушки замкнуты на баллистический гальванометр (рис. 91). При торможении через гальванометр проходит импульс тока, связанный с инерцией свободных зарядов в проводнике катушки.

При инерционном разделении зарядов в проводнике возникает электрическое поле с напряженностью $E = \frac{U}{l}$, где l — длина проводника, а U — разность потенциалов на концах его; $U = iR$, причем R — полное сопротивление цепи, i — ток.

Указанное поле уменьшает количество движения каждого элементарного носителя заряда mv до нуля. Пусть заряд носителя e.

Импульс силы $Fdt = eEdt$ равен изменению количества движения носителя заряда mdv, т. е.

$$mdv = eEdt = \frac{eU}{l} dt = \frac{eRi}{l} dt = \frac{eR}{l} dq,$$

где dq — элементарное количество электричества

$$dq = idt.$$

Интегрируя, получим:

$$\int_v^0 mdv = \frac{Re}{l} \int_0^q dq \quad \text{или} \quad \frac{e}{m} = -\frac{lv}{Rq}.$$

Величины, стоящие в правой части, измеримы.

Опыт позволяет определить отношение заряда к массе у элементарного носителя заряда в металле:

$$\frac{e}{m} \simeq -5{,}27 \cdot 10^{17} \frac{\text{СГСЭ заряда}}{г},$$

что совпадает с отношением $\frac{e}{m}$ для электрона.

Опыт Стюарта и Толмэна устанавливает, что *носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны.*

§ 26. Закон Ома в электронной теории

Если внутри металла создано однородное электрическое поле напряженностью E, то на электрон действует сила $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, сообщающая ему ускорение в промежутке между положительными ионами кристаллической решетки металла.

За время свободного пробега τ скорость направленного движения электрона возрастает от 0 до

$$U_{макс} = \frac{e\mathbf{E}}{m}\tau.$$

В среднем электрон движется направленно со скоростью:

$$v_{средн} = \frac{U_{макс}}{2} = \frac{e\mathbf{E}\tau}{2m},$$

или

$$v_{средн} = \frac{e\mathbf{E}l}{2m\bar{u}},$$

поскольку

$$\tau = \frac{l}{\bar{u}},$$

где l — длина свободного пробега, а

$\bar{u}$ — средняя скорость хаотического движения электрона.

Если концентрация свободных зарядов n, то через единичную площадку за единицу времени проходит заряд:

$$\mathbf{j} = en\, v_{средн},$$

поэтому плотность тока j равна

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2 l}{2m\bar{u}} \mathbf{E}.$$

Это выражение есть закон Ома в электронной теории Друдэ—Лоренца.

Электропроводность определяется:

$$\gamma = \frac{ne^2 l}{2m\bar{u}} = \frac{1}{\rho},$$

где ρ — удельное сопротивление.

Для однородного цилиндрического проводника длины l и поперечного сечения S напряжение на его концах $U = El$, а сопротивление $R = \rho \frac{l}{S}$, поэтому

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l},$$

или

$$I = \frac{U}{R}.$$

Получим закон Ома для участка цепи в интегральной форме.

§ 27. Закон Джоуля — Ленца в электронной теории

Приращение энергии электрона ΔW за счет работы электрических сил поля равно разности энергий электрона в конце пробега $\frac{m}{2}(u + v_{\text{макс}})^2$ и в начале пробега $\frac{m\overline{u}^2}{2}$:

$$\Delta W = \frac{m}{2}\left(2\,\overline{uv}_{\text{макс}} + \frac{v^2_{\text{макс}}}{2}\right) = \frac{mv^2_{\text{макс}}}{2},$$

поскольку скорость хаотического движения $\overline{u}$ с одинаковой вероятностью совпадает с $v_{\text{макс}}$ по направлению или противоположно направлена, т. е. член $2\overline{uv}_{\text{макс}}$ в среднем равен 0.

Энергия, накапливаемая электронами, при столкновениях передается ионам кристаллической решетки. Полная энергия p, выделяющаяся в единице объема за единицу времени:

$$p = \frac{n\Delta W}{\tau} = \frac{n\overline{u}}{l} \cdot \frac{m}{2} \frac{e^2 l^2 E^2}{m^2 \overline{u}^2},$$

$$p = \gamma E^2.$$

Это есть закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Закон Джоуля — Ленца в интегральной форме. Если однородный цилиндрический проводник имеет длину l и поперечное сечение S, то мощность P, выделяемая в объеме $V = lS$:

$$P = pV = \frac{1}{\rho}\left(\frac{V}{l}\right)^2 lS = \frac{U^2}{\rho \frac{l}{S}} = \frac{U^2}{R},$$

где R — полное сопротивление проводника,

$$P = \frac{U^2}{R}; \quad P = I^2 R; \quad P = IU.$$

Мы нашли выражение закона Джоуля — Ленца в интегральной форме.

§ 28. Закон Видемана — Франца в электронной теории

Средняя энергия одного электрона согласно классической электронной теории металлов:

$$\varepsilon = \frac{3}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана,
T — абсолютная температура.

Теплоемкость, отнесенная к одному электрону:

$$C_e = \frac{3}{2} k.$$

Считая, что вся теплопроводность металла обусловлена свободными электронами, на основании кинетической теории газов получим коэффициент теплопроводности металла λ:

$$\lambda = \frac{1}{3} l\bar{u}nC_e.$$

Сравнивая λ с коэффициентом электропроводности $\gamma = \frac{ne^2 l}{2m\bar{u}}$ (стр. 137), получим:

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon C_e}{e^2},$$

или

$$\frac{\lambda}{\gamma} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T,$$

т. е. отношение теплопроводности λ к электропроводности γ для всех металлов одинаково и пропорционально абсолютной температуре T.

Этот закон был сформулирован Видеманом и Францем.

Указанный закон иллюстрируется таблицей:

Отношение коэффициентов теплопроводности и электропроводности металлов

Металл	$T°$ К	$\frac{\lambda}{\gamma T} \cdot 10^8$	Металл	$T°$ К	$\frac{\lambda}{\gamma T} \cdot 10^8$
Алюминий	291,2	2,18	Платина	273,2	2,51
—	373,2	2,27	—	373,9	2,60
Висмут	291,2	3,31	Ртуть	196,2	2,55
—	373,2	2,89	—	86,2	2,65
Железо	273,2	2,47	Свинец	273,2	2,47
Золото			—	373,9	2,56
	273,2	2,35	Серебро	273,2	2,31
	373,2	2,40	—	373,2	2,37
Магний	273,2	2,47	Сурьма	273,2	2,83
			—	90,0	3,03
Медь	273,2	2,23	Цинк	293,2	2,56
—	374,8	2,23	—	83,2	2,04
Никель	373,2	2,28	—	—	—
Олово	291,2	2,52	—	—	—
—	373,2	2,49	—	—	—

Примечание. Коэффициент теплопроводности λ выражен в $\frac{вт}{см\ град^{-1}}$, электропроводность γ в $ом^{-1}\ см^{-1}$.

Зависимость сопротивления металлов от температуры. Как показывает опыт, сопротивление металлических проводников R_t линейно возрастает с увеличением температуры $t°$ по закону:

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t°),$$

где R_0 — сопротивление при 0° C,

α — температурный коэффициент сопротивления. Для чистых металлов

$$\alpha \cong \frac{1}{273}\ \textit{град}^{-1}.$$

§ 29. Сверхпроводимость

Явление сверхпроводимости заключается в том, что вблизи абсолютного нуля температур сопротивление проводника при некоторой характерной для данного вещества температуре скачкообразно уменьшается до нуля.

Период	Ряд	Группы								
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	0
I	1	H								He
II	2	Li	Be	B	C	N	O	F		Ne
III	3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl		Al
IV	4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe Co Ni	
	5	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br		Kr
V	6	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru Rh Pd	
	7	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	J		Xe
VI	8	Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os Ir Pt	
	9	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At		Rn
VII	10	Fr	Ra	Ac	Th	Pa	U			

Рис. 92

Сверхпроводимость была открыта в 1911 г. голландским ученым Гейке Камерлинг-Оннесом (1853—1926), изучавшим электропроводность ртути при низких температурах.

Сверхпроводимость обнаружена у 19 металлов и ряда сплавов, в том числе и у сплавов тех веществ, которые сами не являются сверхпроводниками. На рис. 92 сверхпроводники помещены в рамку.

Температуры перехода в сверхпроводящее состояние

Вещество	$T°$ К	Вещество	$T°$ К	Вещество	$T°$ К
Алюминий	1,14	Цирконий	0,7	Лантан	4,71
Титан	0,53	Ниобий	9,22	Гафний	0,35
Ванадий	4,3	Кадмий	0,54	Тантал . . .	4,38
Цинк	0,79	Индий	3,37	Ртуть	4,12
Галлий	1,06	Олово	3,69	Таллий	2,39
—	—	Рений	0,85	Свинец	7,26
—	—	—	—	Торий	1,37
—	—	—	—	Уран	1,30

Наиболее высокими температурами перехода в сверхпроводящие состояния обладают нитрид ниобия Nb·N (23° К); карбид ниобия Nb·C (10,1° К) и ниобий Nb (9,22° К).

Если бы удалось получить сплавы со сверхпроводимостью при обычных температурах (~300° К), то это имело бы огромное значение для электротехники.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ВАКУУМЕ, ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ

§ 30. Термоэлектронная эмиссия

Испускание электронов накаленными телами называется термоэлектронной эмиссией.

В хаотичном движении внутри металла отдельные электроны приобретают кинетическую энергию, превышающую работу выхода электрона из металла, и вырываются из металла. При этом металл заряжается положительно и притягивает вылетевшие электроны. В результате двух процессов: «испарения» электронов из металла и «конденсации» электронов в металл устанавливается некоторая концентрация электронов над металлом. Эта концентрация ничтожно мала при обычных температурах и резко возрастает с повышением температуры.

Если накаленный металл является катодом вакуумной трубки, причем приложенное к ней напряжение обеспечивает увлечение всех эмитируемых из катода электронов электрическим полем, то характеристикой термоэмиссионных свойств вещества катода является ток эмиссии, приходящийся на каждый квадратный сантиметр накаленной поверхности тела, т. е. плотность тока эмиссии при насыщении.

Формула Дёшмена — Ричардсона. Плотность тока эмиссии при насыщении $j_{нас}$ описывается формулой Дёшмена — Ричардсона:

$$j_{нас} = BT^2 e^{-\frac{A_{вых}}{kT}},$$

где B — постоянная, T — абсолютная температура катода, $A_{вых}$ — работа выхода электрона из металла, k — постоянная Больцмана.

Внесение примеси 1—2% тория к вольфраму или использование окислов металлов в тысячи раз увеличивает ток эмиссии. Поэтому торированный и оксидированный вольфрам широко применяется в приборах, использующих явление термоэлектронной эмиссии.

§ 31. Электрический ток в вакууме

Электрический ток через вакуум может быть осуществлен с помощью эвакуированной трубки, к электродам которой подводится напряжение. Накаленный катод обеспечивает термоэмиссию электронов.

Пучок электронов иногда называется в этом случае катодными лучами (рис. 93, *а*).

Ток в вакууме между накаленным катодом и анодом не подчиняется закону Ома. Причина этого в образовании вблизи катода электронного облака, создающего объемный отрицательный заряд.

Ток подчиняется в этом случае закону Богуславского — Ленгмюра, согласно которому ток I растет пропорционально разности потенциалов в степени 3/2:

$$I = \alpha U_a^{3/2}.$$

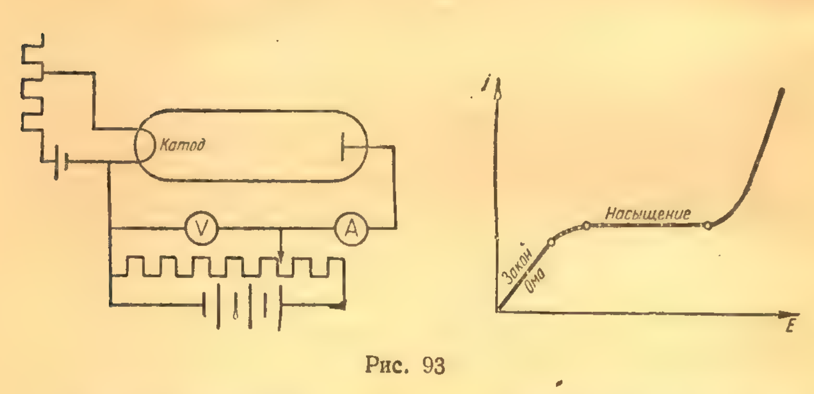


Рис. 93

При больших разностях потенциалов ток достигает насыщения. Ток насыщения $I_н$ определяется числом электронов, испускаемых катодом в единицу времени.

§ 32. Электрический ток в газах

Газы при атмосферном давлении являются хорошими изоляторами. Переносчики зарядов в них почти отсутствуют. Газ становится проводником, если создать в нем ионы (ионизовать газ).

Несамостоятельной проводимостью газа называется такая проводимость газа, при которой ионизация вызывается и поддерживается при помощи специального постороннего воздействия. К таким воздействиям относятся термическое (образование ионов в пламени), облучение газа ультрафиолетовым, рентгеновским или γ-излучением. Небольшая проводимость в воздухе создается космическими лучами, которые и были открыты в результате таких наблюдений.

Самостоятельная проводимость газа (обычно разреженного) обеспечивается тем, что заряженные частицы, разогнанные электрическим полем, при столкновении с нейтральными молекулами газа ионизируют их. При этом отпадает необходимость в дополнительном ионизаторе.

Ионизация газа и рекомбинация ионов. При наличии ионизатора в газе происходят два противоположных процесса: ионизация, т. е. распад нейтральных молекул на заряженные части (ионы) и рекомбинация (молизация), т. е. образование из разноименно заряженных ионов нейтральных молекул.

Число ионов, рекомбинирующих в молекулы, $\Delta n'$ пропорционально как числу положительных, так и числу отрицательных ионов, т. е. $\Delta n' = \gamma n_0^2$, где n_0 — число положительных (или отрицательных) ионов.

Если число возникающих ионов Δn равно числу рекомбинирующих $\Delta n = \gamma n_0^2$, имеет место равновесие. Число ионов одного знака в единице объема $n_0 = \sqrt{\frac{\Delta n}{\gamma}}$, где γ — коэффициент рекомбинации.

Подвижности ионов. Подвижностью газового иона называется величина u, численно равная скорости иона при напряженности электрического поля, равной единице.

Различают подвижности положительных ионов u_+ и отрицательных ионов u_-.

Скорость v упорядоченного движения иона пропорциональна напряженности поля E:

$$v_+ = u_+ E; \quad v_- = u_- E.$$

Закон Ома. Если плотность тока j столь мала, что можно пренебречь числом ионов, уносимых током, по сравнению с числом рекомбинирующих ионов, то число ионов n_0 в единице объема газа можно считать постоянным. Тогда плотность тока:

$$j = en_0 (v_+ + v_-),$$

$$j = en_0 (u_+ + u_-) E.$$

Последнее равенство выражает закон Ома.

Закон Ома при несамостоятельной проводимости газа справедлив лишь при малой плотности тока.

Насыщение. В случае, когда плотность тока столь велика, что убыль ионов определяется лишь процессом их нейтрализации на электродах, а рекомбинация не успевает произойти, ток не зависит от разности потенциалов и называется током насыщения.

Полная вольтамперная характеристика несамостоятельного газового разряда. Начальный линейный участок графика (рис. 93, *б*) соответствует области применимости закона Ома. При увеличении напряженности поля закон Ома перестает быть справедливым. Этому соответствует криволинейный участок характеристики. Затем наступает насыщение, которому соответствует отрезок графика, параллельный оси абсцисс.

При высоких напряжениях график начинает резко идти вверх. Это лавинообразное возрастание тока связано с процессами ударной ионизации. Ускоренные полем электроны начинают ионизовать нейтральные молекулы газа. Затем наступает электрический пробой газа.

Закон Столетова. *Максимальный ток наблюдается для исследуемого газа всегда при одном и том же отношении напряженности поля E к давлению p* (C — константа Столетова):

$$\frac{E}{p} = C.$$

Закон Пашена. *Пробой газа происходит для каждого газа при определенном, характерном для него отношении напряженности поля к давлению.*

Оба закона объясняются тем, что при малом давлении велика длина свободного пробега, вследствие чего электронные лавины образуются при меньших напряженностях поля.

Образование электронных лавин и ионов, а также выбивание ионами из катода дополнительных электронов при напряженностях порядка 10 000 $\frac{в}{см}$ в газе обычной плотности приводит к пробою газа и перерастанию несамостоятельного (тихого) разряда в самостоятельный.

Тлеющий разряд в газе. При пониженном давлении (10^{-3} *атм*) в газоразрядной трубке наблюдается тлеющий разряд, происходящий при отсутствии внешних ионизаторов.

В части трубки, прилегающей к аноду, имеет место положительное свечение, затем следует темное пространство Фарадея, тонкий ярко светящийся второй катодный слой, темное пространство Крукса и сияние, окружающее катод — первый катодный слой.

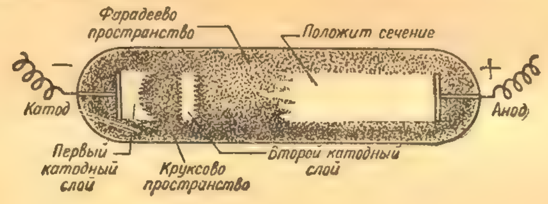


Рис. 94

Картина тлеющего разряда и распределение потенциала вдоль трубки приведены на рис. 94.

При тлеющем разряде катод под влиянием бомбардировки ионами становится источником электронов, устремляющихся к аноду. В относительно темном круксовом пространстве скорость электронов быстро возрастает.

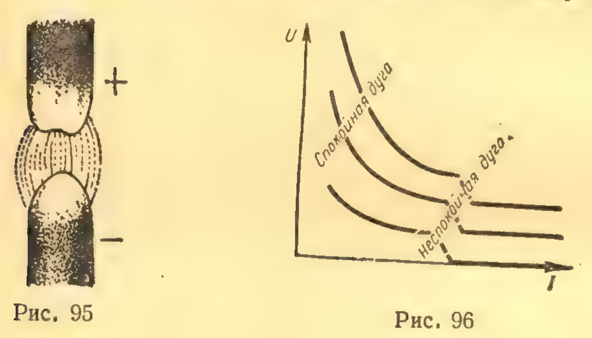


Рис. 95 Рис. 96

Во втором катодном слое вследствие соударений электронов с нейтральными молекулами скорость электронов уменьшается. Скорость электронов в фарадеевом пространстве меньше, чем в круксовом. Во втором катодном слое образуются положительные ионы, необходимые для поддержания разряда.

Положительное свечение иногда распадается на чередование светлых и темных полос — страты. При этом разряд называют слоистым.

Положительное свечение тлеющего разряда используется как источник света в газоразрядных трубках, наполненных инертными газами.

Дуговой разряд. Электрическая дуга была открыта в 1802 г. профессором В. В. Петровым (1761—1834).

Дуговой разряд образуется при большой плотности разрядного тока и поддерживается как эмиссией электронов с накаленного ударами ионов катода, так и термической ионизацией вследствие высокой температуры. При атмосферном давлении плотность тока у светлого катодного пятна для угольного катода равна 470 $\frac{a}{см^2}$, для железного — 7 200 $\frac{a}{см^2}$, для ртутного —

$4\,000\ \frac{a}{см^2}$. В процессе разряда угольный катод заостряется, а на аноде образуется положительный кратер (рис. 95). Температура зоны положительного свечения составляет 6 000° K при нормальном давлении, а при давлении в сотни атмосфер доходит до 10 000°. При увеличении тока электропроводность дуги вследствие усиления процессов термоэлектронной эмиссии и термоионизации резко возрастает, а сопротивление уменьшается. Влияние пространственных зарядов приводит к наличию обратной электродвижущей силы $U_{обр} \sim 10\ в$. Поэтому при увеличении тока I разность потенциалов на электродах U меняется по закону:

$$U = (a + U_{обр}) + \frac{b}{I}$$

(для дуги с угольными электродами).

Вольтамперная характеристика дуги (рис. 96) является падающей.

Случайное охлаждение газоразрядного промежутка приводит к уменьшению тока и угасанию дуги. Для обеспечения устойчивого горения последовательно с дугой во внешнюю цепь вводится реостат («успокоительное» сопротивление). При случайном уменьшении тока в дуге напряжение на успокоительном сопротивлении падает. При неизменном подведенном напряжении — это приводит к увеличению напряжения на дуге.

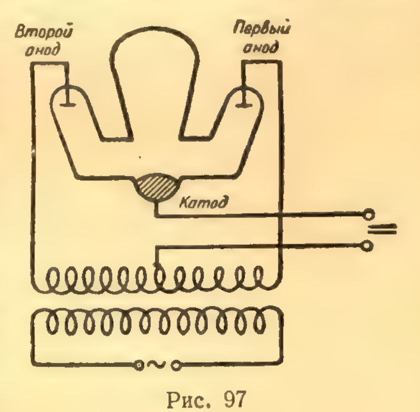


Рис. 97

Электрическая дуга применяется для электрического освещения в дуговых лампах и прожекторах, в электропечах и др.

Первые применения дуги для освещения были осуществлены П. Н. Яблочковым (1847 — 1894), обеспечившим устойчивость горения при помощи параллельного расположения угольных электродов («свеча Яблочкова») и В. Н. Чиколевым (1845—1898), создавшим дифференциальный регулятор, автоматически сближающий сгоравшие угли.

В настоящее время широко применяются ртутные дуговые лампы.

Сварка металлов посредством электрической дуги, впервые осуществленная русским ученым Н. Н. Бенардосом (1842—1905) и усовершенствованная Н. Г. Славяновым (1854—1897), широко применяется в технике.

Для плавления веществ и осуществления химических реакций при высоких температурах применяются дуговые электрические печи.

Дуговой разряд используется также в ртутных выпрямителях.

Ртутный выпрямитель (рис. 97) состоит из разрядной колбы с катодом из жидкой ртути и двух твердых металлических анодов. Разряд возникает лишь в случае, когда катодом является жидкая ртуть. Поэтому в течение одного полупериода электроны идут от ртутного катода к одному из анодов, в течение второго полупериода — от катода к другому аноду. Переменный ток преобразуется в пульсирующий по величине ток неизменного направления.

Искровой разряд в газе представляет собой неустойчивый разряд, сопровождающийся пробоем разрядного промежутка.

В газе образуются электронные лавины, приводящие к образованию каналов повышенной электропроводности.

Скорость распространения электронной лавины оказывается меньшей, чем скорость образования электропроводящего канала (стримера). Это свя-

зано с фотонной ионизацией газа. Возбужденные электронными лавинами атомы испускают фотоны, которые, двигаясь со скоростью света, обгоняют лавину и ионизуют атомы на пути ее последующего распространения.

Молния представляет собой мощный электрический искровой разряд между разноименно заряженными облаком и землей или двумя облаками. Напряженность поля перед разрядом молнии у земли достигает $2 \cdot 10^5$ — $3 \cdot 10^5$ *в/м*.

Электрическая искра вызывает разрушение металла анода (электроэрозию). Это явление инженерами Б. Р. и Н. И. Лазаренко было использовано для разработки электроискрового метода обработки металлов (резки, сверления и т. п.).

Коронный разряд наблюдается при напряжениях, недостаточных для пробоя газоразрядного промежутка на электродах.

При относительно невысоком напряжении коронный разряд на положительном электроде представляет ряд электронно-лавинных импульсов, длящихся 10^{-11} *сек*. При более высоком напряжении корона состоит из стримеров-каналов газоразрядной плазмы, обрывающихся в местах, где напряженность электрического поля мала.

Корона на отрицательном электроде напоминает околокатодное пространство тлеющего разряда.

Коронный разряд вызывает утечки электроэнергии в высоковольтных установках.

§ 33. Вакуумные и газонаполненные приборы

Электронно-лучевая трубка (рис. 98) представляет собой вакуумный баллон, в котором полученный на основе явления термоэлектронной эмиссии пучок электронов при помощи электрических или магнитных полей может направляться в определенную точку флуоресцирующего экрана.

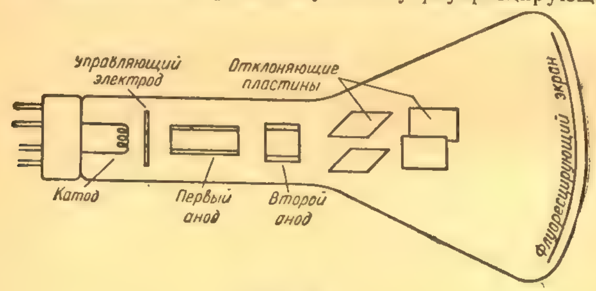


Рис. 98

Устройство, служащее для получения фокусировки и ускорения пучка электронов, называется электронной пушкой. Испускаемые накаленным катодом электроны проходят через отверстие в управляющем электроде, потенциал которого определяет интенсивность пропущенного диафрагмой пучка. Затем пучок электронов фокусируется в поле первого анода и ускоряется в поле второго анода.

Из электронной пушки электронный пучок попадает в управляющее устройство, состоящее из двух конденсаторов, причем пластины первого расположены горизонтально, а второго — вертикально. Переменное напряжение между пластинами первого конденсатора заставляет пучок электронов отклоняться по вертикали (вертикальная развертка), а переменное напряжение между пластинами второго — по горизонтали (горизонтальная развертка). Вместо описанной электростатической системы отклонения часто исполь-

зуется магнитная система отклонения, состоящая из двух катушек, расположенных на пути электронного пучка во взаимно перпендикулярных плоскостях. В этом случае горизонтальная и вертикальная развертка пучка осуществляется магнитными полями катушек.

Электронно-лучевая трубка является основной частью катодного осциллографа, используемого для изучения электрических колебательных процессов. Она применяется в телевидении, радиолокации, счетных машинах и т. п.

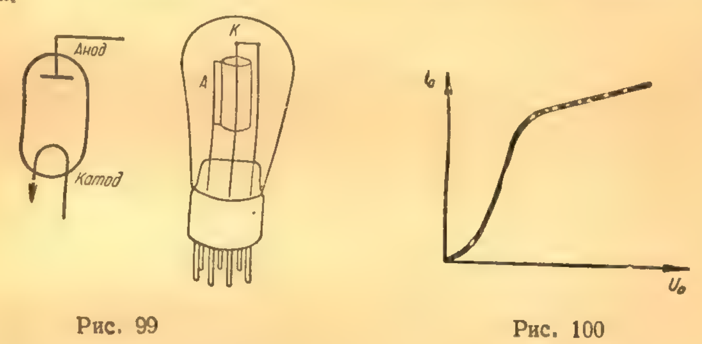


Рис. 99

Рис. 100

Практическая безынерционность электронного пучка делает электронно-лучевую трубку незаменимой для изучения быстро протекающих процессов (до 10^{-10} *сек*).

Д и о д—двухэлектродная электронная лампа (рис. 99), представляющая собой вакуумный прибор с односторонней проводимостью.

Катод *К* выполнен в виде проволочки, накаливаемой током от низковольтного трансформатора или батареи накала, анод *А* выполняется в виде цилиндра, охватывающего катод.

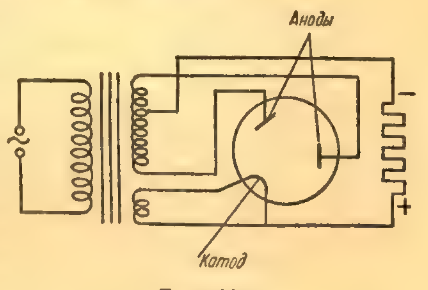


Рис. 101

Устройство диода основано на использовании термоэлектронной эмиссии. Накаленный катод окружен облачком электронов, создающих пространственный заряд. При наличии напряжения между катодом и анодом электроны от катода перемещаются к аноду и через лампу идет ток. В обратном направлении ток невозможен.

График зависимости между токами в анодной цепи и анодным напряжением называется характеристикой лампы (рис. 100). Диоды применяются в радиоприемниках для выпрямления высокочастотных токов.

К е н о т р о н. Диод, предназначенный для выпрямления переменного тока технической частоты, называется кенотроном. Двухполупериодный кенотронный выпрямитель, схема которого приведена на рис. 101, использует двойной диод, т. е. электронную лампу, в корпусе которой объединены два диода (обычно с общим катодом).

Средняя точка обмотки трансформатора через сопротивление соединена с катодом.

Электроны от катода идут к тому из анодов, который относительно катода имеет положительный потенциал в данную половину периода изменения напряжения во вторичной обмотке трансформатора. Но к какому бы из

анодов (поочередно) не летели электроны, через сопротивление R течет ток постоянного направления от катода к аноду.

Триод — это трехэлектродная электронная лампа (рис. 102). Введение между катодом и анодом третьего электрода — сетки — позволяет использовать электронную лампу для усиления переменных напряжений.

Усиливаемое напряжение прикладывается между сеткой и катодом U_c. Его колебания меняют число электронов, достигающих анода, т. е. меняют анодный ток лампы I_a.

Падение напряжения на включенном в анодную цепь триода сопротивлении R равно $I_a R$; изменяется оно прямо пропорционально анодному току I_a. Поэтому небольшие изменения потенциала U_c на сетке приводят к изменениям потенциала U в анодной цепи триода во много раз большим.

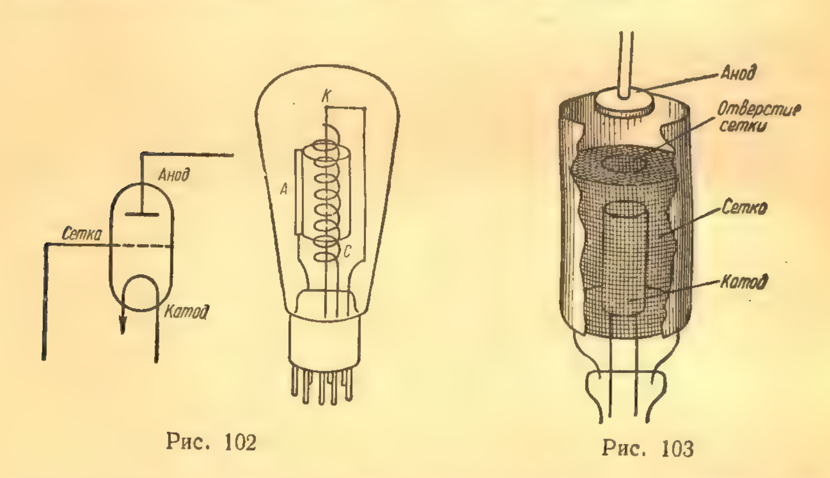


Рис. 102

Рис. 103

Газотрон — устройство для выпрямления токов, сходное с кенотроном, но отличающееся от него тем, что баллон газотрона содержит небольшое количество газа (паров ртути).

При столкновениях с электронами в лампе образуются газовые ионы, которые движутся к катоду и нейтрализуют объемный заряд электронов, поэтому газотрон работает при значительно более низких напряжениях, чем кенотрон.

Тиратрон представляет собой трехэлектродную лампу (рис. 103), в которой анод и катод разделены сеткой, выполненной в виде цилиндра с отверстием. Тиратрон заполнен парами ртути или аргоном.

При большом отрицательном потенциале сетка отбрасывает к катоду все испускаемые им электроны. При некотором определенном потенциале сетки электроны увлекаются полем анода, ионизуют газ и цепь анодного тока замыкается. После этого увеличение отрицательного потенциала сетки уже не может погасить тиратрон. Выключение анодного напряжения на 10^{-5} *сек* приводит к угасанию разряда.

§ 34. Электролиз

В проводящих жидкостях — электролитах — перенос зарядов осуществляется заряженными атомами или группами атомов — ионами.

В водном растворе молекулы ряда кислот, щелочей и солей диссоциируют (распадаются) на ионы. При встрече ионов разного знака они объеди-

няются (рекомбинируют) в молекулу. Между процессами диссоциации и рекомбинации устанавливается подвижное (динамическое) равновесие, при котором в растворе определенная часть молекулы распалась на ионы.

При введении в электролит полюсов источника тока (электродов) на хаотическое тепловое движение ионов накладывается их направленное перемещение к электродам.

Электропроводность водных растворов солей (в $ом^{-1}$ $см^{-1}$)

Растворенное вещество	5 °C	10° C	15° C	20° C	25° C
NaCl *	0,1555	0,1779	0,2014	0,2260	0,2513
KCl**	0,07414	0,08319	0,09252	0,10207	0,11180
1/10 KCl	0,00822	0,00933	0,01048	0,01167	0,01288
1/100 KCl	0,00090	0,00102	0,00115	0,00128	0,00141

* Насыщенный при всех указанных температурах.
** Нормальный, концентрация 74,59 *г/л* при 18° С.

Эквивалентные электропроводности (в $ом^{-1}$ при 18° С)

Концентр., *г-экв/л*	KCl	KNO_3	NaCl	$AgNO_3$	$\frac{1}{2}$ $CuSO_4$	HCl	$\frac{1}{2}$ H_2SO_4	KOH
0	130,1	126,5	109,0	115,8	115,0	378	383	238
0,0001	129,1	125,5	108,1	115,0	109,9	377	380	237
0,001	127,3	123,6	106,5	113,1	98,5	376	361	234
0,01	122,4	118,2	102,0	107,8	71,7	369	308	228
0,1	112,0	104,8	92,0	94,3	43,8	351	225	213

Электропроводность концентрированных растворов солей (при 18° С)

p	KCl	*c*	KNO_3	*c*	NaCl	*c*	$AgNO_3$	*c*
5	0,069	2	0,046	1,6	0,067	2,2	0,026	2,2
10	136	1,9	094	—	121	2,1	048	2,2
15	202	1,8	125	—	164	2,1	068	2,2
20	268	1,7	144	—	196	2,2	087	2,1

p	$CuSO_4$	*c*	HCl	*c*	H_2SO_4	*c*	KOH	*c*
5	0,019	2,2	0,395	1,53	0,209	1,21	0,172	1,9
10	,032	2,2	630	1,56	392	1,28	315	1,9
15	,042	2,3	745	1,55	543	1,36	425	1,9
20	—	—	762	1,54	653	1,45	499	2,0

p — количество безводного вещества, вес %;
c — положительная поправка на повышение температуры (% на 1° С).

Заряженные положительно ионы водорода и металлов перемещаются к катоду (катионы) и, разряжаясь на нем, превращаются в нейтральные атомы.

Отрицательно заряженные ионы перемещаются к аноду (анионы) и выделяются на нем в виде нейтральных частиц, отдавая свой заряд.

Пропускание электрического тока через электролит (электролиз жидкости) сопровождается выделением веществ на электродах и вторичными химическими реакциями образующихся веществ.

В равенстве, выражающем закон Ома для тока через электролит

$$j = F\eta\alpha\left(u_{+} + u_{-}\right)E,$$

где F — число Фарадея, η — эквивалентная концентрация, т. е. число грамм-эквивалентов растворенного вещества в единице объема растворителя, α—коэфициент диссоциации и u—подвижности ионов,
эквивалентной электропроводностью называется величина

$$\Lambda = F\alpha\left(u_{+} + u_{-}\right).$$

Электролиз водного раствора серной кислоты. В воде молекулы серной кислоты H_2SO_4 диссоциируют на ионы H^+ и ионы кислотного остатка SO_4^{2-}

$$H_2SO_4 \rightleftarrows 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

При пропускании тока через раствор серной кислоты положительные ионы водорода превращаются на катоде в нейтральные атомы H и объединяются попарно в молекулы H_2. Выделяющиеся на аноде нейтральные частицы SO_4 распадаются на атом кислорода O и молекулы серного ангидрида SO_3. Атомы кислорода попарно объединяются в молекулы O_2. Анод делается из металла, не реагирующего с SO_4, например из платины. Серный ангидрид вступает в реакцию с водой, вновь давая молекулы серной кислоты:

$$SO_3 + H_2O = H_2SO_4.$$

В результате количество серной кислоты не меняется, на катоде выделяется газообразный водород, а на аноде — кислород, т. е. происходит разложение воды электрическим током. Схема прибора для электролиза водного раствора серной кислоты изображена на рис. 104.

Рис. 104

Электрохимические эквиваленты

Анионы	Эквивалент $\frac{мг}{кул}$	Катионы	Эквивалент $\frac{мг}{кул}$
Cl^- . . .	0,3672	Ag^+ . .	1,118
$CO_3^{=}$ . . .	0,3108	Al^{+++} .	0,0936
NO_3^- . . .	0,642	Ca^{++} . .	0,2077
$O^{=}$	0,0829	Cu^+ . .	0,659
OH^- . . .	0,1762	Cu^{++} . .	0,3294
$SO_4^{=}$	0,4975	Fe^{++} . .	0,2895
—	—	Fe^{+++} .	0,1930
—	—	H^+. . .	0,01044
—	—	Na^+ . .	0,2388
—	—	Zn^{++} . .	0,3387

З а к о н ы Ф а р а д е я д л я э л е к т р о л и з а.

Первый закон. Выделяющаяся на электроде масса вещества m пропорциональна количеству электричества q, прошедшему через электролит: $m = kq$, или, что то же, пропорциональна току I и времени его пропускания t:

$$m = kIt.$$

Коэффициент k называется электрохимическим эквивалентом.

Электрохимический эквивалент равен массе вещества в *мг*, выделяющейся при прохождении через электролит 1 *к* электричества.

Второй закон. Электрохимические эквиваленты пропорциональны грамм-эквивалентам выделяющихся при электролизе веществ.

Грамм-эквивалент есть число граммов, равное отношению атомного веса A к валентности Z;

$$k = \frac{1}{F}\frac{A}{Z},$$

где F — универсальная постоянная.

Объединенный закон электролиза:

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{Z}\cdot q, \text{ или } m = \frac{1}{F}\frac{A}{Z}It,$$

если ток I был постоянен за все время t его протекания. Постоянная F представляет собой заряд, переносимый 1 грамм-эквивалентом вещества, и называется числом Фарадея: $F = 96\,496$ *к*.

П р и м е н е н и я э л е к т р о л и з а. Получение чистых металлов (например, меди), гальваностегия (т. е. нанесение металлических покрытий электрическим способом) — серебрение, никелировка, хромирование и т. п., гальванопластика (т. е. воспроизводство предметов путем нанесения металлических покрытий на гипсовую или восковую формы).

Гальванопластика изобретена в 1838 г. русским академиком Борисом Семеновичем Якоби (1801—1874).

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА

§ 35. Постоянные магниты

Движущийся электрический заряд создает вокруг себя магнитное поле. Проявление магнитных свойств у нейтральных макроскопических тел (магнитов) объясняется согласно гипотезе Ампера наличием в этих телах замкнутых микроскопических электрических токов. При их хаотическом расположении тело в целом не обнаруживает магнитных свойств. Если же плоскости микротоков ориентированы одинаковым образом, тело является магнитом. Развитие атомной физики с ее динамической моделью атома, в состав которого входят движущиеся электроны, конкретизировало гипотезу Ампера. Однако исторически изучение свойств постоянных магнитов протекало задолго до того, как Эрстед, поместив магнитную стрелку вблизи проводника с током, обнаружил ее отклонение от меридионального направления и, следовательно, открыл магнитное поле тока (1820).

Магнитные свойства железной руды закиси-окиси железа $FeO\cdot Fe_2O_3$ (магнитного железняка, магнетита) известны с глубокой древности и получили применение в устройстве магнитного компаса, изобретенного в Китае более, чем за тысячу лет до нашей эры.

Непосредственные опыты убеждают, что проявления магнитных сил прямого постоянного магнита сосредоточены в основном на его концах, называемых полюсами магнита. Например, железные опилки пристают к концам этого магнита и не притягиваются к средней части. Создается впечатление, что на концах такого магнита сосредоточены магнитные заряды или магнитные массы. Хотя развитие науки показало, что магнитные массы отсутствуют,

понятие магнитной массы наложило отпечаток на развитие представлений о магнетизме и соответствующую терминологию.

Закон Кулона для магнитных масс. Если взять две длинные намагниченные спицы, то пренебрегая воздействием их удаленных концов, можно исследовать взаимодействие их сближенных концов таким образом, как если бы имелись магнитные массы, взятые в отдельности. Следует помнить, что попытка отделить магнитную массу, сосредоточенную на полюсе магнита, как отметил уже Гильберт (1600 г.), переломив магнит, не приведет к успеху, так как при этом возникнут два магнита, каждый из которых имеет по два полюса.

Исследуя взаимодействие длинных намагниченных спиц, О. Кулон установил:

Две магнитные массы взаимодействуют с силой, пропорциональной произведению их величин m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F_{1,2} = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}.$$

Здесь μ — магнитная проницаемость среды, в которой происходит взаимодействие.

В Гауссовой системе единиц за единицу магнитной массы принимается магнитная масса, которая на равную ей магнитную массу на расстоянии от нее в 1 *см* в вакууме действует с силой в 1 *дин*.

Напряженностью магнитного поля **H** называется величина, измеряемая силой, действующей на северный магнитный полюс величиной в единицу магнитной массы: $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}}{m}$.

В системе Гаусса единица напряженности магнитного поля — эрстед — есть напряженность поля, действующего на 1 абсолютную единицу магнитной массы с силой в одну дину.

Напряженность поля «уединенной» магнитной массы m (считая, что другой полюс весьма длинного магнита далеко за пределами рассматриваемой части пространства):

$$H = \frac{m}{\mu r^2}.$$

Намагниченный стержень представляет собой магнитный диполь. Произведение магнитной массы m его полюса на длину l стержня называется магнитным моментом диполя: $P_m = ml$.

Напряженность магнитного поля в направлении, составляющем угол φ с осью диполя на расстоянии r от диполя:

$$H = \frac{P_m}{\mu r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\varphi} \quad (\text{при } r \gg l).$$

§ 36. Магнитное взаимодействие токов

Опыт показывает, что параллельные токи (текущие в одинаковых направлениях) притягиваются, а антипараллельные (текущие в противоположных направлениях) отталкиваются. На единицу длины проводника с током действует сила:

$$\frac{dF}{dl} = \mu \frac{2I_1 I_2}{r},$$

где I_1 и I_2 — значения токов в проводниках,
r — расстояние между проводниками и
μ — магнитная проницаемость окружающей проводники среды.

Характер магнитного взаимодействия токов изменяется при изменении формы проводников. Общий закон взаимодействия был указан Андре Мари Ампером (1775—1836) для двух элементов тока. Элементом тока называется вектор, направление которого совпадает с направлением тока, а модуль равен произведению тока I на элемент длины dl проводника с током.

Опыт показывает, что взаимодействие элементов длины проводника dl_1 и dl_2, по которым текут токи I_1 и I_2, зависит от их ориентации.

Сила $d\mathbf{F}_{1,2}$, с которой первый элемент тока действует на второй элемент тока, определяется формулой Ампера:

$$d\mathbf{F}_{1,2} = \frac{\mu}{c^2}\left[I_2\, d\mathbf{l}_2 \left[I_1\, d\mathbf{l}_1,\ \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3}\right]\right],$$

где $r_{1,2}$ — вектор, направленный от первого элемента ко второму с модулем, равным расстоянию между элементами, c — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц, и в системе СГСЭ равный скорости света в вакууме, μ — магнитная проницаемость среды, в которой происходит взаимодействие.

§ 37. Магнитная индукция. Формула Ампера

С позиций теории близкодействия на элемент тока $\mathbf{I}_2 d\mathbf{l}_2$ действует магнитное поле, создаваемое первым элементом тока в области пространства, где помещен второй элемент.

Как следует из формулы Ампера для взаимодействия элементов тока, характеристикой магнитного поля первого из элементов с током является величина:

$$d\mathbf{B} = \mu \frac{I}{c}\left[d\mathbf{l},\ \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right].$$

Формула Ампера в этом случае принимает вид:

$$d\mathbf{F}_{1,2} = \frac{I_2}{c}\left[d\mathbf{l}_2,\ d\mathbf{B}_1\right].$$

Величина, измеряемая силой, с которой магнитное поле действует на единичный элемент тока ($I_2\, dl_2 = 1$), называется магнитной индукцией **B** данного магнитного поля:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c}\, I dl \cdot dB \sin\left(d\mathbf{l}, \widehat{\ } d\mathbf{B}\right).$$

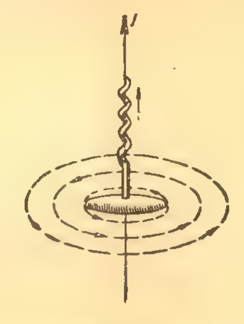


Рис. 105

Линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции, называются линиями магнитной индукции. Направление линий магнитной индукции определяется мнемоническим правилом буравчика: если ввинчивать буравчик по направлению элемента тока, то движение концов его рукоятки указывает направление линий магнитного поля, создаваемого этим элементом тока (рис. 105).

§ 38. Сила Лоренца

Сила магнитного поля:

$$F = \frac{1}{c}\, IB\,\Delta l \sin\alpha,$$

действующая на проводник с током I, может рассматриваться как сила, приложенная к элементарным носителям электричества, движущимся в проводнике.

Если заряд каждого носителя q, скорость его направленного движения $\mathbf{v}$ и концентрация элементарных носителей n, то плотность тока $j = qnv$ и ток $I = qnvS$, где S — поперечное сечение проводника.

Внося последнее выражение в равенство для силы Ампера, получим:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]\Delta lS \cdot n,$$

но произведение $nS\Delta l$ есть общее число свободных носителей заряда в проводнике, поэтому на один элементарный носитель заряда q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, действует сила:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

называемая силой Лоренца.

Опыт А. Ф. Иоффе по определению магнитного поля катодного пучка (1911 г.). Для обнаружения магнитного поля пучка катодных лучей (электронов) использовалась астатическая си-

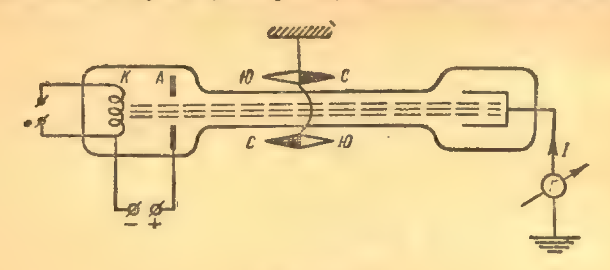


Рис. 106

стема из двух антипараллельно расположенных магнитных стрелок, скрепленных между собой и подвешенных на нити. Одна из стрелок располагалась над пучком электронов, другая — под ним (рис. 106). При этом в случае, если магнитное поле пучка подобно полю прямого тока, обе стрелки должны под действием магнитного поля пучка электронов поворачиваться в одну и ту же сторону.

Электроны пучка попадали в фарадеев цилиндр и сбегали в землю через гальванометр.

Опыт А. Ф. Иоффе показал, что магнитное поле параллельного пучка электронов в вакууме совпадает с магнитным полем прямого тока такой же величины в проводнике.

Опыт А. А. Эйхенвальда по определению магнитного поля конвекционого тока (1901 г.). В опыте русского физика А. А. Эйхенвальда, посвященном изучению магнитного поля, возникающего при движении макроскопических наэлектризованных тел, использовался конденсатор с вращающейся обкладкой. Вращающаяся обкладка представляла собой станиолевый ободок, наклеенный по краю диска, выполненного из изолятора. В кольцевом станиолевом ободке был сделан разрез. Количество электричества на движущейся обкладке рассчитывается, если определена емкость конденсатора и подведенное к его обкладкам напряжение. Конвекционный ток, создаваемый при вращении станиолевого ободка вместе с находящимся на нем зарядом, измерялся произведением величины этого заряда на число оборотов обкладки в секунду.

Магнитное поле конвекционного тока измерялось по отклонению магнитной стрелки.

Остановив обкладку и подав на края выреза в ободке напряжение, можно было заменить конвекционный ток током в проводнике такой же величины.

Опыт А. А. Эйхенвальда показал, что магнитное поле конвекционного тока совпадает с магнитным полем тока такой же величины в проводнике.

О п р е д е л е н и е о т н о ш е н и я $\frac{1СГСМ_I}{1СГСЭ_I}$ и з о п ы т а Э й х е н в а л ь д а.

Если конвекционный ток $I_к$ измерять в системе СГСЭ, а ток в проводнике — в системе СГСМ, то из опыта Эйхенвальда можно определить отношение единицы тока системы СГСМ к единице тока системы СГСЭ.

Отношение, найденное А. А. Эйхенвальдом, составляло: $\frac{I\,(СГСЭ)}{I\,(СГСМ)} \approx 3 \cdot 10^{10}$,

откуда $\frac{1СГСМ_I}{1СГСЭ_I} \approx 3 \cdot 10^{10}$, что совпадает со значением скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^{10}\,\frac{см}{сек}$.

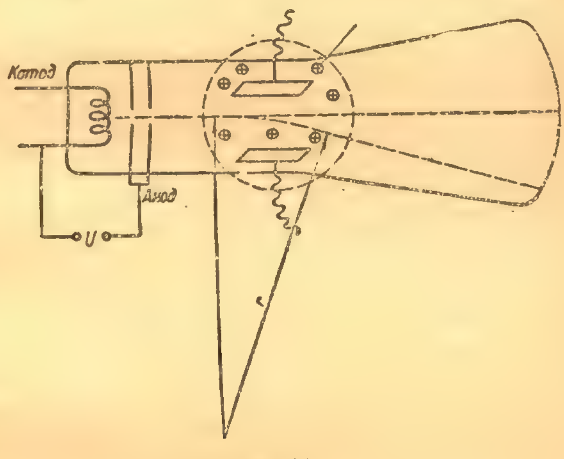


Рис. 107

О п р е д е л е н и е у д е л ь н о г о з а р я д а э л е к т р о н а $\frac{e}{m}$. Отношение заряда частицы к ее массе $\frac{e}{m}$ называется у д е л ь н ы м з а р я д о м частицы. Установка для определения удельного заряда электрона (рис. 107) включает в себя «электронную пушку», в которой пучок электронов разгоняется электрическим полем между катодом и анодом до определенной скорости. Поскольку кинетическая энергия электрона $\frac{mv^2}{2}$ равна работе поля eU, то приобретаемая электронами скорость:

$$v = \sqrt{2\frac{e}{m}U}.$$

Магнитное поле, напряженность которого H направлена перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 107, действует на частицу с силой:

$$F_{\text{магн}} = \frac{evH}{c}$$

и отклоняет пучок электронов по окружности радиуса r, причем

$$\frac{v^2}{r} = \frac{e}{m} \cdot \frac{vH}{c}.$$

Создавая между обкладками конденсатора электрическое поле с напряженностью $E = \frac{U'}{l}$, где U' — разность потенциалов между обкладками и l — расстояние между ними, можно посредством электрического поля компенсировать действие магнитного поля на пучок электронов и добиться, чтобы их траектория была прямолинейна, при этом

$$eE = \frac{evH}{c}.$$

Из последнего равенства, а также соотношения, определяющего радиус окружности, описываемой электронами в магнитном поле, видно

$$\frac{e}{m} = \frac{c^2 E}{rH^2},$$

где r — радиус траектории электронов в магнитном поле при отсутствии электрического поля. Заменяя r его выражением через скорость электрона v и учитывая зависимость v от ускоряющей разности потенциалов U, получим окончательно:

$$\frac{e}{m} = \frac{c^2}{2U} \frac{E^2}{H^2}.$$

Точные измерения для электрона дали результат:

$$\left(\frac{e}{m}\right) = -5{,}27 \cdot 10^{17} \frac{\text{СГСЭ заряда}}{\text{г}}.$$

§ 39. Эффект Холла

Эффектом Холла называется возникновение «поперечной» разности потенциалов на боковых гранях пластинки, внесенной в магнитное поле, при пропускании через нее электрического тока в «продольном» направлении.

Явление это было обнаружено в 1880 г. американским физиком Эдвином Гербертом Холлом (1855—1938). Объясняется оно действием силы Лоренца на электрические заряды, принимающие участие в направленном движении. Сила Лоренца отклоняет заряженные частицы в «поперечном» направлении. Это приводит к появлению поперечного электрического поля, действующего на заряд q с силой:

$$\mathbf{F}_{\text{эл}} = q\mathbf{E}$$

и в случае равновесного тока, компенсирующего действие силы Лоренца,

$$\mathbf{F}_{\text{лор}} + \mathbf{F}_{\text{эл}} = q\,[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + q\mathbf{E} = 0.$$

Поскольку плотность тока $\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$, где n — концентрация носителей тока в веществе, можно написать:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{qn}[\mathbf{j}, \mathbf{B}] = \frac{1}{qn}[\mathbf{B}, \mathbf{j}].$$

Поперечная разность потенциалов или э. д. с. эффекта Холла E_x равна произведению напряженности E на ширину пластинки, поэтому

$$\frac{1}{d}\mathscr{E}_x = \frac{1}{qn}[\mathbf{B}, j] = R_x[\mathbf{B}, \mathbf{j}],$$

где величина $R_x = \frac{1}{qn}$ называется константой Холла.

Знак константы Холла определяется знаком носителей заряда в веществе, обеспечивающих прохождение тока. Измерение постоянной Холла для полупроводника позволяет судить о характере его проводимости. При электронной проводимости $R_x<0$, при дырочной — $R_x>0$. При наличии обоих типов проводимости знак R_x говорит о том, какой из них преобладает в данном полупроводнике.

Существенно, что константа Холла имеет положительное значение примерно для половины металлов. Квантовая теория электропроводности объясняет это тем, что в данном случае электроны, являющиеся носителями тока, выступают как «полусвободные», т. е. энергетически связаны с ионами кристаллической решетки, но находятся на верхних энергетических уровнях «незаполненной» зоны. Если число электронов на уровнях незаполненной зоны меньше половины числа уровней в ней, то, как показал Пайерлс, постоянная $R_x<0$, если же число электронов в незаполненной зоне больше половины числа уровней в ней, — постоянная Холла положительна.

§ 40. Напряженность магнитного поля

Если магнитное поле создается токами, окруженными намагничивающейся средой, то вектор магнитной индукции **B** характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое как макроскопическими токами, текущими по проводникам, так и микроскопическими токами в среде, добавляющими свои магнитные поля к полю макротоков.

Для характеристики магнитного поля, создаваемого током в проводнике при отсутствии намагничивающихся сред, т. е. в вакууме, вводится вектор напряженности магнитного поля **H**.

Напряженностью магнитного поля **H** называется величина, измеряемая силой, действующей на единичный элемент тока в вакууме.

Сравнивая определение напряженности и магнитной индукции (см. стр. 221), найдем, что

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{c}\left[d\mathbf{l}, \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right].$$

Последнее равенство выражает в векторной форме закон Био — Савара — Лапласа:

Напряженность магнитного поля $d\mathbf{H}$, создаваемая элементом тока $\mathbf{I}d\mathbf{l}$ в точке A на расстоянии $\mathbf{r}$ от него, прямо пропорциональна величине элемента тока и синусу угла α между направлениями элемента тока $\mathbf{I}d\mathbf{l}$ и радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки A, а также обратно пропорциональна квадрату расстояния r.

Закон установлен Жаном Батистом Био (1774—1862) и Феликсом Саваром (1791—1841) в 1820 г. и обобщен Пьером Симоном Лапласом (1749—1827). Закон выражается так:

в гауссовой системе:

$$dH = \frac{1}{c}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} э;$$

в системе МКСА:

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}\ \frac{a}{м}.$$

Закон Био — Савара — Лапласа позволяет, если известна форма проводника, свести задачу определения напряженности магнитного поля, создаваемого проводником с током, к задаче векторного суммирования элементарных напряженностей $d\mathbf{H}$, создаваемых в точке A каждым из элементов проводника с током:

$$\mathbf{H} = \sum d\mathbf{H}.$$

Напряженности простейших магнитных полей: а) напряженность магнитного поля прямого проводника с током I на расстоянии r_0 от него (рис. 108):

в гауссовой системе

$$H = \frac{I}{cr_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\ э;$$

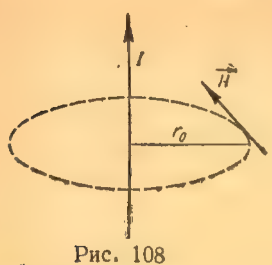


Рис. 108

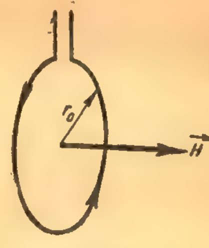


Рис. 109

в системе МКСА:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\ \frac{a}{м};$$

б) для бесконечно длинного прямого проводника

$\alpha_1 \to 0$; $\alpha_2 \to \pi$, поэтому

в гауссовой системе

$$H = \frac{2I}{cr_0}\ э;$$

в системе МКСА

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}\ \frac{a}{м};$$

в) напряженность магнитного поля на оси кругового витка радиуса r с током I (рис. 109), где l — расстояние от точки A до центра витка, в гауссовой системе:

$$H = \frac{I}{c}\ \frac{2\pi r^2}{(r^2+l^2)^{3/2}}\ э;$$

в системе МКСА:

$$H = \frac{Ir^2}{2(r^2+l^2)^{3/2}}\ \frac{a}{м}.$$

Если $r \ll l$, то

$$H = \frac{I}{c}\cdot\frac{2\pi r^2}{l^3} = \frac{I}{c}\ \frac{P_m}{l^3}\ э;$$

$$H = \frac{Ir^2}{2l^3} \frac{a}{м},$$

где $P_m = IS = I\pi r^2$ — магнитный момент витка.

Напряженность поля в центре витка ($l = 0$) из основной формулы: в системе МКСА:

$$H = \frac{I}{2r} \frac{a}{м};$$

в гауссовой системе:

$$H = \frac{2\pi I}{cr} \text{ э};$$

г) напряженность магнитного поля в центре плоской катушки из n витков:

$$H = \frac{1}{c} \frac{2\pi In}{r} \text{ э}; \quad H = \frac{In}{2r} \frac{a}{м};$$

д) напряженность магнитного поля внутри длинной катушки (соленоида или тороида):

$$H = \frac{1}{c} 4\pi In_0 \text{ э}; \quad H = In_0 \frac{a}{м},$$

где n_0 — число витков, приходящееся на единицу длины катушки.

В настоящее время в лабораторных условиях с помощью соленоидов получены постоянные поля до 100 тыс. эрстед и импульсные поля до 2 млн. эрстед, а с помощью «сжимающихся контуров» импульсные поля до 14 млн. эрстед.

§ 41. Электромагнитная индукция

Задача возбудить ток в контуре посредством магнитного поля была решена английским физиком Майклом Фарадеем (1791—1867), открывшим явление электромагнитной индукции (1831 г.).

Явление электромагнитной индукции состоит в возникновении электродвижущей силы индукции в контуре, поток вектора магнитной индукции через который меняется. Если контур является замкнутым и проводящим, это приводит к возникновению индукционного тока в контуре.

Опыты Фарадея. Свитый в катушку проводник замыкается на гальванометр. Если вдвигать в катушку постоянный магнит, то гальванометр покажет наличие тока в течение всего промежутка времени, пока магнит перемещается относительно катушки. При выдергивании магнита из катушки гальванометр показывает наличие тока противоположного направления. Изменение направления тока происходит при изменении вдвигаемого (или выдвигаемого) полюса магнита.

Схема опытов изображена на рис. 110.

Аналогичные результаты наблюдаются при замене постоянного магнита электромагнитом.

Если обе катушки закрепить неподвижно, но в одной из них менять значение тока, то в этот момент в другой катушке наблюдается индукционный ток.

Фарадей убедился, что величина индукционного тока пропорциональна скорости изменения магнитного потока, сцепленного с контуром.

Закон Фарадея — Максвелла. Электродвижущая сила индукции $\mathcal{E}_{инд}$, возникающая в замкнутом контуре, пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ, сцепленного с этим контуром: в системе Гаусса:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt};$$

в системе МКСА

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt};$$

Закон Ленца. Общее правило для нахождения направления индукционного тока было указано в 1833 г. русским академиком Эмилием Христиановичем Ленцем (1804—1865).

Индукционный ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле стремится компенсировать изменение магнитного потока, вызвавшее этот индукционный ток.

Например, если вдвигать северный полюс магнита в соленоид, т. е. увеличивать магнитный поток через его витки $\left(\frac{d\Phi}{dt} > 0\right)$, в соленоиде возникает индукционный ток такого направления, что на ближайшем к магниту конце соленоида возникает северный полюс. Таким образом, поле индукционного тока будет направлено в сторону, противоположную увеличению поля магнита (при его приближении), и будет стремиться уменьшить увеличивающийся магнитный поток через витки соленоида.

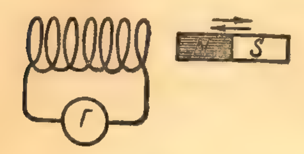


Рис. 110

Итак: *магнитное поле индукционного тока стремится нейтрализовать вызвавшее его измнение магнитного потока.*

Вывод выражения э. д. с. индукции из закона сохранения энергии. Количественное выражение э. д. с. индукции для частного случая проводящего контура можно получить на основе закона сохранения энергии.

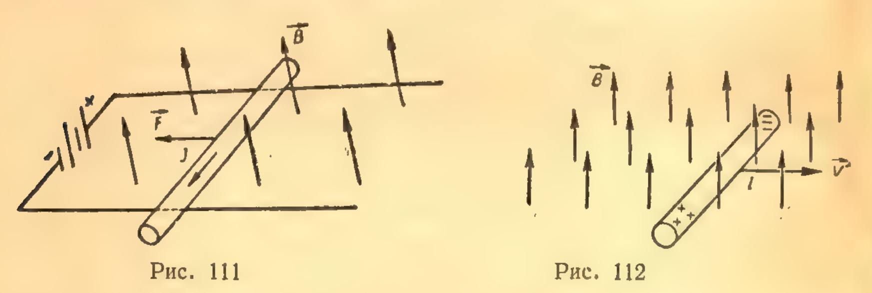


Рис. 111 Рис. 112

Пусть плоский контур, одна из сторон которого представляет проводящую трубку, способную кататься по проводящим шинам (рис. 111), помещен в магнитное поле с индукцией B, нормальной плоскости контура.

Под действием силы Ампера трубчатый проводник с током передвинется за время dt на расстояние dx вправо, причем работа его перемещения:

$$dA = F_{\text{ампера}} \cdot dx = IBldx = IBdS = Id\Phi,$$

где l — длина трубчатого проводника,
ldx — изменение площади dS контура и
$BdS = d\Phi$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

Следовательно, работа пондеромоторной силы, действующей на проводник с током, равна произведению тока на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром, при движении проводника под действием этой силы.

Если сопротивление контура R, то за время dt по закону Джоуля — Ленца выделится тепло I^2Rdt.

Общая работа, совершаемая батареей с э. д. с. $\mathscr{E}$, идет на выделение джоулева тепла и перемещение проводника в магнитном поле:

$$\mathscr{E}Idt = I^2Rdt + Id\Phi,$$

или

$$I = \frac{\mathscr{E} + \left(-\frac{d\Phi}{dt}\right)}{R}.$$

Последнее равенство представляет собой закон Ома для контура, причем к выражению э. д. с. источника тока $\mathscr{E}$ добавилось выражение э. д. с. индукции:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак минус выражает математически правило Ленца.

Электронный механизм возникновения э. д. с. индукции. Для выяснения механизма возникновения э. д. с. индукции в проводнике длиной l, движущемся в магнитном поле с индукцией **B** со скоростью **V**, как показано на рис. 112, учтем, что на заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $F_{\text{лор}} = evB$. Это приведет к перемещению зарядов в проводнике таким образом, что на его концах образуются избытки зарядов противоположного знака и создается электрическое поле напряженности E, препятствующее дальнейшему перемещению зарядов. Поэтому $eE = evB$ или $E = vB$.

Поскольку
$$E = -\frac{U}{l},$$

где U — разность потенциалов на концах проводника, и

$$v\,l = \frac{dx}{dt}\cdot l = \frac{dS}{dt},$$

где dS — площадь, описанная проводником за время dt, то

$$Blv = \frac{BdS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Величина разности потенциалов между концами проводника выражает величину э. д. с. индукции $U = -lE = \mathscr{E}_{\text{инд}}$.

Окончательно

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким образом, смещение зарядов под действием силы Лоренца, действующей со стороны магнитного поля на движущийся в нем заряд, проявляет себя как электрическое поле индукции.

Вопрос о том, имеется ли в проводнике реальное электрическое поле или э. д. с. индукции вызвана действием силы магнитного поля на заряды в проводнике, находит решение в том, что реальность представляет электромагнитное поле. Наличие или отсутствие отдельных составляющих его зависит от движения источников поля по отношению к избранной системе отсчета.

Например, в системе отсчета, в которой проводник с током неподвижен, его поле описывается магнитной индукцией **B**; в системе отсчета, движущейся относительно первой, отличны от нуля электрические составляющие электромагнитного поля — проявляется электромагнитная индукция.

§ 42. Самоиндукция

Возникновение э. д. с. индукции в контуре вследствие изменения магнитного потока, создаваемого током в этом же самом контуре, называется *самоиндукцией*.

Коэффициент самоиндукции. Ток i в замкнутом контуре создает в окружающем пространстве магнитное поле, напряженность которого пропорциональна току. Сцепленный с контуром магнитный поток Φ поэтому пропорционален току i в контуре:

$$\Phi = Li.$$

Коэффициент пропорциональности L называется коэффициентом самоиндукции или, короче, *индуктивностью контура*.

Индуктивность контура равна магнитному потоку, сцепленному с контуром, когда создающий этот магнитный поток ток равен единице. Э. д. с. самоиндукции:

$$\mathscr{E}_{\text{самоинд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}.$$

Индуктивность контура в общем случае зависит от геометрии контура и магнитной проницаемости μ среды, окружающей контур.

Если эти величины не изменяются, то $L = \text{const}$, $\frac{dL}{dt} = 0$ и

$$\mathscr{E}_{\text{самоинд}} = -L\frac{di}{dt}.$$

Э. д. с. самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в контуре.

Если $\frac{di}{dt} > 0$, то $\mathscr{E}_{\text{самоинд}} < 0$, т. е. ток самоиндукции имеет направление, противоположное возрастающему току в контуре и тормозит его возрастание в соответствии с правилом Ленца.

§ 43. Взаимная индукция

Явлением взаимной индукции двух контуров называется возникновение э. д. с. индукции в одном из них при изменении тока в другом.

Изменение тока вызывает изменение магнитного потока, сцепленного с первым из контуров, и индукционную э. д. с. в нем.

Магнитный поток $\Phi_{1,2}$, сцепленный с контуром I, прямо пропорционален создающему этот поток току i_2 во втором контуре:

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2}\, i_2.$$

Коэффициент $M_{1,2}$ называется коэффициентом взаимной индукции обоих контуров или, коротко, *взаимной индуктивностью*.

Если изменять ток i_1 в первом из контуров, то магнитный поток, сцепленный со вторым контуром:

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1}\, i_1.$$

Опыт и более подробное теоретическое рассмотрение показывают, что

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M.$$

Коэффициент взаимной индукции двух контуров равен магнитному потоку, сцепленному с одним из контуров, когда ток в другом контуре равен единице.

Единица коэффициента взаимной индукции в системе МКСА 1 генри (*гн*) $= \frac{1\ в \cdot сек}{1\ а} = \frac{10^8\ \text{СГСМ потенциала} \cdot 1\ сек}{0{,}1\ \text{СГСМ тока}} = 10^9$ СГСМ индуктивности.

Когда ток i_1 в первом контуре меняется, пропорционально ему изменяется магнитный поток $\Phi_{2,1}$, сцепленный со вторым контуром, и в последнем возникает э. д. с. взаимной индукции:

$$\mathcal{E}_{2\ \text{вз.инд}} = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt} - i_1\frac{dM}{dt}.$$

Если контур неподвижен и не изменяет геометрии $M = \text{const}$:

$$\mathcal{E}_{2\ \text{вз.инд}} = -M\frac{di_1}{dt}.$$

Взаимная индуктивность двух контуров есть величина, измеряемая э. д. с. индукции, возникающей в одном из них, когда ток в другом уменьшается на единицу за единицу времени.

Следовательно, 1 *гн* — взаимная индуктивность таких контуров, из которых изменение тока в одном на 1 *а/сек* вызывает в другом э. д. с. индукции, равную 1 *в*.

Взаимная индуктивность двух соленоидов, намотанных на общий сердечник:

в системе Гаусса:

$$M = \frac{4\pi\mu_r n_1 n_2 S}{l}\ \text{см индукт.};$$

в системе МКСА

$$M = \frac{\mu_0 \mu_r n_1 n_2 S}{l}\ \text{гн},$$

где μ — магнитная проницаемость сердечника;
n_1 и n_2 — число витков первой и второй катушек,
S — площадь поперечного сечения сердечника,
l — длина сердечника:

Трансформатор. Две катушки (или несколько), намотанные на общий сердечник, образуют трансформатор переменного тока.

Трансформатор изобретен в 1876 г. Яблочковым.

Отношение числа витков во вторичной обмотке n_2 к числу витков в первичной обмотке n_1 называется коэффициентом трансформации.

Поскольку э. д. с. индукции в первичной обмотке:

$$\mathcal{E}_1 = n_1\frac{d\Phi}{dt},$$

а э. д. с. индукции во вторичной обмотке

$$\mathcal{E}_2 \cong n_2\frac{d\Phi}{dt},$$

то

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} \cong \frac{n_2}{n_1}.$$

Коэффициент трансформации определяет, во сколько раз э. д. с. во вторичной обмотке больше, чем в первичной.

Если пренебречь потерями энергии, то мощность тока в первичной обмотке $\mathcal{E}_1 i_1$ должна равняться мощности тока во вторичной обмотке $\mathcal{E}_2 i_2$.

При $\frac{n_2}{n_1} > 1$ — повышающий трансформатор (повышает напряжение и понижает ток).

При $\frac{n_2}{n_1} < 1$ — понижающий трансформатор (понижает напряжение и повышает ток).

Экстраток замыкания. Ток самоиндукции, возникающий в цепи, содержащей индуктивность L, источник э. д. с. $\mathscr{E}_0$ и сопротивление R, после замыкания цепи, называется экстратоком замыкания.

По закону Ома $iR = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_{самоинд} = \mathscr{E}_0 - L\frac{di}{dt}$.

Представим ток i в виде суммы постоянной составляющей $\frac{\mathscr{E}_0}{R}$ и тока самоиндукции $i_{самоинд}$: $i = \frac{\mathscr{E}_0}{R} + i_{самоинд}$.

Тогда для $i_{самоинд}$ справедливо уравнение

$$\frac{di_{самоинд}}{dt} + \frac{R}{L} i_{самоинд} = 0.$$

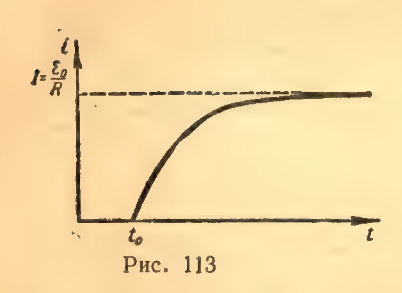


Рис. 113

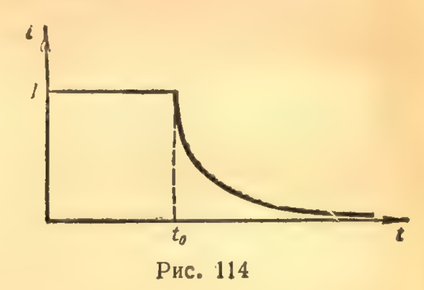


Рис. 114

Его интегрирование дает:

$$i_{самоинд} = -\frac{\mathscr{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)},$$

следовательно,

$$i = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right)$$

График зависимости тока i от времени t изображен на рис. 113.

Экстраток замыкания приводит к тому, что максимальное постоянное значение тока I в цепи достигается не мгновенно.

Экстраток размыкания. Ток самоиндукции, протекающий в контуре после выключения внешней э. д. с., называется экстратоком размыкания.

Если замкнуть контур накоротко, исключив э. д. с., то обозначив R_0 — сопротивление контура без э. д. с., по закону Ома будем иметь:

$$R_0 i = -L\frac{di}{dt}.$$

Интегрируя уравнения с учетом начальных условий $\left(\text{при } t = t_0 \ \ i = \frac{\mathscr{E}_0}{R} = I\right)$, получим:

$$i = Ie^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}.$$

График зависимости тока i от времени приводится на рис. 114.

Если контур не закорачивается, а размыкается, то R_0 стремится к бесконечности и э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_{\text{самоинд}} = -L\frac{di}{dt} = R_0\frac{\mathcal{E}_0}{R}e^{-\frac{R_0}{L}(t-t_0)}$$

при $t = t_0$ (в момент размыкания) принимает вид

$$\mathcal{E}_{\substack{\text{самоинд} \\ t=t_0}} = \mathcal{E}_0\frac{R_0}{R} \gg \mathcal{E}_0.$$

При резком размыкании контура с индуктивностью э. д. с. самоиндукции на короткое время можем значительно превысить рабочее напряжение $\mathcal{E}_0$, что приводит к пробою изоляции и порче аппаратуры.

Если вводить сопротивление R_0 медленно, э. д. с. самоиндукции не достигает опасных значений.

Вихревые токи. Возникающие в толще проводников при изменении в них потока магнитной индукции индукционные токи называются вихревыми токами или токами Фуко.

Для устранения вихревых токов, протекание которых сопровождается выделением джоулева тепла и затратой мощности, сердечники трансформаторов, генераторов и т. д. набираются из отдельных листов или прутьев, изолированных друг от друга так, чтобы сопротивление сердечника в направлении протекания вихревых токов было велико.

Вихревые токи, возникающие в металлическом маятнике, колеблющемся между полюсами магнита, используются для электромагнитного гашения (демпфирования) колебаний, поскольку при этом механическая энергия колебаний быстро переходит в джоулево тепло.

Индукционная печь использует развитие вихревых токов в подлежащем плавке веществе при пропускании через катушку токов высокой частоты.

Вихревые токи в проводнике, по которому течет ток высокой частоты, по оси проводника текут в сторону, противоположную току высокой частоты, а вблизи поверхности проводника — в ту же сторону. Результирующий ток высокой частоты течет лишь по поверхностному слою проводника. Это явление называется скин-эффектом (от английского skin — кожа).

С учетом скин-эффекта проводники для токов высокой частоты изготавливаются полыми.

Скин-эффект приводит к тому, что ток высокой частоты выделяет джоулево тепло лишь в поверхностном слое проводника. Это явление было использовано В. П. Вологдиным для поверхностной закалки стали токами высокой частоты.

Ферриты. Ферритами называются полупроводниковые материалы, обладающие ферромагнитными свойствами. Высокое электрическое сопротивление феррита приводит к тому, что вихревые токи Фуко в ферритах весьма слабо выражены, и поэтому потери энергии при перемагничивании ферритового сердечника незначительны. Удельное сопротивление ферритов в миллиарды раз превышает удельное сопротивление металлических ферромагнитов. Смесь железа с различными металлами (магнием, марганцем, никелем, цинком и т. п.) подвергается специальной термической обработке, что приводит к образованию ферритов — комплексных металлических окислов типа $Me \cdot O \cdot Fe_2O_3$, где Me — двухвалентный металл.

Магнитные ферритовые сердечники представляют собой тороиды (кольца), размеры которых колеблются от долей миллиметра до нескольких сантиметров. Ферритовые сердечники, применяемые в электронных цифровых машинах, имеют прямоугольную петлю гистерезиса. Способность ферритового сердечника находиться в двух устойчивых состояниях (положительного и отри-

цательного остаточного намагничивания) позволяет использовать такие сердечники для фиксации при их помощи двоичной системы цифр — единицы или нуля. Для приведения сердечника в определенное состояние в его обмотку подается импульс тока, создающий магнитное поле необходимой напряженности. Считывание записанной информации производится посредством подачи отрицательного импульса. Если сердечник находился в состоянии с отрицательным остаточным намагничением $(-B)$, соответствующим записи 0, то его перемагничивание не произойдет, и на выходной обмотке появится незначительный импульс помехи. Если же сердечник находился в состоянии положительного намагничивания, то произойдет перемагничивание ферритового сердечника и на выходной обмотке его появится значительный импульс-сигнал.

§ 44. Намагничивание вещества

При помещении вещества в магнитное поле оно намагничивается, т. е. само приобретает магнитные свойства.

Магнитный момент единицы объема намагниченного тела называется намагниченностью $\mathbf{I}_m$.

Способность вещества к намагничиванию определяет отношение намагниченности $\mathbf{I}_m$ к напряженности внешнего магнитного поля H, вызывающего намагничение, $\varkappa_m = \frac{I_m}{H}$ называемое магнитной восприимчивостью.

Связь магнитной проницаемости μ и магнитной восприимчивости $\varkappa$. Пусть в сердечнике соленоида прорезана тонкая щель, плоскость которой нормальна к направлению напряженности поля соленоида. Напряженность магнитного поля в зазоре равна численно магнитной индукции B в веществе сердечника и представляет сумму напряженности H поля макроскопических токов и напряженности H' поля, вызванного намагничиванием сердечника:

$$H_{\text{зазора}} = B = \mu_r H = H + H'.$$

Напряженность $H = 4\pi I_m = 4\pi\varkappa_m H$, поэтому

$$\mu_r H = H + 4\pi\varkappa_m H, \text{ или } \mu_r = 1 + 4\pi\varkappa_m.$$

Соответственно в системе МКСА

$$\mu_r = 1 + \varkappa_m$$

и, следовательно,

$$\varkappa_{\text{МКСА}} = 4\pi\varkappa_{\text{СГСМ}}.$$

Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики. В системах СГСМ и гауссовой магнитная индукция B и напряженность магнитного поля макроскопических токов H связаны соотношением $\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{H}$. Магнитная проницаемость μ_r показывает, во сколько раз магнитное поле макроскопических токов усиливается вследствие намагничивания среды.

По значению магнитной проницаемости μ_r все вещества делятся на три группы: диамагнетики ($\mu_r < 1$), парамагнетики ($\mu_r > 1$) и ферромагнетики ($\mu_r \gg 1$ и меняется в зависимости от напряженности поля макроскопических токов).

Магнитные проницаемости некоторых веществ

Парамагнетик	$\mu_r - 1$	Диамагнетик	$1 - \mu_r$
Азот	$0{,}013 \cdot 10^{-6}$	Водород	$0{,}063 \cdot 10^{-6}$
Воздух	$0{,}38 \cdot 10^{-6}$	Бензол	$7{,}5 \cdot 10^{-6}$
Кислород	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	Вода	$9{,}0 \cdot 10^{-6}$
Эбонит	$14 \cdot 10^{-6}$	Медь	$10{,}3 \cdot 10^{-6}$
Алюминий	$23 \cdot 10^{-6}$	Стекло	$12{,}6 \cdot 10^{-6}$
Вольфрам	$176 \cdot 10^{-6}$	Кварц	$15{,}1 \cdot 10^{-6}$
Платина	$360 \cdot 10^{-6}$	Каменная соль	$12{,}6 \cdot 10^{-6}$
Кислород (жидкий)	$3400 \cdot 10^{-6}$	Висмут	$176 \cdot 10^{-6}$

Магнитные свойства тел определяются магнитными свойствами составляющих их атомов и молекул, движением электрических зарядов в последних.

Для диамагнетиков полный магнитный момент атома в отсутствии поля равен нулю, поэтому в поле вследствие изменения магнитного момента каждого электрона на отрицательную величину магнитный момент атома становится отрицательным. Все вещество в целом приобретает магнитный момент, направленный против поля.

Для парамагнетиков магнитный момент каждого атома в отсутствии внешнего магнитного поля отличен от нуля, но вследствие хаотического расположения атомов вещество в целом магнитным моментом не обладает.

При внесении в магнитное поле атомы стремятся установиться так, чтобы их магнитные моменты были ориентированы по полю, в результате чего парамагнетик намагничивается по полю.

При помещении парамагнетика между полюсами магнита на его концах возникают полюсы, разноименные с близлежащими полюсами магнита. Парамагнетик втягивается в магнитное поле.

Ферромагнетик обладает отдельными микроскопическими (линейные размеры $\sim 10^{-4}$ *см*) областями (доменами), которые намагничены до насыщения и в отсутствии внешнего поля. Однако магнитные моменты всех этих областей ориентированы хаотически и магнитный момент макроскопического объема равен нулю.

При внесении ферромагнетика во внешнее магнитное поле по полю ориентируются не магнитные моменты отдельных атомов, а целые области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания.

Силы, ориентирующие частицы внутри каждого домена, как показано Вернером Гейзенбергом и Я. И. Френкелем в 1928 г., объясняются с квантово-механической точки зрения и определяются волновыми свойствами электронов.

Точка Кюри. Для каждого ферромагнетика существует определенная температура, при которой области спонтанного намагничивания (домены) под действием теплового движения разрушаются и ферромагнетик становится парамагнетиком. Эта температура называется точкой Кюри. Точка Кюри для железа, например, равна 753° С.

Гистерезис. Магнитным гистерезисом называется явление запаздывания изменения магнитной индукции B в ферромагнетике по отношению к изменению напряженности H внешнего магнитного поля макроскопических токов.

Если поместить, как это сделал в 1872 г. русский физик Александр Григорьевич Столетов (1839—1896), железо в магнитное поле, напряжен-

ность которого H можно изменять, то график зависимости B от H (кривая намагничивания) выразится кривой (рис. 115, *а*).

График зависимости магнитного момента единицы объема — вектора намагничивания — I от напряженности H изображен на рис. 115,*б* и обнаруживает магнитное насыщение в сильном внешнем поле.

При изменении H от нуля в сторону положительных значений магнитная индукция B возрастает, причем кривая сменяется прямолинейным участком, идущим под углом к горизонтальной оси (насыщение ферромагнетика). При уменьшении H до 0 магнитная индукция B запаздывает в уменьшении и при $H = 0$ оказывается равной $B_{ост}$ (остаточное намагничение $I_{m\,ост}$ можно найти из равенства $B_{ост} = \mu_0 \cdot 4\pi I_{ост}$). Для полного размагничивания образца нужно приложить магнитное поле противоположного направления.

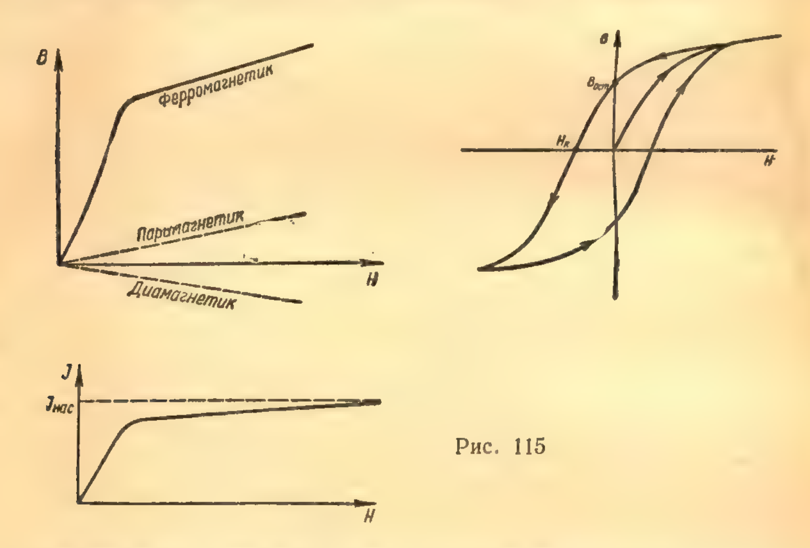


Рис. 115

Напряженность магнитного поля $H_к$, размагничивающего ферромагнетик полностью, называется коэрцитивной (задерживающей) силой.

Поскольку приращение объемной плотности энергии магнитного поля

«Жесткий» ферромагнетик	Коэрцитивная сила $H_к$ в эрстедах	Остаточная индукция $B_{ост}$ в гауссах
Магнетит ($FeO \cdot F_2O_3$)	50	6000
Углеродистая сталь (1% C)	40—60	9000—7000
Хромовая сталь (3% Cr, 1% C)	60—80	10500—8500
Вольфрамовая сталь (6% W, 1% C)	60—80	11500—9500
Кобальтовая сталь (15—30% Co, 5% W, 5% Cr, 1% Mo)	200—300	9000—8000
Никель-алюминиевая сталь (25% Ni; 12% Al) .	700	5000
Титаново-кобальтовая сталь (10% T; 30% Co) .	900	7000
Твердый раствор кобальтового феррита ($CoFe_2O_4$) в магнетите ($FeO \cdot Fe_2O_3$)	600	4000

$dw = \frac{1}{4\pi} HdB$, работа перемагничивания ферромагнетика (превращающаяся в тепло) измеряется площадью петли гистерезиса (рис. 115, *в*).

Жесткими ферромагнетиками называются вещества с большим остаточным намагничиванием и большой коэрцитивной силой. Жесткие ферромагнетики обладают широкой петлей гистерезиса и применяются для изготовления постоянных магнитов.

Мягкими ферромагнетиками называются вещества с малой коэрцитивной силой и большой магнитной проницаемостью. Они применяются для изготовления сердечников трансформаторов и т. п.

«Мягкий» ферромагнетик	Коэрцит. сила $H_к$ в эрстедах	Остат. индукция $B_{ост}$ гаусс	Насыщ. $B_{макс}$ в гаусс	$\mu_{макс}$
Чистое железо после отжига в водороде	0,025	2000	21600	280000
Мягкое железо	0,5	8400	21500	8000
Трансформаторное кремнистое железо (1% Si)	0,7	15000	25000	10000
Трансформаторное кремнистое железо (4% Si)	0,35	5000	20000	15000
Углеродистое железо (0,1% C)	3,0	10000	18000	3000
Чугун отожженный (3% C)	4,6	4000	16000	2000
Пермаллой (78% Ni, 22% Fe)	0,06	5000	10000	80000
Гиперник (50% Ni, 50% Fe)	0,05	6000	11000	70000
Перминвар (45% Ni, 25% CO; 30% Fe)	1	4000	16000	2000

Сплавы железа с никелем обладают высокими магнитными качествами, потери на гистерезис для них весьма малы. Пермаллой намагничивается в весьма слабых полях при напряженности порядка сотых и даже тысячных долей эрстеда. Перминвар сохраняет магнитную проницаемость при изменении H от 0 до 3 *э* постоянной и равной примерно 500.

§ 45. Колебательный контур

Колебательным контуром называется цепь, составленная из конденсатора C, катушки индуктивности L и омического сопротивления R (рис. 116).

Конденсатор, заряженный до разности потенциалов U, будет разряжаться через индуктивность, причем в цепи возникает э. д. с. самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{самоинд} = -L\frac{di}{dt}.$$

По закону Ома

$$i = \frac{U - L\frac{di}{dt}}{R},$$

или

$$L\frac{di}{dt} + iR - U = 0.$$

Ток i равен скорости уменьшения заряда q на обкладках конденсатора:

$$i = -\frac{dq}{dt}.$$

Очевидно $q = CU$ и $i = -\frac{CdU}{dt}$.

Дифференциальное уравнение после подстановки в него i и деления на CL всех членов принимает вид:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Это — уравнение затухающих электрических колебаний для напряжения между обкладками U. Учитывая, что $CU = q$, для заряда на обкладке q получим аналогичное уравнение:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

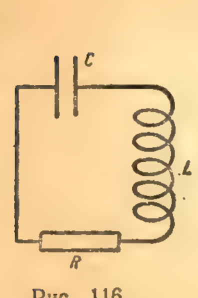


Рис. 116

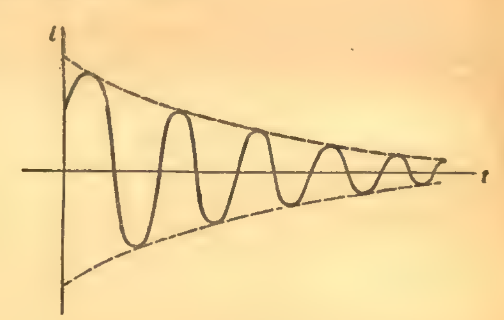


Рис. 117

Дифференцируя это уравнение по времени, получим

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0.$$

Таким образом, в процессе разрядки конденсатора через индуктивность, в колебательном контуре возникают свободные затухающие колебания тока, заряда на обкладке и напряжения между обкладками конденсатора.

Решение уравнения для q с учетом начальных условий (при $t = 0$ $q = q_0$, $i = 0$) имеет вид:

$$q = \frac{q_0}{\omega\sqrt{LC}}e^{-\frac{R}{2L}}\cos(\omega t - \varphi),$$

где циклическая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{R}{2L\omega}.$$

Аналогично, ток

$$i = \frac{q_0}{\omega LC}e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

График зависимости тока i от времени t приводится на рис. 117.

При $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ циклическая частота становится мнимой, а разряд конденсатора апериодическим.

Превращения энергии в колебательном контуре. В процессе колебаний энергия электрического поля заряженного конденсатора преобразуется в энергию магнитного поля катушки индуктивности и обратно. При протекании тока на сопротивлении R выделяется джоулево тепло, чем определяются потери энергии колебаний и затухание.

Собственные колебания в контуре. Если сопротивление R контура пренебрежимо мало, то колебания являются собственными, незатухающими.

Период собственных электрических колебаний в контуре:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \text{ — формула Вильяма Томсона.}$$

Характеристика затухания. Коэффициент затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

Логарифмический декремент затухания Δ равен произведению коэффициента затухания на период колебаний:

$$\Delta = \delta T \simeq \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = \pi \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$ называется волновым сопротивлением контура.

Добротность Q колебательного контура можно подсчитать, умножив на 2π отношение энергии колебаний к потерям энергии за период:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{LI_0^2}{2}}{RI_{\text{эф}}^2 T} = 2\pi \frac{\frac{LI_0^2}{2}}{R\frac{I_0^2}{2}T} = 2\pi \frac{L}{RT} = \frac{R_{\text{волн}}}{R} = \frac{\pi}{\Delta}.$$

Добротность контура (деленная на π) представляет собой величину, обратную логарифмическому декременту затухания.

Резонансные явления в электрической системе. Если в электрический колебательный контур введена периодически изменяющаяся с течением времени электродвижущая сила: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos pt$, то в системе будут происходить вынужденные электрические колебания, уравнение которых

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathscr{E}_0 \cos pt.$$

Решение его складывается из частного решения данного неоднородного уравнения (вынужденные незатухающие колебания) и общего решения однородного уравнения (затухающие колебания). Впрочем последние с течением времени исчезнут и в системе останутся лишь незатухающие вынужденные колебания.

Амплитуда колебаний тока:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(pL - \frac{1}{pC}\right)^2}},$$

где $\mathscr{E}_0$ — амплитуда внешней э. д. с.

Когда частота внешней э. д. с. p равна собственной частоте системы

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} = p,$$

амплитуда тока максимальна и равна отношению амплитуды э. д. с. $\mathscr{E}$ к омическому сопротивлению R.

Отношение полной энергии вынужденных колебаний к энергии колебаний при резонансе (максимальной):

$$U = \frac{\frac{L I_0^2}{2}}{\frac{L I^2_{\text{рез}}}{2}} = \frac{\frac{\mathscr{E}_0^2}{R^2 + \left(pL - \frac{1}{pC}\right)}}{\frac{\mathscr{E}_0^2}{R}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{pL - \frac{1}{pC}}{R}\right)}$$

В безразмерных величинах $\gamma = \frac{p}{\omega}$ и добротности $Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}$ это отношение имеет вид:

$$U = \frac{1}{1 + \left(\gamma Q - \frac{Q}{\gamma}\right)^2} .$$

График функции U^2 при различных добротностях Q в зависимости от γ приводится на рис. 118, *а*.

Легко видеть, что для любого $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$ величина U останется той же самой, поэтому $\gamma' \cdot \gamma = 1$. Внося величину γ, соответствующую $U_1^2 = \frac{1}{2}$ в формулу для U^2, получим:

$$Q = \pm \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 - 1} ,$$

и так как $\gamma'_1 \cdot \gamma = 1$, то

$$Q = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_1'} .$$

Величина $\gamma_1 - \gamma_1'$ есть относительная ширина резонансной кривой, переходя к соответствующим обычным частотам, получим ширину резонансной кривой $p_1 - p_1'$. Добротность системы:

$$Q = \frac{\omega}{p_1 - p_1'} ,$$

т. е. добротность равна собственной частоте, деленной на ширину резонансной кривой. Ширина резонансной кривой определяет область, внутри которой энергия вынужденных колебаний больше половины энергии колебаний при резонансе.

Амплитуда заряда на конденсаторе q_0 может быть найдена, если учесть, что амплитуда напряжения на конденсаторе:

$$U_0 = \frac{I_0}{pC} ,$$

а q_0 отличается от амплитуды потенциала лишь постоянным множителем (емкостью C).

В безразмерных величинах:

$$u = \frac{q_0}{\mathscr{E}_0 C} = \frac{U_0}{\mathscr{E}_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}\,.$$

При достаточно больших Q амплитуда заряда возрастает, вблизи $\gamma=1$ проявляется резонанс.

Однако, если определить резонанс как совпадение частоты внешнего возбуждения с собственной частотой системы, когда амплитуда вынужденных колебаний тока испытывает максимум, можно заметить, что, как показывает дифференцирование знаменателя последнего равенства, он минимален при

$$\gamma_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{2\,Q^2}}$$

и тогда

$$U_{\text{макс}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}}\,.$$

Поэтому амплитуда заряда на конденсаторе (и напряжения на нем) достигает максимума при значении γ_0, меньшем единицы, и лишь при весьма больших добротностях это можно не учитывать.

Семейство резонансных кривых U при разных добротностях в функции от γ приводится на рис. 118,*б*.

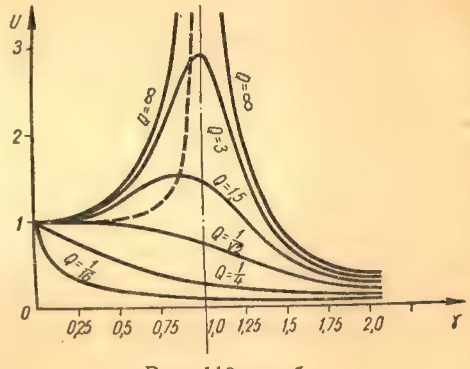


Рис. 118 а и б

Амплитуда напряжения на индуктивности $U_{L,0} = pLI_0$ в безразмерных величинах:

$$\omega = \frac{U_{L,\,0}}{\mathscr{E}_0} = \frac{Q\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 + Q^2(\gamma^2-1)^2}}\,.$$

Резонансные кривые приводятся на рис. 118, *в*. При γ равном 0 и ω равно 0. Амплитуда напряжения на индуктивности достигает максимума при γ_0, большем 1, и стремится к 1 при $\gamma \to \infty$.

Считая, что изменение внешней синусоидальной э. д. с. опережает по фазе изменение напряжения (или заряда) на конденсаторе на угол φ, и переходя к безразмерным величинам, сдвиг по фазе можно записать:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{Q(1-\gamma^2)}\,.$$

График зависимости φ от γ приводится на рис. 118, г. При $\gamma = 1$ и $Q \to \infty$ происходит скачок фазы на π. При больших добротностях изменение фазы происходит вблизи $\gamma = 1$. При $\gamma = 1$ (резонанс!) для любых Q напряжение (или заряд) на конденсаторе отстает от внешней э. д. с. на $\frac{\pi}{2}$.

Ток опережает внешнюю э. д. с. на $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. При резонансе ток колеблется в фазе с внешней э. д. с., напряжение на индуктивности опережает колебание тока в катушке на $\frac{\pi}{2}$.

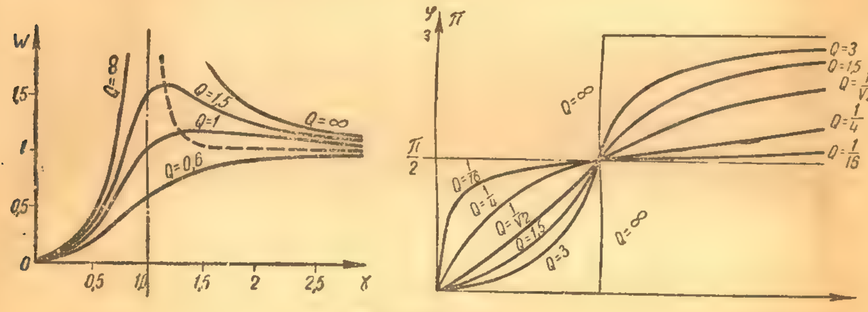


Рис. 118 в и г

Частные случаи электрического резонанса (резонанс напряжений и резонанс токов) рассмотрены на стр. 244.

§ 46. Получение переменного тока

При равномерном вращении плоской рамки в магнитном поле (рис. 119) магнитный поток Ф, сцепленный с рамкой, меняется по закону:

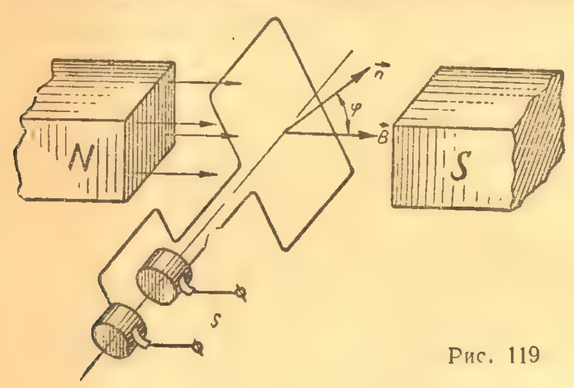


Рис. 119

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где B — индукция поля,

S — площадь рамки,

ω — циклическая частота вращения.

По закону электромагнитной индукции в рамке возникает э. д. с. индукции:

$$\mathscr{E}_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\,\omega \sin \omega t = \mathscr{E}_0 \sin \omega t.$$

Величина $\mathscr{E}_0 = BS\omega = \mu_r HS\omega$ называется амплитудой э. д. с.

Во внешней цепи, присоединенной к выводам рамки через щетки (рис. 119), течет переменный ток.

В реальных генераторах переменного тока стандартная частота:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ гц, (в США — 60 гц).}$$

§ 47. Сопротивление в цепи переменного тока

Емкостное сопротивление в цепи переменного тока. Пусть к конденсатору C приложена переменная э. д. с. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$. Ток в проводниках, подводящих заряды к конденсатору:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dC\mathscr{E}}{dt} = C\mathscr{E}_0\,\omega \cos \omega t = \frac{\mathscr{E}_0}{\frac{1}{\omega C}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Между амплитудами тока I_0 и э. д. с. E_0 имеется связь, напоминающая закон Ома:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{\mathscr{E}_0}{R_c}.$$

Величина $R_c = \frac{1}{\omega C}$ называется емкостным сопротивлением. Емкостное сопротивление в среднем не потребляет мощности, так как конденсатор то забирает энергию из цепи на создание электрического поля, то отдает ее в цепь при исчезновении поля.

Емкостное сопротивление влияет на величину амплитуды тока в цепи.

Напряжение на емкостном сопротивлении отстает от тока на четверть периода, что соответствует отставанию фазы напряжения от фазы тока на $\frac{\pi}{2}$ (сравните формулы для $\mathscr{E}$ и i).

Индуктивное сопротивление в цепи переменного тока. Пусть к катушке индуктивности L приложена переменная э. д. с. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$.

Если омическим сопротивлением R можно пренебречь, то по закону Ома

$$\mathscr{E} + \mathscr{E}_{самоинд} = 0$$

или

$$\mathscr{E}_0 \sin \omega t - L\frac{di}{dt} = 0,$$

откуда

$$I = -\frac{\mathscr{E}_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Величина $R_L = \omega L$ называется индуктивным сопротивлением.

Между амплитудами тока I_0 и э. д. с. $\mathscr{E}_0$ имеется связь, сходная с законом Ома:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{R_L} = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega L}\,.$$

Напряжение на индуктивном сопротивлении опережает ток на четверть периода, что соответствует опережению фазой напряжения фазы тока на $\frac{\pi}{2}$ (сравните формулы для $\mathscr{E}$ и i).

Полное сопротивление переменному току:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,.$$

Реактивное сопротивление $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ складывается с активным сопротивлением R векторно (рис. 120), поскольку фазы напряжений на этих сопротивлениях различны.

Сдвиг фазы между током и напряжением в цепи переменного тока определяется из равенства:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\,.$$

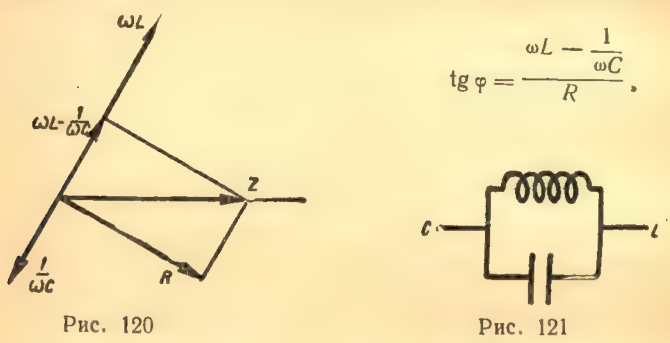


Рис. 120

Рис. 121

Мощность в цепи переменного тока

$$P = U_{эф} I_{эф} \cdot \cos\varphi.$$

Эффективное напряжение

$$U_{эф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\,,$$

где U_0 — амплитудное значение напряжения.

Эффективный ток

$$I_{эф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\,,$$

где I_0 — амплитудное значение тока.

Под эффективным значением переменного тока понимается значение такого постоянного тока, который в омическом сопротивлении выделяет ту же мощность, что и переменный.

Резонанс напряжений (последовательный резонанс). При последовательном соединении индуктивного и емкостного сопротивлений напряжения на индуктивном и емкостном сопротивлениях противоположны по фазе в случае, когда $\frac{1}{\omega C} = \omega L$.

Общее падение напряжения на индуктивности и емкости равно нулю. Этот случай называется резонансом напряжений. При резонансе амплитуда тока $I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{R}$ максимальна.

Резонанс токов (параллельный резонанс). При параллельном соединении индуктивности и емкости (рис. 121) токи в ветвях текут в противоположных направлениях (так как относительно напряжения они сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$ в противоположные стороны).

Если $\frac{1}{\omega C} = \omega L$, то

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_L} = 0, \text{ т. е.,}$$

общее сопротивление параллельного соединения стремится к бесконечности. Ток в неразветвленной части цепи близок к нулю. Последний случай называется резонансом токов. Резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

§ 48. Ток смещения

Если в цепь переменного тока включен конденсатор, то проявление на его обкладках зарядов с поверхностной плотностью σ приводит к наличию в диэлектрике между обкладками электрической индукции:

$$D = 4\pi\sigma.$$

Плотность тока у границ обкладок

$$j = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Можно считать ток в цепи замкнутым, если принять, что в диэлектрике имеется плотность тока:

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\mathbf{D}}{dt}.$$

Этот ток по предложению Максвелла был назван током смещения. В вакууме

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\mathbf{E}}{dt}.$$

Ток смещения в вакууме не связан с реальным смещением зарядов, в частности, на ток смещения не действуют электродинамические силы, однако он не является формальным понятием. Предположение Максвелла о том, что ток смещения порождает магнитное поле, аналогично току проводимости, подтвердилось на опыте. Любое переменное $\left(\frac{dE}{dt} \neq 0\right)$ электрическое поле порождает магнитное поле, которое можно рассчитать, пользуясь законом Био-Савара — Лапласа и используя понятие тока смещения. В системе МКСА:

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{dD}{dt}.$$

В диэлектрике ток смещения состоит из двух составляющих: тока смещения в вакууме и тока поляризации.

Поскольку

$$D = E + 4\pi\mathbf{P},$$

где **P** — вектор поляризации, имеем:

$$I_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi}\frac{dE}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Для вакуума $\mathbf{P} = 0$.

Ток проводимости в проводнике замыкается током смещения в диэлектрике и вместе с ним образует замкнутую цепь.

§ 49. Скорость распространения электромагнитных волн в средах

Скорость распространения свободного электромагнитного поля (не связанного с зарядами и токами) или поля излучения в вакууме равна электродинамической постоянной: $c \simeq 3 \cdot 10^{10}\ \frac{см}{сек}$.

Скорость распространения электромагнитного поля в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ равна:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

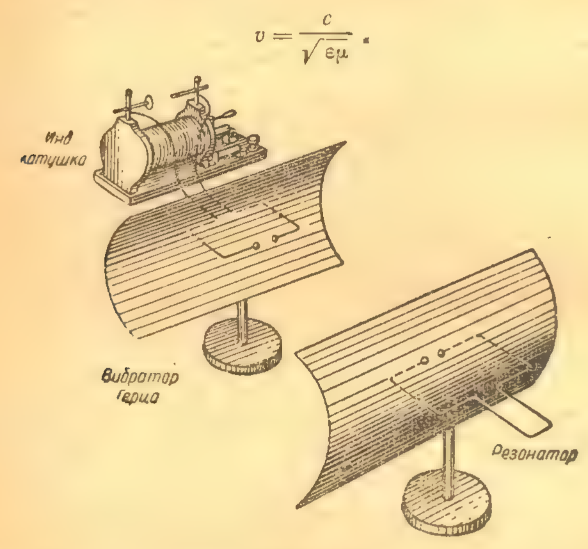


Рис. 122

Для диэлектриков ε всегда больше 1. Для парамагнитных и ферромагнитных сред μ больше 1, поэтому $\varepsilon\mu > 1$. Для диамагнетиков $\mu < 1$, но столь незначительно, что неравенство $\varepsilon\mu > 1$ сохраняется. Таким образом, $v<c$, т. е. скорость распространения электромагнитного поля в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

Вектор Умова — Пойнтинга (Николай Алексеевич Умов, 1846—1915, Джон Генри Пойнтинг, 1852 — 1914). Распространение энергии в пространстве было рассмотрено Н. А. Умовым в 1874 г. в его работах по теории упругости и теплопроводности и Пойнтингом в 1884 г. применительно к энергии электромагнитного поля.

Вектор Умова — Пойнтинга **S** определяет плотность потока энергии т. е. энергию, переносимую электромагнитными волнами за 1 *сек* через 1 *см*² площади, нормальной к направлению распространения волн.

Вектор Умова — Пойнтинга равен произведению объемной плотности энергии $W_{э\text{-}м}$ на скорость распространения волны c (для вакуума) или $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (для изотропного диэлектрика). В последнем случае:

$$\mathbf{S} = W_{э\text{-}м} \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{EH\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi} \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \frac{эрг}{см^2\, сек}.$$

Опыты Герца. Немецкий физик Генрих Герц (1857—1894) впервые получил электромагнитные волны, воспользовавшись (рис. 122) открытым контуром, называемым вибратором Герца.

При высоком напряжении на конденсаторе в разряднике проскакивает искра, замыкающая контур. В контуре возникают собственные колебания высокой частоты.

Вибратор помещался в фокусе металлического параболического зеркала. Другое такое же зеркало устанавливалось напротив первого. В его фокусе находилось два отрезка толстой проволоки, концы которых были выведены за зеркало, причем между ними оставался небольшой искровой промежуток. Когда контуры вибратора и резонатора оказывались настроенными в резонанс, то при работе вибратора через искровой промежуток приемного резонатора проскакивала искра.

§ 50. Работы А. С. Попова. Изобретение радио

Русский ученый Александр Степанович Попов (1859—1905) впервые применил электромагнитные колебания для осуществления беспроволочной связи на расстоянии. В опытах А. С. Попова применялся «когерер», представляющий собой стеклянную трубку, наполненную металлическими опилками. Когда электромагнитные волны воздействовали на опилки, они слипались, общее сопротивление когерера резко уменьшалось. В установке А. С. Попова когерер был включен в цепь батареи через обмотку электромагнита. Когда при наличии электромагнитных волн электрическое сопротивление когерера падало, ток через обмотку электромагнита возрастал, якорь электромагнита, притягиваясь, замыкал цепь электрического звонка. Молоточек звонка, ударяя по когереру, встряхивал опилки, переводя когерер в первоначальное состояние готовности к приему сигнала.

Грозоотметчик А. С. Попова был им 7 мая 1895 г. продемонстрирован на заседании Русского физико-химического общества. Звонок реагировал на грозовые разряды в атмосфере. 24 марта 1896 г. А. С. Попов продемонстрировал на заседании того же общества установку, в которой звонок был заменен телеграфным аппаратом. В этот день была принята первая в истории радиограмма, состоявшая из двух слов «Генрих Герц». Вскоре радиоустановка А. С. Попова была использована при снятии с мели броненосца «Генерал-адмирал Апраксин» для установления связи броненосца с берегом. При помощи этой установки было передано сообщение ледоколу «Ермак», находившемуся вблизи «Апраксина», об оказании помощи девяти рыбакам, унесенным в море на льдине. Благодаря своевременной передаче приказания рыбаки были спасены. Так начало свою историю радио.

§ 51. Уравнения Максвелла

Уравнения электродинамики были получены английским физиком Джемсом Клерком Максвеллом (1831—1879).

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint H_l\,dl = 4\pi\,(i_{\text{провод}} + i_{\text{смещ}}).$$

Циркуляция напряженности магнитного поля равна умноженной на 4π сумме тока проводимости и тока смещения, охватываемых контуром, по которому берется циркуляция.

Первое уравнение Максвелла выражает тот факт, что магнитное поле отлично от нуля как при перемещении электрических зарядов ($i_{\text{провод}} \neq 0$), так и при изменении электрического поля во времени ($i_{\text{смещ}} \neq 0$).

Учитывая выражение тока смещения, это уравнение можно записать:

$$\oint\limits_L H_l\,dl = 4\pi i_{\text{провод}} + \frac{d}{dt}\int\limits_S D_n\,dS,$$

где последнее слагаемое — ток смещения через поверхность S, ограниченную контуром L.

Второе уравнение Максвелла выражает факт возникновения электрического поля при изменении во времени магнитного поля:

$$\oint\limits_L E_l\,dl = -\frac{d}{dt}\int\limits_S B_n\,dS.$$

Циркуляция напряженности электрического поля по контуру L (э. д. с. индукции) определяется скоростью изменения магнитного потока через площадь S, ограниченную этим контуром.

Третье уравнение Максвелла выражает теорему Гаусса — Остроградского:

$$\oint\limits_S D_n\,dS = 4\pi q.$$

Поток электрической индукции через замкнутую поверхность S равен произведению 4π на полный заряд q, заключенный внутри этой поверхности. Третье уравнение Максвелла описывает электрическое поле, существующее вокруг зарядов. Четвертое уравнение Максвелла:

$$\oint\limits_S B_n\,dS = 0.$$

Поток магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен 0. Это соотношение аналогично теореме Гаусса — Остроградского для электрического поля и выражает факт отсутствия магнитных зарядов.

Вместе с соотношениями:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$$

связывающими фигурирующие в уравнениях величины и законом сохранения заряда, уравнения Максвелла образуют систему уравнений электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Первое уравнение Максвелла является выражением закона Ампера:

в системе МКСА:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

в системе Гаусса:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}_{\text{пров.}}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Второе уравнение Максвелла выражает закон электромагнитной индукции Фарадея:

в системе МКСА: в системе Гаусса:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Третье уравнение Максвелла выражает в дифференциальной форме (для бесконечно малого объема) теорему Гаусса—Остроградского:

в системе МКСА: в системе Гаусса:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho; \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

где ρ — плотность электрического заряда.

Четвертое уравнение Максвелла имеет вид:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме записывается:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Закон выражает тот факт, что вытекание заряда из бесконечно малого объема сопровождается изменением плотности заряда $\left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$ в этом объеме.

§ 52. Шкала электромагнитных волн

Видимый свет представляет собой электромагнитные волны с длиной волны от 760 *ммк* до 380 *ммк* (рис. 123). Электромагнитное излучение с длинами волн от 380 *ммк* и до (примерно) 10 *ммк* получается также оптическими методами и образует интервал ультрафиолетовых лучей. Рентгеновские лучи, получаемые при помощи рентгеновских трубок, лежат в интервале длин волн от 10—12 *ммк* до $6 \cdot 10^{-3}$ *ммк*. Начиная от длины волны $2 \cdot 10^{-2}$ *ммк*, в сторону коротких длин волн расположены γ-лучи, возникающие при радиоактивном распаде атомов.

В радиотелеграфии используются волны с длинами волн от нескольких километров до сантиметров, в радиовещании — от 2 *км* до 11 *м*, в телевидении используются метровые волны, в радиолокации — сантиметровые.

Интервал радиоволн, получаемых электрическими методами, охватывает волны длиной от сотен километров до миллиметра. Этот интервал частично перекрывается в коротковолновой части интервалом инфракрасных лучей (от 1 *см* до 760 *ммк*), испускаемых нагретыми телами.

Таким образом, исследованный интервал электромагнитных волн охватывает длины волн от 10^7 *см* до 10^{-14} *см* и частоты от 10^3 до 10^{24} *гц* и более для квантов космических лучей.

§ 53. Релятивистская форма уравнений электродинамики

Теория относительности особенно четко выявляет условность разделения электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля.

В теории относительности показывается, что формы существования материи — пространство и время — нельзя рассматривать в отрыве одно от другого. Все события теория относительности описывает в четырехмерном пространственно-временном многообразии — «мире Минковского». Событие в четырехмерном пространстве-времени характеризуется четырьмя координатами:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

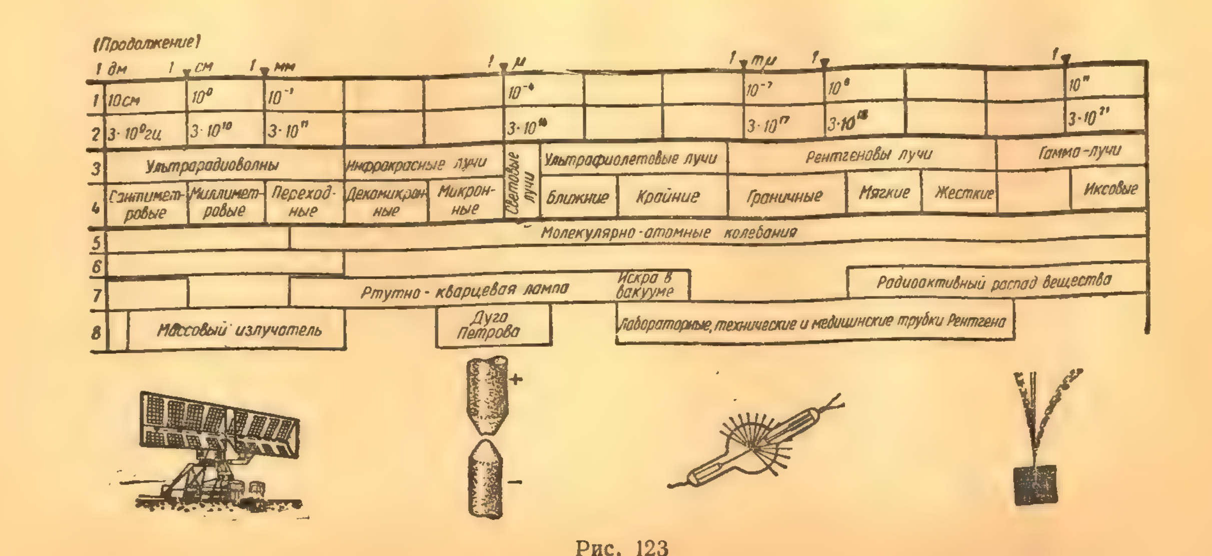
где $i = \sqrt{-1}$ и c — скорость света в вакууме.

(см продолжение)

	10^8 км		10^6 км			10^3 км			1 км			1 м	1 дм
1		10^{13} см		10^{11}			10^8			10^5			10^2
2		$3 \cdot 10^{-3}$ герц					$3\ 10^2$			$3\ 10^5$			$3\ 10^8$
3	Низкочастотные волны								Радиоволны				

4										
	Инфранизкие частоты	Низкие частоты	Промышленные частоты	Звуковые частоты	Длинные	Средние	Промежуточные	Короткие	Метровые	Дециметровые

5	
6	Электрические колебания вибраторов
7	Катодный генератор
8	Реостатный альтернатор; Генератор переменного тока; Томсоновский контур; Вибратор Герца



(Продолжение)
1 дм
1 см
1 мм
1 μ
1 mμ
1
1
1 10 см
10^{0}
10^{-1}
10^{-4}
10^{-7}
10^{8}
10^{11}
2 $3\cdot10^{9}$ гц
$3\cdot10^{10}$
$3\cdot10^{11}$
$3\cdot10^{14}$
$3\cdot10^{17}$
$3\cdot10^{18}$
$3\cdot10^{21}$
3 Ультрарадиоволны
Инфракрасные лучи
Световые лучи
Ультрафиолетовые лучи
Рентгеновы лучи
Гамма-лучи
4 Сантиметровые
Миллиметровые
Переходные
Декамикронные
Микронные
Ближние
Крайние
Граничные
Мягкие
Жесткие
Иксовые
5 Молекулярно-атомные колебания
6
7 Ртутно-кварцевая лампа
Искра в вакууме
Радиоактивный распад вещества
8 Массовый излучатель
Дуга Петрова
Лабораторные, технические и медицинские трубки Рентгена
+
−

Рис. 123

Компоненты электрического поля **E** и магнитного поля **H** объединяются в антисимметричный тензор поля второго ранга:

$$F_{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}),$$

компоненты которого удобно записать в виде матрицы:

$$F_{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{Vmatrix}$$

Плотность электрического заряда ρ выступает как один из компонентов четырехмерного вектора плотности заряда—тока:

$$j_\nu = (\mathbf{j}, \rho c).$$

Уравнение Максвелла:

$$\text{rot}\, \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

вместе с уравнением

$$\text{div}\, \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

объединяются в одно тензорное уравнение с четырехмерным током в правой части:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu.$$

С помощью тензора $F_{\mu\nu}$ уравнения Максвелла:

$$\text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

и

$$\text{div}\, \mathbf{H} = 0$$

записываются в тензорном виде:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{\nu l}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{l\mu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Форма, которую приобретает электродинамика в теории относительности, разумеется, не изменила существа законов электромагнитного поля, поскольку сама специальная теория относительности исторически выросла из проблем электродинамики. Однако, как отмечал А. Эйнштейн: «Прогресс в методе, которым электродинамика обязана специальной теории относительности, заключается главным образом в уменьшении числа независимых гипотез» (А. Эйнштейн, Сущность теории относительности. ИЛ, М. 1955).

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

Оптика

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

§ 1. Корпускулярная теория света

Корпускулярная теория света, развитая впервые И. Ньютоном в конце XVII в., рассматривала свет как поток частиц (корпускул), испускаемых источником света и распространяющихся в однородной среде прямолинейно. Отражение и преломление света эта теория объясняла механически. Так, отражение световой корпускулы от зеркала сравнивалось с отражением упругого шарика от стенки, поскольку в последнем случае угол отражения равняется углу падения. Преломление света объяснялось притяжением корпускулы при переходе из одной среды в другую частицами второй среды. При этом тангенциальные составляющие $v_{1\tau}$ и $v_{2\tau}$ скорости света в первой и второй средах одинаковы, а нормальные — различны. Поскольку $v_{1\tau} = v_1 \sin i_{пад}$ и $v_{2\tau} = v_2 \sin i_{прел}$, то коэффициент преломления:

$$n = \frac{\sin i_{пад}}{\sin i_{прел}} = \frac{v_2}{v_1}.$$

По Ньютону коэффициент преломления двух сред есть отношение скорости световой корпускулы во второй среде к скорости ее в первой среде.

Если $n > 1$, то $v_2 > v_1$, т. е. скорость корпускулы в более плотной среде больше, чем в менее плотной.

Корпускулярная теория света не смогла объяснить явлений дифракции, интерференции, поляризации света и в XIX в. уступила место волновой теории.

Корпускулярные представления о природе света возродились вновь в начале XX в. на основе теории квантов.

§ 2. Волновая теория света

Волновая теория света, впервые выдвинутая голландским физиком Христианом Гюйгенсом (1629—1695) в его работе «Трактат о свете» (написан в 1678 г., опубликован в 1690 г.), рассматривала свет как упругий импульс, распространяющийся в особой среде — эфире, заполняющем все пространство и пронизывающем вещество. Таким образом, волновая теория уподобляла свет, как волны в эфире, звуковым волнам в воздухе.

Когда поляризация света указала на факт поперечности световых волн, то представления о механическом эфире выявили свою недостаточность (1817 г.). Действительно, поперечные волны упругости возможны лишь в твердом теле. Однако попытка наделить эфир свойствами твердого тела не могла быть успешна, так как эфир не оказывает заметного воздействия на движущиеся в нем тела.

Электромагнитная теория света. В 1865 г. английский физик Джемс Клерк Максвелл показал, что переменные электромагнитные поля распространяются в пространстве со скоростью света. Тем самым было установлено, что свет представляет собой электромагнитную волну.

Электромагнитная волновая теория света позволила объяснить явления интерференции, дифракции, поляризации, дисперсии света. Однако эта теория не смогла объяснить явления фотоэффекта, комптоновского рассеяния и т. д., в которых выступали корпускулярные черты света.

Синтез корпускулярных и волновых представлений осуществляется в современной квантовой теории света, которая рассматривает свет как поток частиц (фотонов), распространяющихся по законам распространения электромагнитных волн.

Принцип Гюйгенса для световых волн. Каждая точка, до которой доходит свет, становится центром вторичных волн, положение действительного фронта распространяющейся волны определяется поверхностью, огибающей эти вторичные волны.

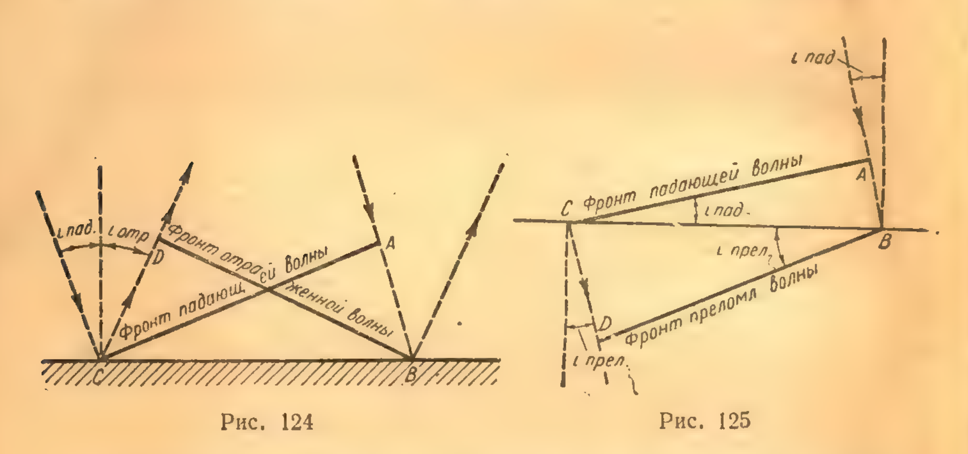


Рис. 124 Рис. 125

Применение принципа Гюйгенса позволяет избежать в ряде случаев решения волнового уравнения при соответствующих граничных условиях.

Закон отражения в волновой теории света. Если плоская волна падает на плоскость, то точки этой поверхности, до которых дошел фронт волны, становятся источником вторичных волн и фронт отраженной волны представляется их огибающей, представляющей также плоскую волну (рис. 124). Очевидно, угол отражения равен углу падения, так как $AB = CD$, скорость света постоянна.

Закон преломления в волновой теории света. При падении плоской волны на плоскую границу раздела двух прозрачных сред фронт преломленной волны также представляет собой плоскость (рис. 125). Однако, поскольку отрезки AB и CD пройдены волной в разных средах за одно и то же время t, т. е. $AB = v_1 t$ и $CD = v_2 t$, то, поскольку скорости световой волны в средах I и II не одинаковы, фронт волны поворачивается при переходе в другую среду на некоторый угол, — наблюдается преломление. Так как $AB = CB \sin i_{\text{пад}}$ и $CD = CB \sin i_{\text{прел}}$, то коэффициент преломления:

$$n_{2,1} = \frac{\sin i_{\text{пад}}}{\sin i_{\text{прел}}} = \frac{AB}{CD} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Согласно волновой теории света коэффициент преломления двух сред равен отношению скорости световой волны в первой среде к скорости ее во второй среде.

Если $n_{2,1} > 1$, т. е. вторая среда является более оптически плотной чем первая, то $v_1 > v_2$. Поэтому скорость световой волны в более оптически плотной среде меньше, чем в менее плотной.

Абсолютный коэффициент преломления. Коэффициент преломления среды по отношению к вакууму (т. е. когда луч падает из вакуума), называется абсолютным коэффициентом преломления данной среды n:

$$n_{2,\ \text{вакуум}} = n.$$

Относительный коэффициент преломления двух сред $n_{2,1}$ равен отношению абсолютных коэффициентов преломления этих сред:

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

§ 3. Полное внутреннее отражение

Закон преломления

$$\frac{\sin i_{\text{пад}}}{\sin i_{\text{прел}}} = n_{2,1}$$

показывает, что если относительный коэффициент преломления двух сред меньше единицы, т. е. свет переходит из более оптически плотной среды в менее плотную, то при $\sin i_{\text{пад}} \geqslant n_{2,1}$, $\sin i_{\text{прел}} \geqslant 1$, что бессмысленно.

При падении света из более оптически плотной в менее оптически плотную среду, при углах падения $\sin i_{\text{пад}} \geqslant n_{2,1}$, наблюдается явление полного внутреннего отражения, заключающееся в том, что свет полностью отражается от границы раздела в первую среду. Для границы стекло—воздух предельный угол падения, начиная с которого осуществляется полное внутреннее отражение, равен $\simeq 42°$. На рис. 126 приведены примеры призм полного внутреннего отражения.

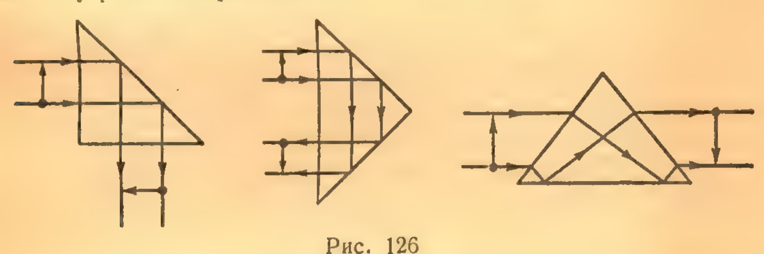


Рис. 126

Призмы полного внутреннего отражения применяются в устройстве призматических (полевых) биноклей, дальномеров, стереотруб и т. д.

§ 4. Преломление монохроматического луча в призме

Угол между плоскостями призмы ω является преломляющим углом (рис. 127).

Из рисунка следует:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n; \quad \beta_1 + \alpha_2 = \omega; \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = \frac{1}{n}.$$

Угол отклонения луча δ равен:

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2 = \alpha_1 + \beta_2 - \omega;$$

Угол наименьшего отклонения наблюдается при симметричном прохождении луча через призму, т. е. в случае, когда:

$$\beta_1 = \alpha_2 = \frac{\omega}{2}; \quad \alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2 = \frac{\delta}{2};$$

$$\alpha_1 = \beta_1 + \frac{\delta}{2} = \frac{\omega}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

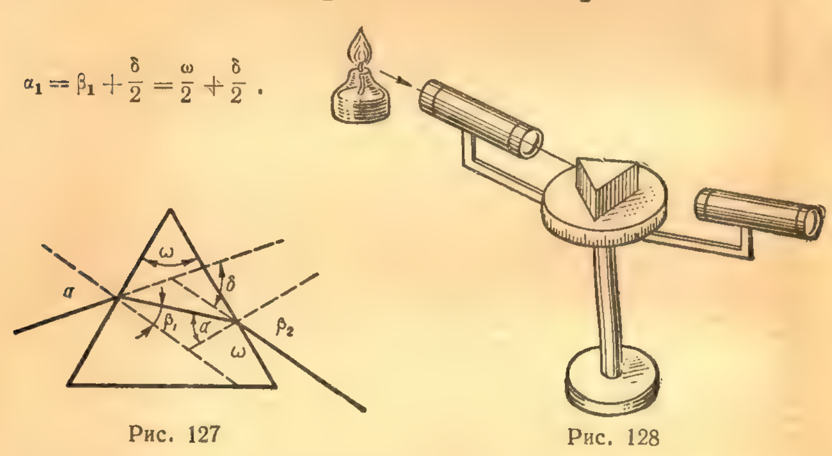


Рис. 127

Рис. 128

Измерение коэффициента преломления стекла призмы. Последние равенства позволяют определить коэффициент преломления n_1, измеряя угол наименьшего отклонения δ и преломляющий угол ω при помощи гониометра (рис. 128):

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

§ 5. Тонкие линзы

Линзой называется кусок стекла, ограниченный сферическими поверхностями.

Собирательная линза превращает пучок параллельных лучей в пучок сходящихся лучей; рассеивающая линза превращает пучок параллельных лучей в расходящийся пучок.

Если вещество линзы обладает бóльшим коэффициентом преломления, чем окружающая среда, то линзы двояко-выпуклые, плоско-выпуклые и вогнуто-выпуклые (утолщающиеся к середине) являются собирательными, а двояко-вогнутые, плоско-вогнутые и выпукло-вогнутые (утончающиеся к середине) являются рассеивающими.

Линза называется тонкой, если толщина линзы мала по сравнению с радиусами сферических поверхностей, ограничивающих линзу.

Формула тонкой линзы.

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \left(\frac{n_{\text{линзы}}}{n_{\text{среды}}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

где a_1 — расстояние от оптического центра линзы до предмета,
a_2 — расстояние от оптического центра линзы до изображения,
R_1 — радиус первой сферической поверхности, ограничивающей линзу,
R_2 — радиус второй сферической поверхности, ограничивающей линзу,
$n_{линзы}$ — коэффициент преломления вещества линзы,
$n_{среды}$ — коэффициент преломления окружающей линзу среды (рис. 129).

Формула получается путем применения закона преломления света на сферических поверхностях, ограничивающих линзу.

Величины a_1, a_2, R_1 и R_2 входят в формулу линзы со знаком плюс или минус. Если какая-либо из этих величин откладывается от оптического центра линзы в сторону, противоположную направлению луча света, она считается отрицательной, в противном случае — положительной.

Фокусы и фокусные расстояния тонкой линзы. *Фокусом линзы называется точка, в которой собираются лучи, параллельные главной оптической оси линзы, после преломления в ней.*

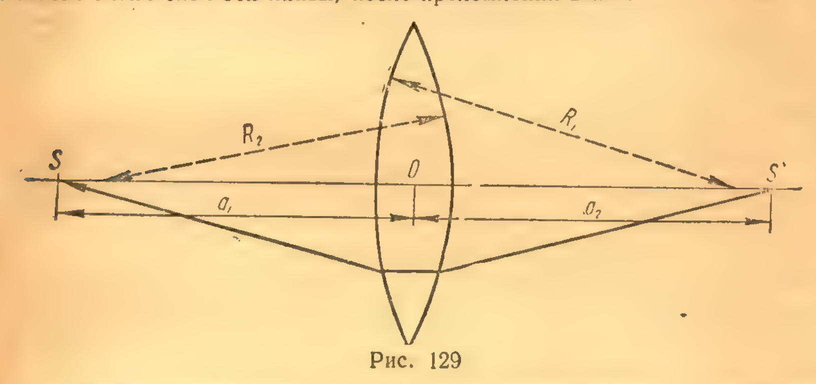


Рис. 129

Если пучок параллельных лучей превращается в расходящийся (линза рассеивающая), то точка, в которой пересекаются продолжения лучей, преломленных в линзе и ранее бывших параллельными главной оптической оси линзы, называется также фокусом (мнимым).

Расстояние от оптического центра O линзы до фокуса называется фокусным расстоянием f. Если на тонкую линзу падает параллельный пучок лучей, то их источник считается расположенным в бесконечности, т. е. $a_1 = \infty$, а $a_2 = f_1$.

Из формулы тонкой линзы:

$$f_1 = \frac{1}{\left(\frac{n_{линзы}}{n_{среды}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}.$$

Если лучи падают параллельным пучком на линзу с противоположной стороны, аналогично: $a_2 = \infty$, $a_1 = f_2$ и

$$f_2 = -\frac{1}{\left(\frac{n_{линзы}}{n_{среды}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}.$$

Очевидно, $f_1 = -f_2$, т. е. фокусы лежат от линзы слева и справа на равных расстояниях.

Оптическая сила линзы. Величина D, обратная фокусному расстоянию f_1 линзы, выраженному в метрах, называется оптической силой линзы:

$$D = \frac{1}{f_1 \text{(метров)}}.$$

Единицей измерения оптической силы является диоптрия — оптическая сила линзы с фокусным расстоянием в 1 *м*. Если $n_{\text{линзы}} > n_{\text{среды}}$, как обычно, то знак первого фокусного расстояния f_1, а стало быть и оптической силы D определяется знаком выражения $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Для собирательных линз

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} > 0,$$

для рассеивающих линз

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} < 0.$$

Оптическая сила собирательных линз положительна, а рассеивающих — отрицательна.

Если учитывать лишь абсолютные значения a_1, a_2 и f, то формула линзы (см. стр. 256) принимает вид:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \pm \frac{1}{f},$$

где знак плюс соответствует собирательной, а знак — минус — рассеивающей линзам.

§ 6. Сферическая аберрация

Сферической аберрацией называется недостаток линз, заключающийся в том, что идущие от светящейся точки лучи, близкие к главной оптической оси линзы (параксиальные), и лучи, проходящие через линзу далеко от оптической оси, дают изображения светящейся точки в разных точках оптической оси линзы (рис. 130.)

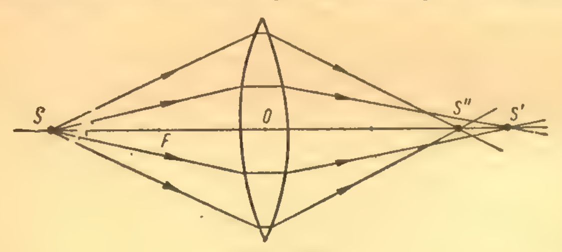


Рис. 130

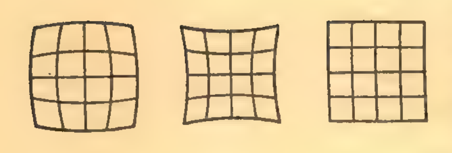


Рис. 131

Благодаря сферической аберрации светящаяся точка дает на экране изображение в виде кружка (кружок рассеяния).

Сферическую аберрацию резко уменьшают, комбинируя собирательные и рассеивающие линзы, для которых сферическая аберрация (растягивание изображения точки вдоль главной оптической оси линзы) имеет разные знаки.

Астигматизм косых пучков имеет место при образовании изображений точек, от которых распространяются лучи под большими углами к оси системы (косые пучки).

В зависимости от расстояния экрана от оптического центра линзы на экране наблюдается изображение точки либо в виде вертикальной линии, либо в виде горизонтальной линии, либо в виде расплывчатого пятна эллиптической формы. Это связано с тем, что для лучей, идущих от точки в разных плоскостях, проходящих через оптическую ось системы, изображения получаются на разных расстояниях от оптического центра линзы.

Дисторсия (искривление) изображений связана с различным увеличением линзой участков, лежащих в одной плоскости, перпендикулярной оси, но разноотстоящих от оси. Различают подушкообразную и бочкообразную дисторсии (рис. 131) в зависимости от того, каким образом искажается изображение квадратной сетки.

§ 7. Глаз как оптическая система

Хрусталик глаза представляет собой двояковыпуклую линзу, которая проектирует изображение предмета на сетчатку, в которой находятся окончания зрительных нервов.

Аккомодация — способность глаза изменять кривизну хрусталика в целях рассмотрения предметов, удаленных на различные расстояния. Аккомодация позволяет видеть предметы в пределах от бесконечно удаленных до лежащих в ближней точке. Расстояние ближней точки от глаза меняется с возрастом от 12 *см* в 20 лет до 40 *см* в 50 лет.

Расстояние наилучшего зрения определяется удобством чтения и принимается равным 25 *см*.

Стереоскопический эффект (объемность зрения) объясняется тем, что изображения одного и того же предмета на сетчатках двух глаз несколько отличаются. Это позволяет оценивать расстояние до предмета.

§ 8. Оптические приборы

Лупа. Лупой называется двояковыпуклая линза с небольшим фокусным расстоянием (от 10 до 1 *см*). Лупа располагается в непосредственной близости от глаза, а предмет — между фокусом и лупой. Мнимое увеличенное прямое изображение предмета получается на расстоянии наилучшего зрения, что достигается автоматическим перемещением лупы.

Увеличение лупы, как следует из рис. 132,

$$N = \frac{D}{f},$$

где D — расстояние наилучшего зрения,

f — фокусное расстояние лупы.

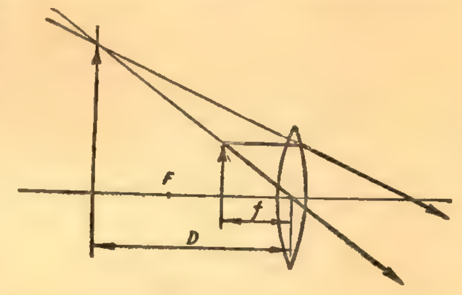


Рис. 132

Микроскоп состоит из двух систем линз: объектива и окуляра. Предмет располагается непосредственно за фокусом объектива, при помощи которого достигается действительное увеличенное изображение. Окуляр располагается относительно изображения в объективе, как лупа, давая его увеличенное мнимое изображение (рис. 133).

Увеличение микроскопа равно произведению увеличений в объективе $N_{об}$ и в окуляре $N_{ок}$.

Увеличение в объективе равно приближенно отношению длины тубуса (трубки) микроскопа S к фокусному расстоянию объектива $f_{об}$.

Увеличение в окуляре

$$N_{ок} = \frac{D}{f_{ок}},$$

где D — расстояние наилучшего зрения,

$f_{ок}$ — фокусное расстояние окуляра. Поэтому:

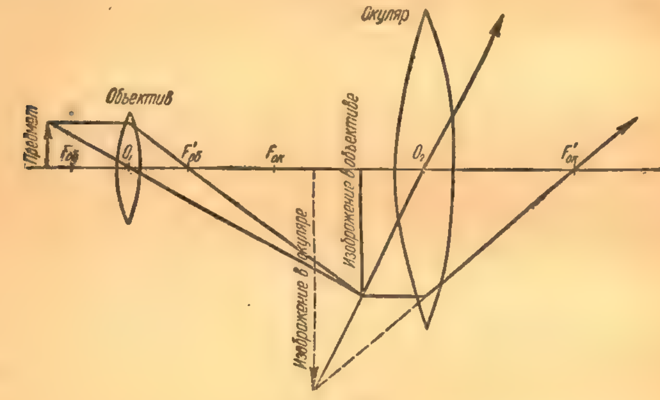


Рис. 133

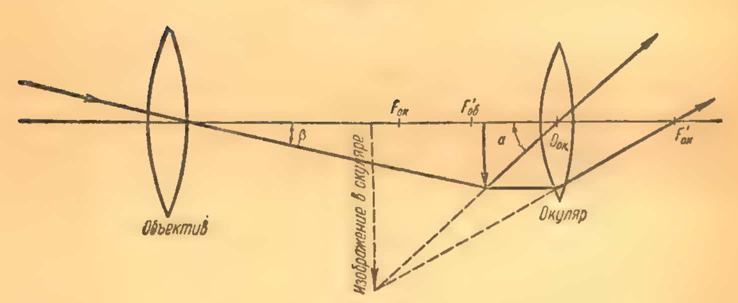


Рис. 134

$$N_{микроскопа} = N_{об} \cdot N_{ок} \simeq \frac{SD}{f_{об} \cdot f_{ок}}.$$

Телескоп Кеплера (рефрактор) (рис. 134). В телескопе Кеплера изображение весьма удаленного предмета получается вблизи главного фокуса объектива. Оно рассматривается в окуляр-лупу.

Увеличение телескопа Кеплера равно отношению тангенсов углов α и β, или, приближенно, отношению фокусного расстояния объектива к фокусному расстоянию окуляра:

$$N = \frac{f_{об}}{f_{ок}}.$$

Телескоп Ньютона (рефлектор) (рис. 135). Лучи падают на вогнутое зеркало, и при помощи зеркала на оси трубы выводятся в окуляр.

Телескоп Ломоносова (рис. 136). Оптическая ось вогнутого зеркала образует небольшой угол с осью трубы, что позволяет вынести зеркало *г*, на котором собираются лучи после отражения от рефлектора, за пределы трубы.

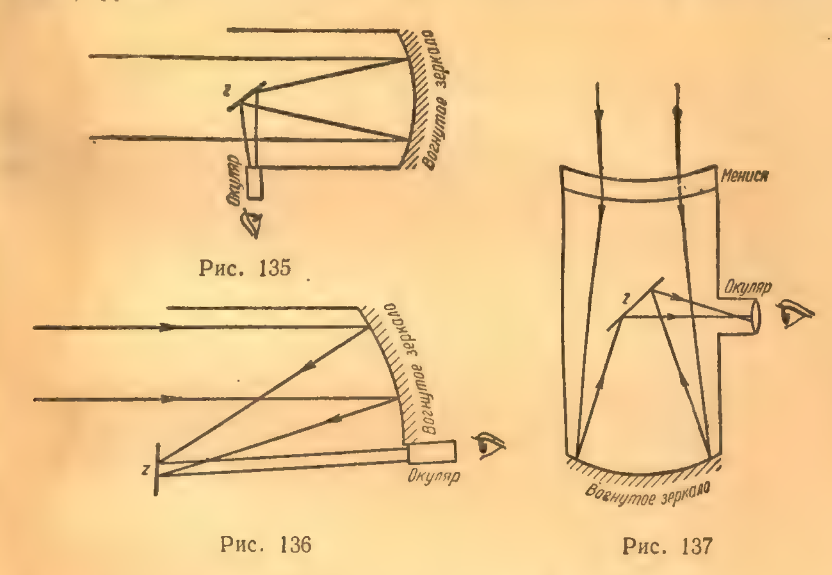


Рис. 135

Рис. 136

Рис. 137

Менисковый телескоп Максутова (рис. 137). Советский ученый Д. Д. Максутов соединил выпукло-вогнутую линзу (мениск) с рефлектором. При этом сферическая аберрация мениска компенсируется сферической аберрацией зеркала. Длина трубы телескопа Максутова много меньше, чем у телескопов других систем. Зеркало рефлектора защищено от пыли и атмосферной влаги.

§ 9. Методы определения скорости света

Метод Рёмера. В 1676 г. датский астроном Олаф Рёмер (1644—1710) в Парижской обсерватории при наблюдении затмений одного из спутников Юпитера заметил, что промежутки между последовательными затмениями короче, когда Земля приближается к Юпитеру, и длиннее, когда Земля удаляется от Юпитера. Средний промежуток между затмениями, вычисленный за 398 суток, т. е. за время, через которое повторяются одинаковые относительные положения Земли, Солнца и Юпитера, оставался неизменным из года в год.

Рёмер объяснил это тем, что свет распространяется с конечной скоростью, причем расстояние, проходимое светом, меняется в зависимости от положения Земли на ее орбите (рис. 138). Время запаздывания затмения во втором положении Земли по сравнению с моментом наступления этого затмения, вычисленным из наблюдения в положении первом, равно времени, которое затрачивает свет на прохождение диаметра земной орбиты. Определение этого времени позволяет найти скорость света, так как диаметр земной орбиты известен. Рёмер получил значение скорости света, равное 215 000 *км/сек*. Современные определения скорости света по его способу дают 300 870 *км/сек*.

Метод Брэдли. В 1727 г. астроном Джемс Брэдли (1693—1762) открыл явление звездной аберрации, заключающееся в том, что все звезды в течение года описывают на небесной сфере эллипсы с большой полуосью, наблюдаемой с Земли под углом $\varphi = 20,5''$. Это явление было объяснено движением Земли по орбите вокруг Солнца со скоростью $v = 29,8$ *км/сек*. Для того, чтобы с движущейся Земли наблюдать звезду, необходимо наклонять трубу телескопа вперед по движению. Действительно, за время, пока свет проходит трубу, окуляр вместе с Землей передвигается вперед (рис. 139). Очевидно

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c}.$$

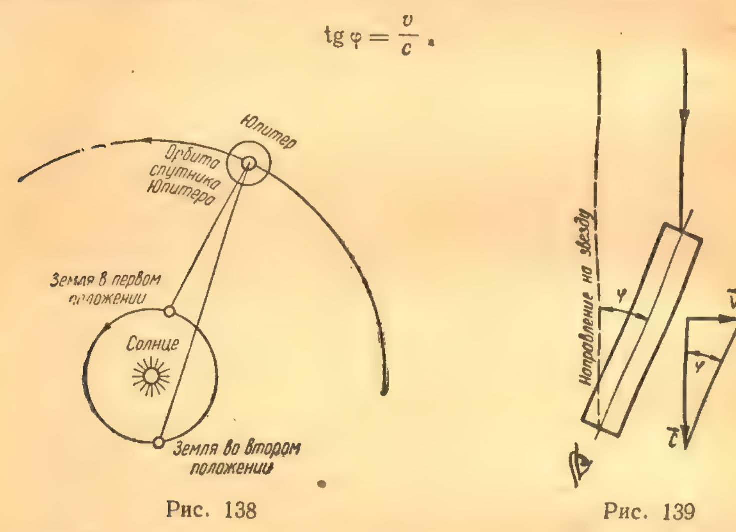


Рис. 138

Рис. 139

Метод Физо. В 1849 г. Арман Физо (1819—1896) впервые определил скорость света, пользуясь земным источником света, в лабораторных условиях (рис. 140). Свет от источника S падал на полупрозрачную пластинку A и, частично отразившись от нее, проходил между зубцами зубчатого колеса B к зеркалу C, отразившись от которого, свет вновь проходил между зубцами и часть его, прошедшая через пластинку A, наблюдалась в окуляр D.

При некоторой частоте вращения колеса ν_1 наблюдатель переставал видеть свет, а при большей частоте ν_2 — вновь наблюдал его. Очевидно, что за время, пока свет проходит расстояние BC туда и обратно, при частоте ν_1 на место просвета между зубцами становится зубец, а при частоте ν_2 на место просвета становится соседний просвет. Если n — число зубцов колеса и $l = BC$, то скорость света:

$$c = \frac{2l}{\frac{1}{2n\nu_1}} = \frac{2l}{\frac{1}{n\nu_2}}.$$

Физо получил $c = 315\,000\ \frac{км}{сек}$.

Метод Фуко. Метод Леона Фуко (1819—1868), осуществленный в 1862 г., основан на идее, предложенной Араго в 1838 г. Схема опыта изображена на рис. 141. Свет от источника S при помощи линзы направляется к вращающемуся зеркалу A, от которого отражается в направлении ко второму вогнутому сферическому зеркалу B с центром на оси вращения, и от

него обратно к зеркалу A. После отражения от зеркала A свет наблюдается с использованием полупрозрачной пластинки D через окуляр.

За время τ свет проходит расстояние AB дважды. За это же время зеркало A, вращающееся с известной частотой вращения, поворачивается на угол, который легко определить по смещению светового зайчика в окуляре в сравнении с зайчиком от неподвижного зеркала.

Метод Фуко позволил, сократив расстояние AB до 4 *м*, произвести измерение скорости света в воде. Оказалось, что в воде скорость света меньше, чем в воздухе в соответствии с волновой теорией света.

Метод Майкельсона. В 1926 г. американский физик Альберт Абрагам Майкельсон (1852—1931), видоизменив метод Фуко, определил скорость света весьма точно. В схеме опыта Майкельсона (рис. 142) вращающимся зеркалом является восьмигранная стальная призма. Свет совершает полный путь за время поворота призмы на $^1/_8$ оборота, так как, если призма повернется на меньший угол, отраженный от нее свет не наблюдается в трубу окуляра.

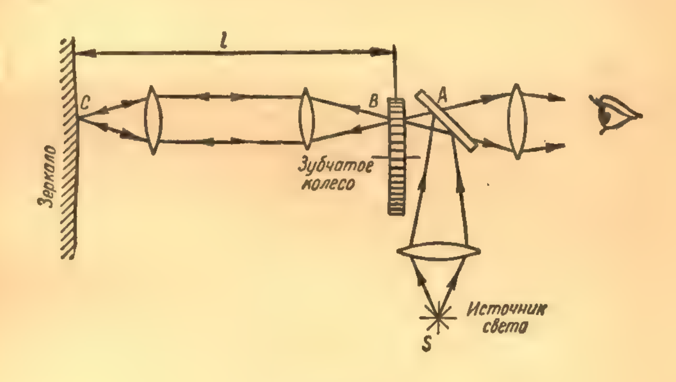


Рис. 140

Метод Бергштранда. В 1949 г. Бергштранд получил исключительно точное значение скорости света, используя явление Керра и установку, схема которой приведена на рис. 143. Световой пучок, интенсивность которого меняется с частотой $8{,}3 \cdot 10^6$ *гц* посредством прерывателя Керра K, распространяется от источника S к зеркалу B, после отражения от которого он фокусируется зеркалом C на фотоэлементе Φ, чувствительность которого меняется автоматически с той же частотой, что и интенсивность пучка света.

Средний фототок зависит от разности фаз между колебаниями интенсивности света и колебаниями чувствительности фотоэлемента, а эта разность фаз зависит от проходимого светом пути, т. е. от положения зеркала B. Если при некотором положении зеркала фототок максимален, разность фаз равна 0. При удалении зеркала B от источника света средний фототок сначала уменьшается, а затем вновь достигает максимума.

Если смещение зеркала B равно в этом случае x, то свет проходит путь $2x$ за время, равное одному периоду колебаний его интенсивности. Применение особой электрической схемы с использованием нулевого метода, позволяющего фиксировать максимумы и минимумы фототока по нулевому показанию чувствительного гальванометра, весьма повышает точность метода Бергштранда.

Результаты определений скорости света различными методами сведены в таблицу:

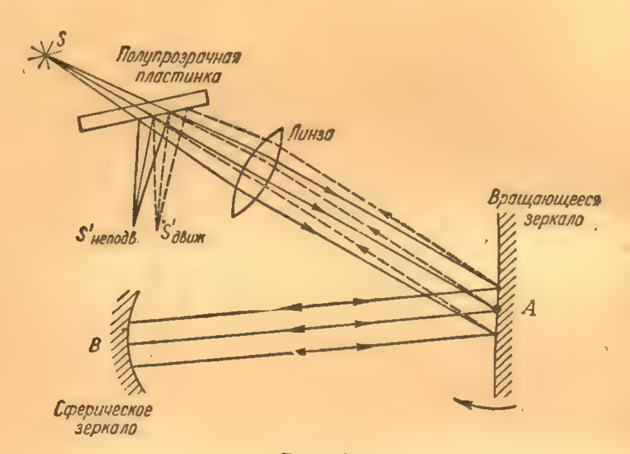


Рис. 141

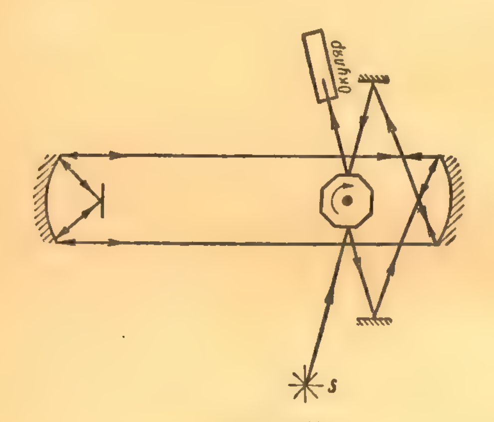


Рис. 142

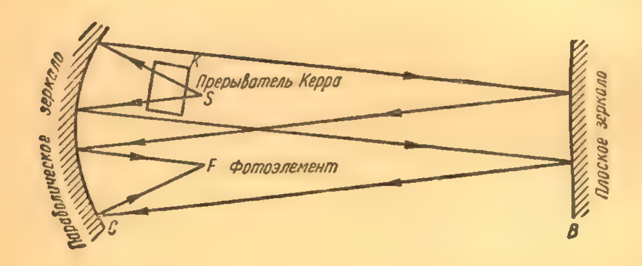


Рис. 143

Исследователь	Год проведения опыта	Скорость света в *км/сек*	Максимальная погрешность в *км/сек*
Рёмер	1676	300870	2700
Брэдли	1727	299640	750
Физо	1849	315000	—
Фуко	1862	298000	2200
Корню (по методу Физо)	1876	300000	300
Перротен (по методу Физо)	1902	299870	50
Майкельсон	1902	299890	60
Майкельсон	1926	299796	18
Бергштранд	1949	299792,7	1,1
(Современное значение)	1958	299792,5	0,4

ВОЛНОВАЯ И КОРПУСКУЛЯРНАЯ ОПТИКА

§ 10. Интерференция света

Интерференцией волн называется явление усиления колебаний в одних точках пространства и ослабления колебаний в других точках в результате наложения двух или нескольких волн, приходящих в эти точки.

Поскольку свет представляет собой электромагнитные волны, должна наблюдаться интерференция света. Однако в результате того, что отдельные световые импульсы, посылаемые высвечивающимися атомами источника света, не согласованы между собой по фазе, а кроме того, могут отличаться по частоте, картина взаимного усиления, возникшая в каком-либо участке пространства, уже через миллиардные доли секунды сменяется картиной взаимного ослабления и наоборот. Хаотическая смена таких мгновенных картин глазом не воспринимается, а создает ощущение ровного потока света, не изменяющегося во времени.

Для наблюдения устойчивой во времени интерференционной картины необходимы условия, при которых частоты, поляризации и разность фаз интерферирующих лучей были бы постоянными в течение всего времени наблюдения.

Когерентные волны. Волны одинаковой частоты, колебания в которых отличаются постоянной разностью фаз, не изменяющейся со временем, называются когерентными (связанными).

Для получения когерентных волн, очевидно, необходимо иметь два источника волн одинаковой частоты, колеблющихся с постоянной разностью фаз (например две синхронизированные по частоте радиостанции). Однако световые волны, испускаемые отдельными атомами источника света, никак не согласованы по фазе. Поэтому когерентные световые волны получают, разделяя при помощи того или иного оптического устройства волну, идущую от одного источника света, на две волны, идущие по разным направлениям. Если эти волны пройдут различные пути, а затем будут снова сведены и наложены одна на другую, то поскольку на путях разной длины фаза волны меняется на разную величину, волны придут в точку встречи с постоянной неизменной во времени разностью фаз.

Зеркала Френеля. В качестве двух когерентных источников света Френель использовал изображения одного источника в двух плоских зеркалах, расположенных под углом, близким к 180°. Результат интерференции лучей, отраженных от этих зеркал, определяется разностью хода лучей

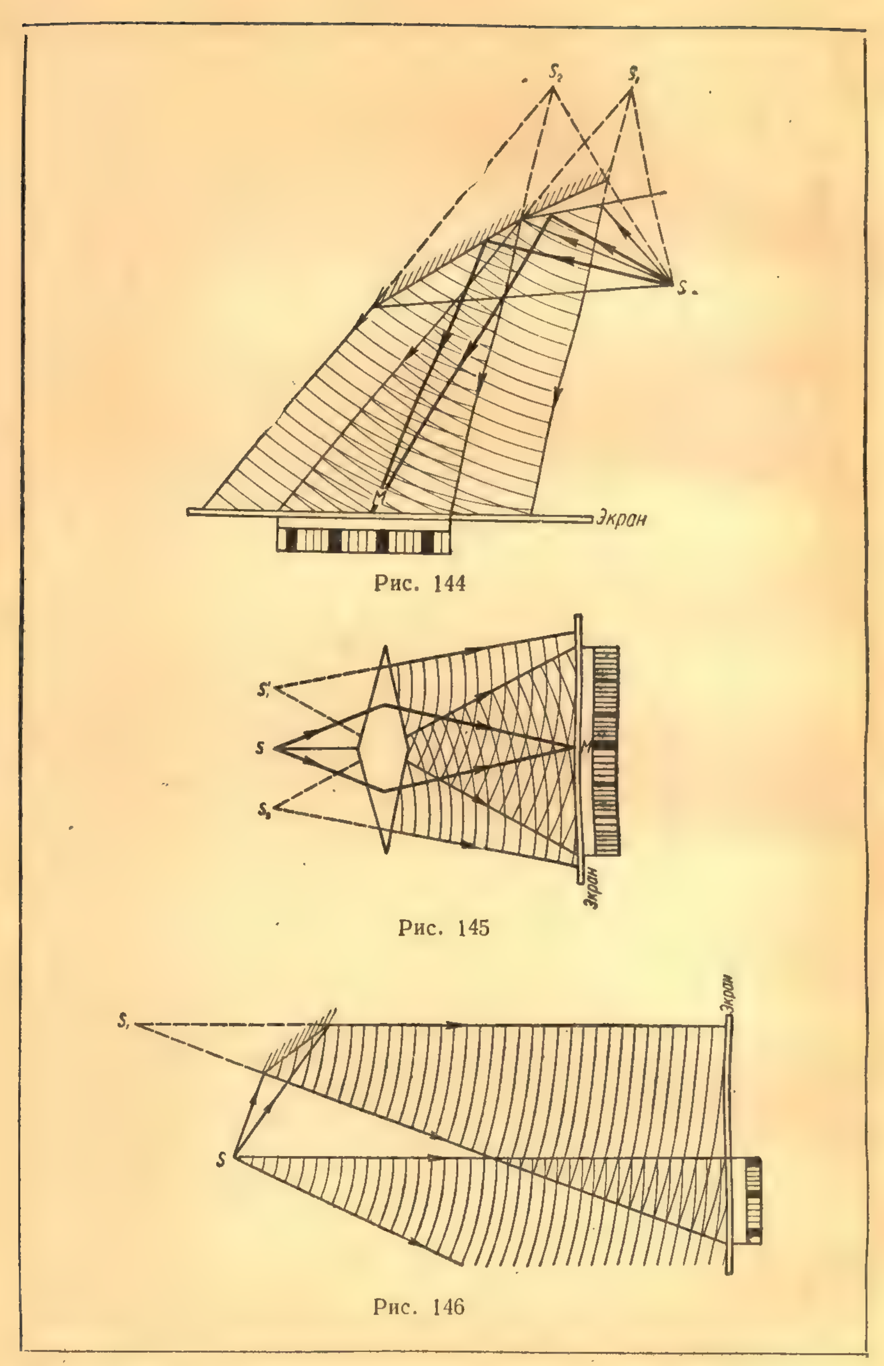


Рис. 144

Рис. 145

Рис. 146

от источника S (или от его мнимых изображений в зеркалах) до точки встречи (рис. 144):

$$S_1 M - S_2 M = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \text{ — условие минимума,}$$

$$S_1 M - S_2 M = k\lambda \text{ — условие максимума, } k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Бипризма Френеля. В бипризме Френеля (рис. 145) для получения когерентных источников света используется преломление света от одного точечного источника в двух призмах с малым преломляющим углом, сложенных основаниями. После преломления получаются расходящиеся пучки света, которые можно рассматривать как посланные «мнимыми» источниками S_1 и S_2:

$$S_1 M - S_2 M = k\lambda \text{ — условие максимума;}$$

$$S_1 M - S_2 M = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \text{ — условие минимума при интерференции.}$$

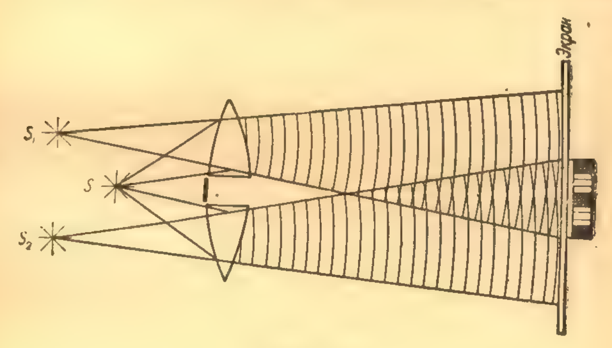


Рис. 147

Зеркало Ллойда. В зеркале Ллойда (рис. 146) прямой пучок света от источника S интерферирует с пучком света, отраженным от плоского зеркала. Когерентными источниками являются источник света S и его мнимое изображение S_1 в зеркале.

Билинза Билле. В билинзе Билле (рис. 147) когерентные волны получаются посредством преломления пучка света от источника в двух половинах разрезанной линзы, незначительно сдвинутых одна относительно другой.

Щели Юнга. В отличие от описанных выше устройств щели Юнга (рис. 148) используют для получения интерференционной картины дифракцию света. Свет, проходящий через узкую щель, дифрагирует, отклоняется от первоначального направления. При этом части одной и той же волны, вышедшей из щели в первом экране и прошедшие разные щели во втором экране, перекрываются и интерферируют.

Разность фаз когерентных волн. Если в вакууме длина волны λ_0, то в среде с коэффициентом преломления n длина волны $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ и скорость распространения волны $v = \frac{c}{n}$.

Если одна из волн проходит путь d_1 в среде с коэффициентом преломления n_1, а другая — путь d_2 в среде с коэффициентом преломления n_2, то приобретаемая разность фаз:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{d_2}{\lambda_2} - \frac{d_1}{\lambda_1}\right) = 2\pi\frac{n_2 d_2 - n_1 d_1}{\lambda_0}.$$

Оптическая длина пути. Если после разделения пучка света на два пучка, последние будут распространяться в различных средах, то при подсчете приобретаемой волнами разности фаз следует учитывать изменение длины волны при переходе из вакуума в среду.

Оптической длиной пути называется произведение коэффициента преломления n на геометрическую длину пути d.

Два пути световых волн оптически эквивалентны, если их оптические длины равны. Эти пути называются таутохронными, т. е. одинаковыми по времени, так как свет такие пути проходит за одно и то же время.

Интерференция в тонких пленках. Радужные цвета тонких пленок, наблюдаемые на поверхности воды, покрытой тонким слоем нефти, на пленках окислов, на поверхности мыльной пленки и т. д., объясняются явлением интерференции в тонких пленках.

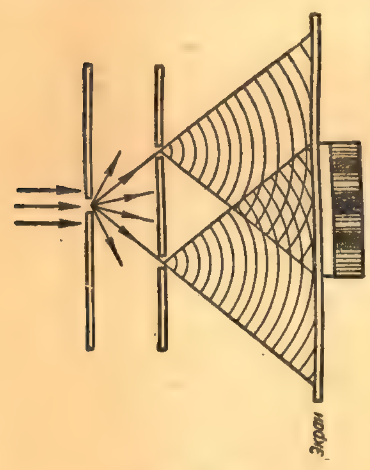


Рис. 148

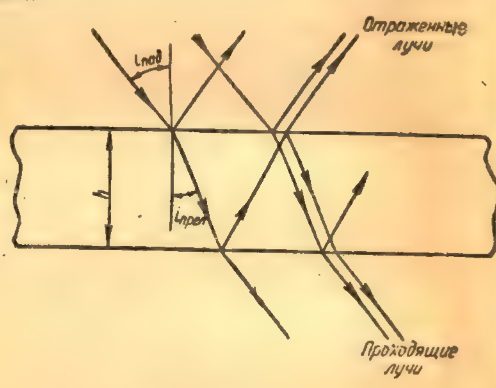


Рис. 149

Когда пучок параллельных лучей падает под углом падения $i_{пад}$ на поверхность прозрачной пленки толщины d, свет частично отражается от этой поверхности, а частично, пройдя через пленку, отражается от второй поверхности, вновь проходит через пленку и по выходе из пленки встречается со светом, отраженным от первой поверхности.

Разность хода δ этих лучей, как можно заметить из рис. 149, равна $2\ hn \cos i_{прел}$, где n — коэффициент преломления пленки.

Если над и под пленкой находится среда с меньшим коэффициентом преломления, чем у пленки, то луч, отраженный от первой поверхности, теряет при отражении полволны, а луч, отраженный от второй поверхности, не испытывает этой потери. Разность хода в этом случае:

$$\delta = 2\,hn \cos i_{прел} + \frac{\lambda}{2}.$$

Если над и под пленкой находится среда с коэффициентом преломления, большим, чем у пленки, то потеря полуволны имеет место при отражении от второй поверхности и отсутствует при отражении от первой. Разность хода также равна:

$$\delta = 2\,hn \cos i_{прел} + \frac{\lambda}{2}.$$

Если под пленкой находится среда с коэффициентом преломления меньшим, чем у пленки, а под пленкой — среда с коэффициентом преломления, большим, чем у пленки, то потеря полуволны имеет место при обоих отражениях, и разность хода лучей:

$$\delta = 2\,hn\cos i_{\text{прел}}.$$

Заменив $\cos i_{\text{прел}}$ через $\sqrt{1-\frac{\sin^2 i_{\text{пад}}}{n^2}}$, получим

$$\delta = 2\,h\sqrt{n^2-\sin^2 i_{\text{пад}}}\,.$$

Если $\delta = k\lambda$, при интерференции имеет место максимум, если $\delta = (2\,k+1)\,\frac{\lambda}{2}$ — минимум; $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$

Полосы равной толщины. Если толщина пленки не является одинаковой в разных местах, то в одних точках выполняется условие максимума, а в других — минимума. При проектировании пленки на экран посредством линзы таким образом, чтобы на экране получилось изображение пленки, пленка оказывается покрытой полосами, проходящими по точкам, соответствующим равной толщине пленки.

Для монохроматического света полосы равной толщины это — черные и белые полосы, для белого света — цветные. Полосы равной толщины локализованы на поверхности.

Полосы равного наклона. При освещении пленки, ограниченной параллельными плоскостями, светом от источника конечных размеров лучи от различных точек источника падают на пленку под различными углами падения $i_{\text{пад}}$. Разность хода лучей, отраженных от различных поверхностей пленки, зависит от $i_{\text{пад}}$. Если затем на пути этих лучей поставить линзу, то на экране в фокальной плоскости линзы будет наблюдаться интерференционная картина.

Интерференционные полосы в этом случае называются полосами равного наклона, так как они получаются в результате интерференции лучей, падающих на пленку под одним и тем же углом. Для разных полос углы падения различны.

Полосы равного наклона локализованы в бесконечности и могут наблюдаться простым глазом, аккомодированным на бесконечность.

Просветление оптики. При прохождении светом оптической системы происходят частичные отражения лучей от поверхностей линз.

При нормальном падении света из среды с коэффициентом преломления n_1 в среду с коэффициентом преломления n_2 коэффициент отражения света (отношение интенсивности I_r отраженного света к интенсивности I_0 падающего):

$$r = \frac{I_r}{I_0} = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2.$$

Для перехода из стекла в воздух или обратно $r \sim 4\%$.

Уменьшение отражения света достигают, покрывая стекло пленкой с коэффициентом преломления:

$$n_{\text{слоя}} = \sqrt{n_{\text{стекла}}}$$

и такой толщины, чтобы лучи, отраженные от границ воздух — пленка и пленка — стекло, при интерференции гасили друг друга.

Из условий интерференции в тонкой пленке толщина слоя просветления:

$$d \simeq \frac{\lambda}{4\,n_{\text{слоя}}}\,.$$

Полное просветление достигается для определенной длины волны (обычно $\lambda = 550$ $m\mu$, что соответствует максимальной чувствительности глаза). Сильнее всего при этом отражаются сине-фиолетовые и красные цвета, поэтому просветленная линза при рассматривании кажется сине-лиловой. С этим связано название просветленной оптики — «голубая оптика».

В качестве слоя просветления используются пленки фторида кальция CaF_2, фторида магния MgF_2. Иногда осуществляется выщелачивание поверхностного слоя линзы, приводящее к тому же эффекту, что и покрытие линзы слоем просветления.

§ 11. Интерферометры

Интерферометр Жамена (рис. 150) состоит из двух плоскопараллельных стеклянных пластин. Если пластины строго параллельны, то лучи, встречающиеся в точке F, не приобретают разности хода. При использовании несколько расходящегося пучка света наблюдаются полосы равного наклона.

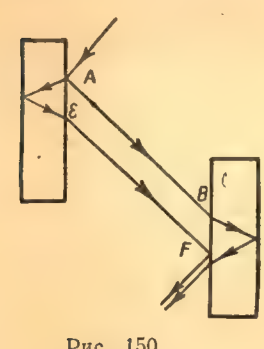


Рис. 150

Если на пути одного из лучей AB или EF поместить прозрачную среду с другим коэффициентом преломления, то лучи AB и EF приобретут разность хода $l\,(n_2 - n_1)$, где l — длина внесенного слоя, n_2 — коэффициент преломления внесенной среды, n_1 — коэффициент преломления воздуха.

Если разность хода в длинах волн λ используемого света равна $m\lambda$, то интерференционная картина смещается на m полос. Смещение на $\frac{1}{10}$ полосы уже легко заметить. Интерферометр Жамена, используемый, таким образом, для определения коэффициентов преломления является интерференционным рефрактометром.

В интерферометре Майкельсона (рис. 151), служащем для точного измерения длин, луч света посредством полупрозрачной пластинки, покрытой с одной стороны тонким слоем серебра, разделяется на два

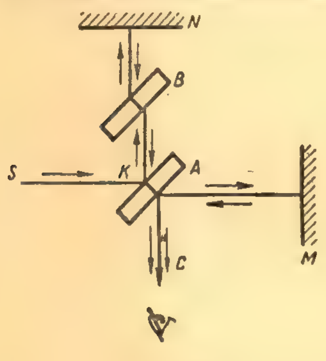


Рис. 151

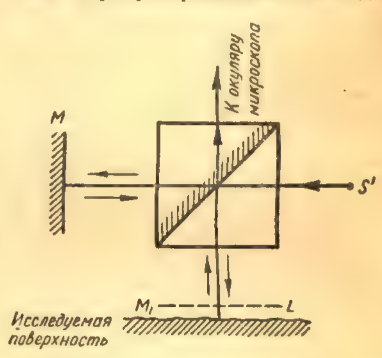


Рис. 152

луча, распространяющиеся во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль плеч интерферометра l_1 и l_2. После отражения от зеркал M и N лучи вновь падают на полупрозрачную пластинку, от которой (частично) распро-

страняются по линии KC, интерферируя между собой вследствие наличия разности хода $2(l_1 - l_2)$ и направляются в зрительную трубу. На пути луча, отраженного от полупрозрачной пластинки A помещают прозрачную пластинку B, сходную с пластинкой A, но не покрытую серебром. Пластинка B является компенсатором, так как при ее отсутствии луч, падающий на зеркало N, прошел бы слой стекла один раз, а луч, падающий на зеркало M — три раза. В зрительную трубу наблюдаются полосы (части колец) равного наклона. Перемещение зеркала N микрометрическим винтом вдоль луча приводит к перемещению полос. При этом сдвиг зеркала на $\frac{\lambda}{2}$ меняет разность хода на λ и изменяет картину на одну полосу.

Интерферометр акад. В. А. Линника предназначен для исследования качества обработки поверхностей. Микроинтерферометр (рис. 152) помещается между объективом и окуляром микроскопа, причем роль полупрозрачной пластинки A и компенсатора B в интерферометре Майкельсона здесь играет стеклянный кубик из двух призм, составленных диагональными гранями, одна из которых покрыта полупрозрачным слоем серебра.

Зеркало M с направлением падающих на него лучей образует угол, незначительно отличающийся от 90°. Поэтому плоскость мнимого изображения зеркала M (референтная плоскость M_1) и исследуемая поверхность L образуют тонкий клин. В поле зрения микроскопа наблюдаются интерференционные полосы, параллельные ребру клина. Наличие бугров или впадин в исследуемой поверхности приводит к искривлению полос.

§ 12. Дифракция света

Принцип Гюйгенса — Френеля. Принцип Гюйгенса позволяет решать задачи о распространении волнового фронта, но не отвечает на вопрос об интенсивности волн, идущих по разным направлениям.

Френель предположил, что огибающая поверхность вторичных волн есть поверхность, где благодаря взаимной интерференции элементарных вторичных волн результирующая волна имеет максимальную интенсивность.

Принцип Гюйгенса — Френеля. Если имеется точечный источник волн, окруженный мысленно произвольной замкнутой поверхностью, то правильное значение амплитуды (интенсивности) волны за пределами этой поверхности получится, если точечный источник заменить распределенными по поверхности вспомогательными источниками. Каждая точка поверхности рассматривается как источник волн, амплитуда и фаза которого равны амплитуде и фазе колебания, пришедшего в эту точку с волной от основного источника. Действие волны в любой точке вне поверхности определяется результатом интерференции волн от источников, распределенных по поверхности.

Очевидно, все вспомогательные источники когерентны. Поскольку выбор поверхности произволен, ее для каждой конкретной задачи выбирают наиудобнейшим способом. Если на пути волны встречается непрозрачная преграда, в ее точках амплитуды вспомогательных источников полагаются равными нулю.

Дифракцией света называется явление отклонения света от прямолинейного распространения, когда свет, огибая препятствие, заходит в область геометрической тени.

Метод зон Френеля. Распределение интенсивности света в дифракционной картине производится на основе принципа Гюйгенса — Френеля посредством метода зон Френеля.

Для выяснения действия световой волны, распространяющейся от источника S, в точке O рассматривается волновая поверхность S' (поверхность фронта сферической волны, идущей из точки S) и действие источника света S заменяется действием вспомогательных источников, расположенных

на поверхности S'. Поверхность S' разбивается на кольцевые зоны Френеля таким образом, чтобы расстояния от границ зоны до точки O отличались на $\frac{\lambda}{2}$ (рис. 153), т. е. чтобы $M_1O - M_0O = M_2O - M_1O = M_3O - M_2O = \ldots = \frac{\lambda}{2}$.

Если расстояние от волновой поверхности S' до точки O равно r_0, то для построения зон проводятся сферы радиусом

$$r_k = r_0 + k\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

с центром в точке O, причем пересечение этих сфер с волновой поверхностью S' определяет границы зон Френеля, выделяемых на этой поверхности.

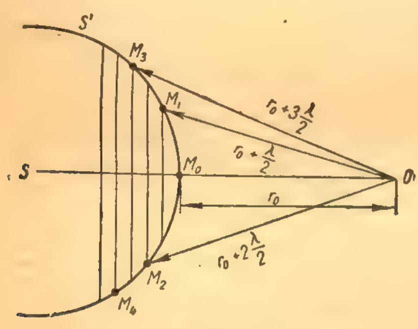


Рис. 153

Радиус k-ой зоны Френеля ρ_k определяется из условия

$$\rho_k^2 = \frac{r_0 R}{r_0 + R} k\lambda;$$



Рис. 154

площадь k-ой зоны Френеля

$$S_k = \frac{\pi r_0 R}{r_0 + R} \lambda.$$

Таким образом, поверхность фронта волны разбивается на равновеликие зоны Френеля.

Окончательный результат получается сложением действий каждой зоны Френеля в точке O, причем учитывается, что:

1) действия соседних зон ослабляют друг друга, так как эти зоны посылают в точку O колебания в противоположных фазах;

2) действие зоны уменьшается с увеличением угла между нормалью к поверхности зоны и направлением на точку O.

Поэтому амплитуды колебаний a_1, a_2, a_3, ..., создаваемые центральной (первой), второй и т. д. зонами в точке, связаны неравенствами $a_1 > a_2 > \gg a_3 > \ldots$.

Прямолинейное распространение света. Амплитуда полного светового колебания, приходящего в точку O, равна:

$$a = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots,$$

или

$$a = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \ldots.$$

Так как амплитуды соседних зон близки, можно считать, что

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},$$

но тогда все выражения к скобках равны нулю.

Действие всей открытой волновой поверхности равно половине действия центральной зоны Френеля:

$$a = \frac{a_1}{2}.$$

Из рассмотрения следует, что хотя свет от каждой точки фронта волны S' идет во все стороны, но вследствие интерференции в точку O свет идет как бы внутри узкого канала, диаметр которого меньше радиуса первой зоны Френеля ρ_1. Если $\lambda = 500$ $m\mu$, $R = r_0 = 1$ *м*, то $\rho_1 = 0{,}05$ *см*, т. е. можно считать, что свет распространяется от точки S в точку O прямолинейно.

З о н а л ь н а я п л а с т и н к а. Зональной пластинкой (рис. 154) называется экранчик, состоящий из чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, радиусы которых совпадают с радиусами зон Френеля для каких-либо определенных значений R, r_0 и λ.

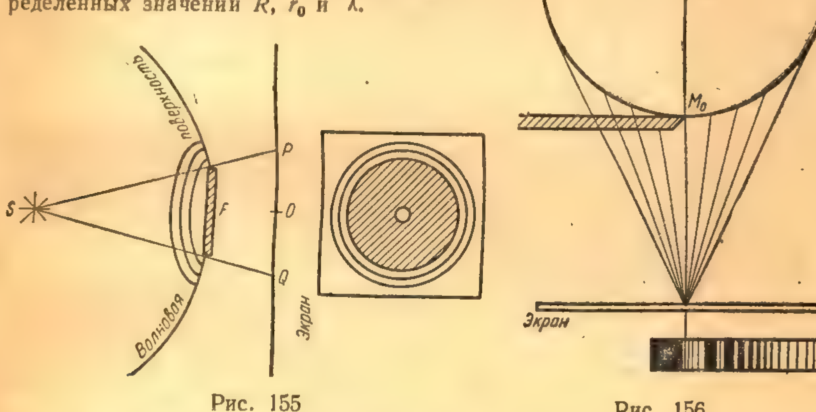


Рис. 155

Рис. 156

Если поместить зональную пластинку, на расстоянии R от точечного источника и на расстоянии r_0 от точки наблюдения O, то пластинка заслонит все четные зоны Френеля и оставит открытыми все нечетные. При этом амплитуда $a = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$, т. е. при наличии зональной пластинки интенсивность света в точке O больше, чем без нее. Опыт полностью подтверждает этот вывод.

Д и ф р а к ц и я о т к р у г л о г о э к р а н а. Построение зон Френеля для случая дифракции монохроматического света на малом круглом непрозрачном экране приводится на рис. 155. Область геометрической тени на экране есть круг с центром O и диаметром PQ. Точка O, лежащая в центре геометрической тени, окажется освещенной, так как общее действие незаслоненной экраном F волновой поверхности в точке O дает амплитуду, равную половине амплитуды, создаваемой в точке O от первой открытой зоны Френеля.

Область геометрической тени с центральным светлым пятнышком окружена чередующимися светлыми и темными кольцами.

Д и ф р а к ц и я н а п р я м о л и н е й н о м к р а е э к р а н а. При разбиении волновой поверхности на зоны Френеля для случая дифракции на прямолинейном крае экрана (рис. 156) удобно воспользоваться не кольцевыми, а прямоугольными зонами Френеля, проведя через точку наблюдения O и каждую из точек M_0, M_1, M_2 и т. д. плоскости параллельно ребру экрана, т. е. перпендикулярно плоскости чертежа. Расстояния M_0M_1, M_1M_2 и т. д., а следовательно, и площади зон Френеля относятся как $1 : 0{,}41 : 0{,}31 : 0{,}27 : 0{,}23 : 0{,}22 : 0{,}20 : 0{,}18 : 0{,}17$ и т. д.

Дифракция от круглого отверстия. При падении монохроматического света длина волны от точечного источника S на круглое малое отверстие в непрозрачной преграде действие световой волны в точке O экрана, расположенного на расстоянии r_0 от отверстия, находится построением зон Френеля, как показано на рис. 157. Если отверстие оставляет открытыми две, четыре или вообще четное число зон, то точка O будет темной, так как колебания от соседних зон приходят в противоположной фазе и взаимно уничтожаются. Если отверстие оставляет открытой одну первую зону, то точка O окажется освещенной более ярко, чем если бы волновая поверхность была открыта целиком. Это же имеет место, если открыто нечетное число зон Френеля.

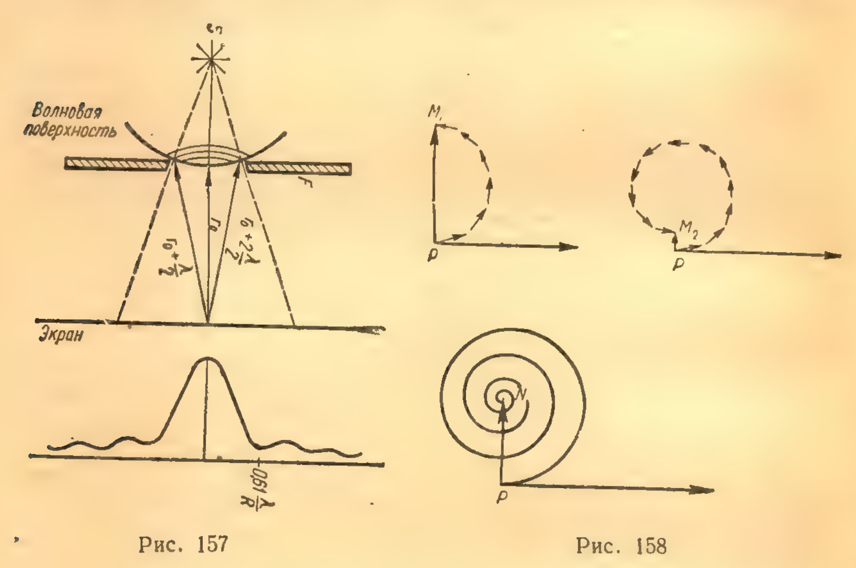


Рис. 157 Рис. 158

При построении зон Френеля не для точки O, лежащей на экране против центра отверстия, а для какой-либо другой точки экрана O_1, отверстие оставит открытыми иное число зон Френеля. Поэтому в случае, если точка O освещена, вокруг нее на экране наблюдается темное кольцо, затем светлое и т. д. Если же точка O является темной, она окружена светлым кольцом, затем темным и т. д.

Таким образом, при дифракции от малого круглого отверстия на экране наблюдается чередование светлых и темных колец.

Графическое решение дифракционных задач. Для графического изображения амплитуды от целой кольцевой зоны Френеля эту зону разбивают на малые участки, в пределах каждого из которых фазу колебания считают постоянной, а при переходе от одного участка к другому считают, что фаза меняется скачком.

Векторная диаграмма, изображающая действие целой зоны, представится ломаной PM_1 или вектором PM_1, ее замыкающим (рис. 158). Действие двух соседних зон Френеля изобразится аналогично вектором PM_2. Амплитуда, создаваемая открытой целиком волновой поверхностью, определится вектором PN, т. е. , очевидно, равна половине амплитуды, создаваемой одной центральной зоной.

В случае дифракции на прямолинейном крае экрана векторная диаграмма для нахождения амплитуд носит название спирали Корню (рис. 159).

Две ветви спирали соответствуют двум частям волновой поверхности, лежащим слева и справа от точки M_0 (рис. 156). Амплитуда колебания, обусловленная какой-либо частью волновой поверхности, выражается вектором, замыкающим участок спирали, соответствующий этой части волнового фронта. Например, амплитуда от всей волны (без экрана) выражается вектором F_+F_-, соединяющим концы спирали. Амплитуда в точке на границе геометрической тени определяется вектором OF_+. Так как $OF_+ = \frac{F_+F_-}{2}$, то освещенность (пропорциональная квадрату амплитуды) в точке B равна четвертой доле освещенности, наблюдаемой в отсутствие экрана. Аналогично, следуя по спирали от O в направлении к F_-, найдем, что амплитуда определяется векторами F_+B_1, F_+B_2, F_+B_3, и т. д., т. е. амплитуда (и следовательно, освещенность) проходит через ряд максимумов, и минимумов, лежащих на чертеже справа от точки B (границы геометрической тени).

Таким образом, при дифракции на прямолинейном крае экрана в области рядом с областью геометрической тени наблюдается чередование светлых и темных полос, параллельных краю экрана.

Дифракция света на узкой щели. Если на узкую щель шириной b падает нормально к поверхности щели плоская световая волна, то фокусируя при помощи линзы на экране свет, прошедший через щель, будем наблюдать чередование максимумов и минимумов освещенности.

Наличие максимумов и минимумов объясняется интерференцией испытавших дифракцию волн, идущих от разных точек щели в различных направлениях.

Если φ — угол между направлением падения лучей на щель и рассматриваемым направлением (рис. 160), то условием минимума освещенности является выражение:

$$b \sin \varphi = k\lambda, \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

а условием максимума освещенности — выражение

$$b \sin \varphi = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Дифракционная решетка и ее применение. Дифракционной решеткой называется совокупность многих щелей, разделенных непрозрачными промежутками. Общая ширина щели и непрозрачного промежутка называется постоянной, или периодом решетки d (рис. 161). Если на решетку нормально к ее поверхности падает свет с длиной волны λ, то, как следует из рисунка, лучи, идущие под углом φ к первоначальному направлению от соответствующих мест каждой из щелей, обладают разностями хода $d \sin \varphi$ (I и II лучи), $2d \sin \varphi$ (I и III лучи) и т. д.

Волны усиливают друг друга при интерференции, если эта разность хода равна целому числу волн.

Формула максимумов от дифракционной решетки:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Целое число k называется порядком максимума. Если на решетку падает свет разных длин волн, максимумы для различных длин волн располагаются под различными углами φ к первоначальному направлению распространения света. Поэтому дифракционная решетка разлагает немонохроматический свет в дифракционный спектр и употребляется как дисперсионный прибор.

Разрешающая сила объектива. Если на объектив падает свет от двух удаленных точечных источников (например, звезд), то вследствие дифракции световых волн на краях диафрагмы, ограничивающей отверстие объектива, наблюдатель увидит не две точки, а центральные мак-

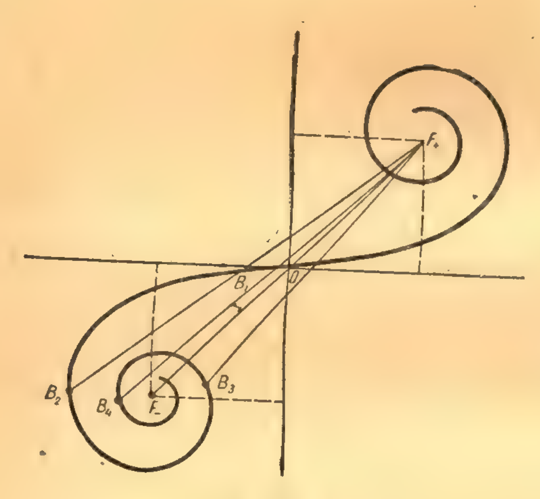


Рис. 159

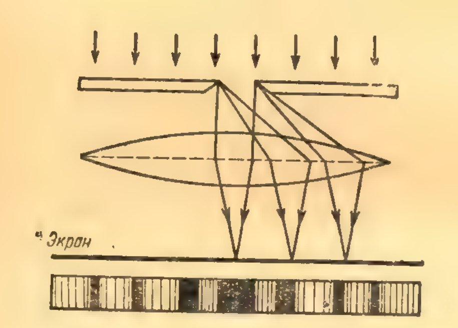


Рис. 160

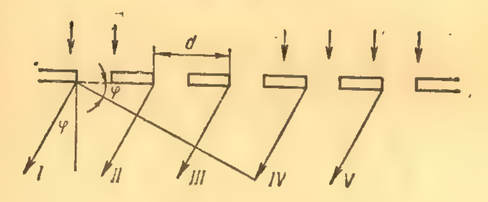


Рис. 161

симумы, окруженные светлыми и темными кольцевыми дифракционными максимумами и минимумами.

При близком расположении центров система перекрывающихся колец не дает возможности разделить (разрешить) две светящиеся точки. Критерий предела разрешения несколько условен.

За предел разрешения согласно Релею принимается такое положение, когда первое темное кольцо одного кружка проходит через светлый центр другого.

При этом угловой радиус первого темного кольца φ равен угловому расстоянию между источниками света ψ.

Радиус первого темного кольца определяется направлением, образующим угол φ с направлением на источник света, причем

$$d \sin \varphi = 1{,}22\,\lambda,$$

где d — диаметр объектива,

λ — длина волны света.

Соотношение следует из рассмотрения дифракции на круглом отверстии объектива.

Разрешаемое угловое расстояние ψ определяется условием:

$$\sin \psi = \sin \varphi = 1{,}22 \frac{\lambda}{d} = 0{,}61 \frac{\lambda}{R},$$

где R — радиус объектива.

Так как угол ψ мал, то можно принять:

$$\psi \cong 1{,}22 \frac{\lambda}{d} = 0{,}61 \frac{\lambda}{R}.$$

Величина A, обратная предельному разрешаемому угловому расстоянию ψ, называется разрешающей силой объектива:

$$A = \frac{1}{\psi} \approx \frac{d}{1{,}22\lambda} = \frac{R}{0{,}61\lambda}.$$

Светящийся предмет, угловые размеры которого меньше ψ, представляется наблюдателю точечным.

Разрешающая сила (способность) прибора тем больше, чем больше его диаметр (радиус) и меньше длина волны, с которой работает прибор.

В частности, поскольку длина волны де Бройля для электрона: $\lambda = \frac{h}{mv}$, где m — масса электрона, а v — его скорость, значительно (в $\sim 10^4$ раз) меньше длины волны видимого света, разрешающая способность электронного микроскопа, хотя апертура у него мала, значительно превосходит разрешающую способность обычного микроскопа. В электронном микроскопе различимы объекты размерами в несколько ангстрем.

Дифракция на многомерных структурах. Если плоская световая волна распространяется в среде, в которой имеются местные неоднородности, участки, коэффициент преломления которых отличается по величине от коэффициента преломления соседних участков, причем линейные размеры таких неоднородностей сравнимы с длиной световой волны, то на таких неоднородностях наблюдаются дифракционные явления, свет отклоняется от первоначального направления.

Дифракция на пространственных неоднородностях играет важную роль в метеорологической оптике. Дифракция на капельках дождя приводит к образованию радуги. Дифракция на мелких ледяных кристаллах, взвешенных в воздухе, вызывает возникновение кругов (гало) вокруг Солнца и Луны. Дифракция на капельках тумана ведет к образованию венцов около Солнца и Луны.

Если число неоднородностей громадно, а размеры незначительны, то дифракция проявляет себя в рассеянии света. «Молекулярная мутность» для коротких волн, длины которых сравнимы с размерами частиц среды, вызвана не ее загрязнением, а молекулярным строением. Для более длинных волн помутнение среды связано с дифракцией не на отдельных частицах, а на скоплениях значительного числа молекул, возникающих при их тепловом движении.

Критическое состояние вещества характеризуется резкими флуктуациями плотности, поэтому в критическом состоянии среда резко мутнеет (критическая опалесценция).

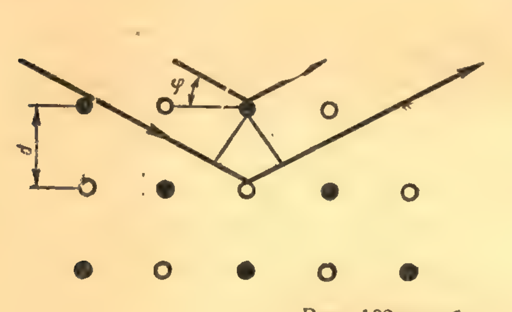
Дифракция света на ультразвуковых волнах в жидкости является важным методом молекулярной физики.

§ 13. Дифракция рентгеновых лучей. Формула Вульфа — Брэгга

Длины волн рентгеновых лучей сравнимы с размерами атомов, поэтому рентгеновы лучи испытывают дифракцию на кристаллах. Кристаллическая решетка атомов или ионов представляет собой для рентгеновых лучей пространственную дифракционную решетку.

Если пучок параллельных рентгеновых лучей падает под углом φ к атомной плоскости на кристалл (рис. 162, *а*) и лучи испытывают отражение от ряда атомных плоскостей кристалла, то между лучами, отраженными от соседних слоев атомов (или ионов) кристалла имеется разность хода $2d \sin \varphi$, где d — расстояние между слоями атомов (или ионов) в кристалле.

Максимум интенсивности дифрагировавших лучей соответствует таким углам φ, для которых разность хода равна целому числу длин волн:



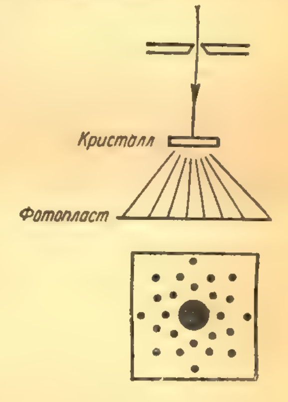


Рис. 162 а и б

$$2d \sin \varphi = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Эта формула получена в 1913 г. русским ученым Г. В. Вульфом и независимо от него английским ученым Брэггом и носит название формулы Вульфа — Брэгга.

Если на кристалл падает пучок лучей с длинами волн в широком интервале, то по определенным направлениям наблюдаются максимумы определенных длин волн.

Если падающий пучок является монохроматическим, то максимумы наблюдаются лишь при вполне определенных углах падения, определяемых формулой Вульфа — Брэгга.

Исследование структуры кристаллов. Дифракция рентгеновых лучей на кристаллах используется для исследования кристаллических структур.

Метод Лауэ (рис. 162, *б*). В методе Лауэ на кристалл пускают узкий пучок рентгеновых лучей. На фотопластинке получается рентгенограмма кристалла, состоящая из центрального пятна и пятен, соответствующих максимумам интенсивности лучей определенных длин волн, испытавших дифракцию.

Если направление падающего пучка совпадает с направлением оси симметрии кристалла, рентгенограмма симметрична относительно центрального пятна. Метод применяется для определения осей симметрии кристалла.

Метод Вульфа — Брэггов (рис. 162, *в*). В методе, примененном У. Г. и У. Л. Брэггами, кристалл, на который падает пучок рентгеновых лучей определенной длины волны (характеристического излучения), вращается. Когда угол между атомной плоскостью кристалла и пучком удовлетворяет условию Вульфа — Брэгга, лучи, отраженные кристаллом, увеличивают интенсивность (максимум).

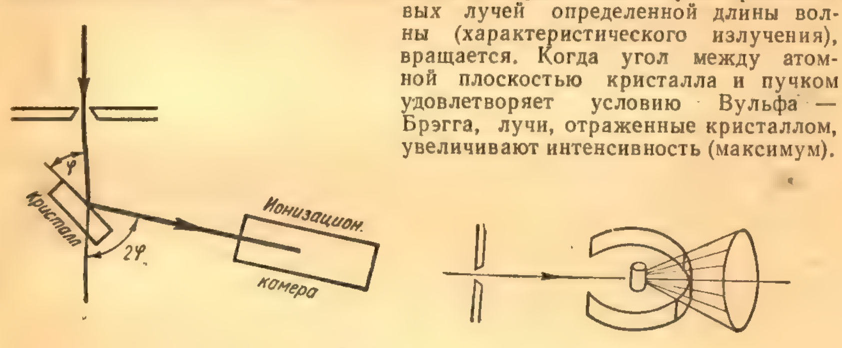


Рис. 162 *в*, *г*

Возрастание интенсивности фиксируется по увеличению ионизационного тока в ионизационной камере.

Метод Дебая (рис. 162, *г*). Этот метод применяется для исследования кристаллических порошков. В порошках всегда найдутся мелкие кристаллы, находящиеся относительно узкого пучка лучей в положении, удовлетворяющем условию Вульфа — Брэгга. Лучи, рассеянные этими кристаллами, дадут конус с осью, совпадающей с направлением первичного пучка рентгеновых лучей. Если длина волны характеристического излучения, падающего на порошок, известна, то положение максимумов на цилиндрической рентгенограмме позволяет судить о строении кристаллов порошка.

§ 14. Поляризация света

Естественный свет и поляризованный свет. Луч света, в котором колебания электрического (**E**) и магнитного (**H**) векторов происходят во вполне определенных взаимно перпендикулярных плоскостях, называется плоско поляризованным. Плоскость, в которой происходят колебания вектора напряженности электрического поля **E**, называется плоскостью колебаний. Плоскость, в которой меняется магнитный вектор **H**, называется плоскостью поляризации (рис. 163).

В источнике света даже весьма малых размеров элементарные процессы излучения света атомами происходят независимым образом, поэтому «оси» микроскопических вибраторов ориентированы хаотически и обычный свет является неполяризованным.

В естественном свете, идущим от любого источника, колебания электрического и магнитного векторов происходят поэтому одинаковым образом по

всех плоскостях, пересекающихся по прямой, совпадающей с направлением луча света.

Отражение света от диэлектриков. Отраженный луч получается поляризованным в плоскости падения (т. е. колебания электрического вектора в отраженном луче происходят в направлении, перпендикулярном плоскости падения).

Коэффициенты отражения S_1 для лучей, поляризованных в плоскости падения, и S_2 для лучей, поляризованных в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения, определяются формулами Френеля:

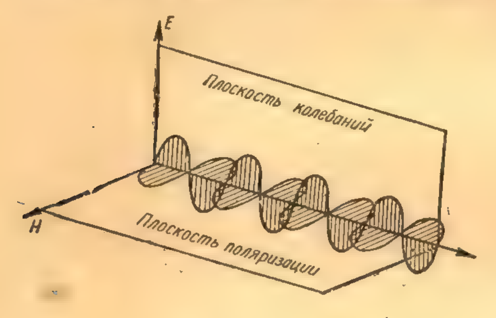


Рис. 163

$$S_1 = \frac{\sin^2(i_{\text{пад}} - i_{\text{прел}})}{\sin^2(i_{\text{пад}} + i_{\text{прел}})};$$

$$S_2 = \frac{\operatorname{tg}^2(i_{\text{пад}} - i_{\text{прел}})}{\operatorname{tg}^2(i_{\text{пад}} + i_{\text{прел}})},$$

где $i_{\text{пад}}$ — угол падения;

$i_{\text{прел}}$ — угол преломления.

Согласно формулам Френеля, при падении естественного света под углом Брюстера на стекло с коэффициентом преломления $n = 1,54$ отражается 16,5% энергии колебаний, перпендикулярных плоскости падения, и 0% энергии колебаний в плоскости падения. Преломляется 100% энергии колебаний в плоскости падения и 83,5% энергии колебаний, перпендикулярных плоскости падения.

Поляризация. Поляризацией света называется выделение из пучка естественного света лучей, поляризованных в определенной плоскости.

Поляризация света наблюдается при отражении и преломлении естественного света, а также при пропускании его через анизотропные среды, неодинаково пропускающие лучи, колебания в которых осуществляются в разных плоскостях (поляризаторы).

Поляризация при отражении и преломлении от диэлектрика. Луч отраженный будет полностью поляризован, если тангенс угла падения равен относительному коэффициенту преломления среды, от границы которой происходит отражение:

$$\operatorname{tg} i = n_{2,1}.$$

Этот закон носит название закона Брюстера, угол i — угол Брюстера (Давид Брюстер, 1781—1868).

При падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол.

Закон Брюстера справедлив при отражении от диэлектриков и неприменим к отражению от металлов.

Поляризационная стопа. Если вместо одной прозрачной пластинки взять стопу из нескольких пластинок и бросить на нее естественный луч под углом Брюстера, то доля света, поляризованного в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения, возрастает в прямолинейном луче по мере увеличения числа пластинок m.

Отношение энергии колебаний, перпендикулярных плоскости падения, к энергии колебаний, лежащих в этой плоскости, равно $0,835^m$. При большом m преломленный луч практически полностью поляризован.

Двойное лучепреломление. При падении луча естественного света на кристалл исландского шпата имеет место двойное луче-

преломление. Луч делится на два луча, один из которых называется обыкновенным, другой — необыкновенным. Обыкновенный луч подчиняется закону преломления при входе и выходе из кристалла. Для него коэффициент преломления в исландском шпате $n_0 = 1,659$.

Коэффициент преломления для необыкновенного луча n_e непостоянен и зависит от его направления.

Кристалл исландского шпата представляет собой ромбоэдр. Прямая, проходящая через вершины телесных углов, образованных тупыми углами, называется кристаллографической осью кристалла. Любая прямая, параллельная ей, называется о п т и ч е с к о й о с ь ю кристалла. Сечение, проходящее через оптическую ось и нормаль к поверхности кристалла, называется г л а в н ы м с е ч е н и е м кристалла.

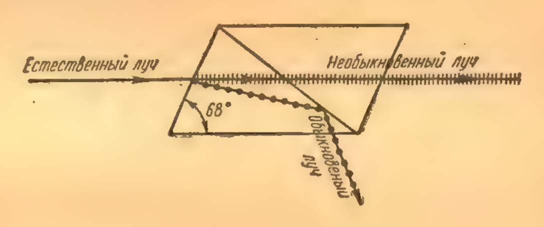


Рис. 164

Коэффициент преломления для необыкновенного луча n_e, в исландском шпате колеблется от 1,659 (в направлении оптической оси) до 1,486 (в направлении, перпендикулярном оптической оси). Если плоскость падения луча не совпадает с главным сечением кристалла, то необыкновенный луч при преломлении выходит из плоскости падения, приближаясь к главному сечению. В частности, если естественный луч падает нормально к поверхности кристалла, он раздваивается, так как обыкновенный луч проходит кристалл не отклоняясь, а необыкновенный — отклоняется от плоскости падения. Обыкновенный и необыкновенный лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях.

П о л я р и з а ц и о н н а я п р и з м а Н и к о л я. Чтобы отделить друг от друга обыкновенный и необыкновенный лучи используется призма Николя или просто «николь».

Призма Николя состоит из двух частей кристалла исландского шпата, распиленного и склеенного затем «канадским бальзамом» — смолой канадской сосны.

Естественный луч делится, входя в призму Николя, на обыкновенный и необыкновенный (рис. 164). Первый из них испытывает полное внутреннее отражение на слое канадского бальзама, так как его коэффициент преломления (1,659) больше коэффициента преломления канадского бальзама (1,549), а угол падения луча на границу подобран посредством распила так, чтобы оказаться больше предельного угла, после которого начинается полное внутреннее отражение.

Необыкновенный луч проходит слой канадского бальзама, не испытывая полного внутреннего отражения, так как для него в данном направлении распространения коэффициент преломления (1,515) меньше коэффициента преломления канадского бальзама.

П о л я р и з а т о р и а н а л и з а т о р. Призма Николя, используемая как поляризатор, выделяет из луча естественного света луч поляризованный. Призма Николя, используемая для определения плоскости поляризации поляризованного света, называется а н а л и з а т о р о м.

Две последовательно расположенные призмы Николя не пропускают свет, если они скрещены, т. е. их главные сечения перпендикулярны.

Закон Малю. Интенсивность света, прошедшего анализатор, пропорциональна квадрату косинуса угла φ между главными сечениями анализатора и поляризатора:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi.$$

Поляроиды. В кристаллах турмалина также наблюдается двоякое лучепреломление, однако, поглощение для обыкновенного луча весьма велико и практически из пластинки турмалина толщиной в 1 *мм* выходит лишь плоскополяризованный необыкновенный луч.

Поскольку поглощение зависит от длины волны, кристалл турмалина по разным направлениям кажется различно окрашенным. Это явление называется дихроизм (двуцветность) и было открыто для турмалина Био и Зеебеком в 1916 г.

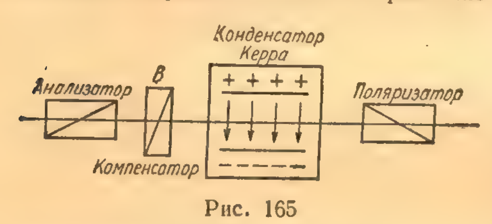


Рис. 165

Поляроид представляет собой пленку дихроичного вещества герапатита (сернокислого йод-хинина), полученного в 1852 г. Герапатом.

Кристаллик герапатита толщиной порядка 0,1 *мм* практически целиком поляризует естественный свет. В целлулоидную основу поляроида вносится множество ориентированных кристалликов герапатита.

Интерференция поляризованного света. Эллиптическая и круговая поляризация. Опыты Араго и Френеля в 1916 г. показали, что, осуществив наложение лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, нельзя наблюдать интерференционную картину максимумов и минимумов. Если один из николей повернуть на 90°, т. е. обеспечить поляризацию обоих лучей в одной плоскости, интерференционная картина будет наблюдаться.

Отсутствие интерференционной картины в первом случае не означает отсутствия взаимодействия лучей. В этом случае результирующий электрический вектор **E** (или магнитный **H**) складывается из векторов, колеблющихся во взаимно перпендикулярных направлениях и все результаты сложения взаимно перпендикулярных колебаний одного периода переносятся на этот случай. В результате сложения двух лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, получается эллиптически поляризованный свет, в котором концы векторов **E** и **H** описывают эллипсы с той же частотой, с какой совершаются исходные колебания.

В частности, если разность хода плоскополяризованных лучей составляет четверть волны и амплитуды колебаний в них одинаковы, то эллипс обращается в круг и в результате возникает свет, поляризованный по кругу.

Оптическая анизотропия. Под действием электрического поля оптические свойства вещества становятся подобными свойствам одноосного кристалла с оптической осью, направленной по вектору электрической напряженности.

Эффект Керра. В 1875 г. И. Керр обнаружил возникновение анизотропии жидких диэлектриков под действием электрического поля.

Конденсатор с жидкостью помещается между двумя скрещенными николями N_1 и N_2 (рис. 165). Главные плоскости николей образуют с направлением напряженности E угол, равный 45°. В отсутствии поля система не пропускает свет. При наличии поля свет, выходящий из конденсатора Керра K, является эллиптически поляризованным. Поляризация исследуется при помощи компенсатора B.

Для монохроматического света длины волны λ разность коэффициентов преломления необыкновенного и обыкновенного лучей $n_o - n_e$ пропорциональна E^2:

$$n_o - n_e = kE^2.$$

Поэтому разность хода, приобретаемая лучами на пути l, выраженная в длинах волн, следующая:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{l(n_o - n_e)}{\lambda} = BlE^2,$$

где $B = \frac{k}{\lambda}$ — постоянная Керра.

Вещество	Постоянная Керра B
Нитробензол	$2 \cdot 10^{-5}$ CGSE
Хлорбензол	10^{-6} »
Вода	$5 \cdot 10^{-7}$ »
Сероуглерод жидк. . .	$3{,}5 \cdot 10^{-7}$ »
Бензол	$0{,}5 \cdot 10^{-7}$ »
Пары сероуглерода ($p = 900$ *мм рт. ст.*, $t = 57°$ C)	$3{,}6 \cdot 10^{-10}$ »
Пары нитробензола . .	$2{,}7 \cdot 10^{-9}$ »
Азот	$0{,}4 \cdot 10^{-10}$ »

Явление Керра объясняется поляризацией диэлектрика. Молекулы ориентируются в определенном направлении. Это приводит к тому, что диэлектрическая постоянная вдоль направления поля (OX) отличается от диэлектрической постоянной в перпендикулярных этому направлениях. Эллипсоид диэлектрической постоянной есть эллипсоид вращения со значениями ε по главным направлениям:

$$\varepsilon_x \text{ и } \varepsilon_y = \varepsilon_z.$$

Время исчезновения анизотропии после исчезновения поля составляет десятимиллиардную долю секунды.

Если питать конденсатор Керра напряжением высокой частоты, установка превращается в оптический затвор, позволяющий осуществлять до миллиарда прерываний света в секунду. Конденсатор Керра используется в методе Бергштранда определения скорости света (см. стр. 263), для модулирования силы света при записи на пленку в звуковом кино, фототелеграфе и др.

В р а щ е н и е п л о с к о с т и п о л я р и з а ц и и. Некоторые вещества (кристаллы и растворы) обладают способностью поворачивать плоскость поляризации луча, проходящего через них.

В зависимости от того, в каком направлении (со стороны наблюдателя) происходит поворот плоскости поляризации в данном оптически активном веществе, оно называется правовращающим или левовращающим. Имеются левовращающие и правовращающие кристаллы кварца, растворы свекловичного и тростникового сахара являются правовращающими, а раствор фруктового — левовращающим.

Угол поворота плоскости поляризации пропорционален толщине пластинки, а при прохождении стопы пластинок равен алгебраической сумме углов поворота в каждой из них. Угол поворота плоскости поляризации приблизительно пропорционален квадрату длины волны света.

Для растворов угол поворота плоскости поляризации (при постоянной длине кюветы) прямо пропорционален концентрации оптически активного

вещества в растворе. Это используется в приборах, измеряющих концентрацию сахара в растворе (сахариметрах).

Вращение плоскости поляризации было объяснено Френелем. Плоскополяризованный луч, входя в вещество, распадается на два луча, поляризованных по кругу во взаимно противоположных направлениях, а по выходе из вещества эти лучи вновь дают плоскополяризованный свет.

В оптически активных веществах скорость распространения лучей, поляризованных по кругу в различных направлениях, различна. Поэтому плоскость поляризации выходящего луча оказывается повернутой по отношению к плоскости входящего луча.

Вращательная способность

(концентрация p — в граммах вещества на 100 $см^3$ раствора)

Вещество	Растворитель	Удельная вращательная способность, градусы	p
Сахароза (тростниковый сахар)	Вода	$66,473 + 0,0127\,p - 0,000377\,p^2$	0—50
Декстроза (глюкоза)	»	$52,50 + 0,0188\,p + 0,000517\,p^2$	0—35
Инвертный сахар	»	$-19,447 - 0,0607\,p + 0,000221\,p^2$	10—65
Виннокаменная кислота . . .	»	$14,83 - 0,146\,p$	0—50
Скипидар	»	-37	—
Камфара	Спирт	$40,9 + 0,135\,p$	10—50

Вращательная способность кварца (в °/мм) при температуре 20° С:

λ	6563 Å	5893 Å	4861 Å	4340 Å
Вращение	17,320	21,724	32,761	41,924

(для λ = 5893 Å *при* повышении температуры *на* 1° С поправка положительна и равна 0,003).

Магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея)

Приведены значения вращения в угловых минутах на 1 *см* пути луча света в веществе на 1 *э* напряженности магнитного поля при 20° С для λ = 5893 Å (*D* — линии Na):

Вода 0,01308
Спирт метиловый 0,0094
Спирт этиловый 0,01112
Бензин 0,0297
Сероуглерод 0,04226
Кварц (перпенд. оси) . 0,01664
Стекло (сверхплотный флинт) 0,088

Явление Фарадея. Явление, открытое Фарадеем, заключается в том, что многие вещества (стекло, сероуглерод и др.) начинают вращать плоскость поляризации, если параллельно лучу создано магнитное поле. Направление поворота зависит от направления поля. Угол поворота плоскости поляризации α:

$$\alpha = \left(\frac{A}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^4}\right) lH,$$

где A и B — постоянные для данного вещества величины,
l — длина пути луча в магнитном поле напряженности H,
λ — длина волны света.

Магнитное поле в данном случае изменяет различным образом ранее одинаковые скорости распространения в веществе лучей, поляризованных по кругу во взаимно противоположных направлениях.

§ 15. Дисперсия света

Дисперсией волн называется зависимость фазовой скорости распространения волны u от длины волны λ:

$$u = f(\lambda).$$

Среды, в которых эта зависимость имеет место, называются диспергирующими.

Если $\frac{du}{d\lambda} > 0$, т. е. волны большей длины распространяются с большей фазовой скоростью, дисперсия называется нормальной.

Если $\frac{du}{d\lambda} < 0$, т. е. волны большей длины распространяются с меньшей фазовой скоростью, дисперсия называется аномальной.

При $\frac{du}{d\lambda} = 0$, дисперсия отсутствует.

Дисперсия света. Поскольку абсолютный коэффициент преломления n среды есть отношение фазовой скорости света c в вакууме к фазовой скорости u в среде (см. стр. 254):

$$n = \frac{c}{u},$$

то при рассмотрении дисперсии света удобно исследовать зависимость коэффициента преломления n от длины волны λ:

$$n = f(\lambda).$$

Отсутствие дисперсии в вакууме. В предположении, что фазовые скорости световых волн для различных длин волн в вакууме различны, следовало ожидать изменения окраски одной из звезд в системе двойной звезды при ее затмении. Когда источник света (звезда) заслоняется другой звездой пары, цвет ее для земного наблюдателя должен был меняться от обычного к синему, так как при наличии нормальной дисперсии волны фиолетовой (коротковолновой) части спектра должны были бы значительно отстать от волн красной части спектра на громадном пути от звезды до Земли.

Наблюдения Араго над затменно-переменной звездой Альголь в созвездии Персея показали отсутствие такого эффекта. Следовательно, дисперсия электромагнитных волн в вакууме отсутствует.

Дисперсией вещества называется величина, определяющая скорость изменения коэффициента преломления с изменением длины волны:

$$v = \frac{dn}{d\lambda}.$$

Для всех прозрачных веществ коэффициент преломления n монотонно возрастает с уменьшением длины волны λ, т. е. фиолетовые лучи преломляются сильнее красных, что соответствует нормальной дисперсии.

Опыт Ньютона. В 1672 г. И. Ньютон, направляя узкий пучок белого света на грань призмы, получил на экране за призмой спектр, состоящий из непрерывно переходящих один в другой спектральных цветов (рис. 166).

Ньютон выделил семь основных цветов: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый.

Основы теории дисперсии. Дисперсия света в среде объясняется взаимодействием электромагнитной волны с электронами вещества.

Под действием падающей на вещество волны заряженные частицы приходят в вынужденные колебания с частотой падающей волны ω. При этом частицы испускают электромагнитные волны, складывающиеся с первичной

волной, что приводит к изменению фазы и амплитуды результирующей волны в сравнении с первичной.

Связь дисперсии с поглощением. Волны частот, совпадающих с собственными частотами $\omega_{01}, \omega_{02}, \ldots, \omega_{0n} \ldots$ колебаний заряженных частиц вещества, вызывают резонансные колебания этих частиц. Энергия электромагнитной волны переходит при этом в молекулярно-кинетическую энергию.

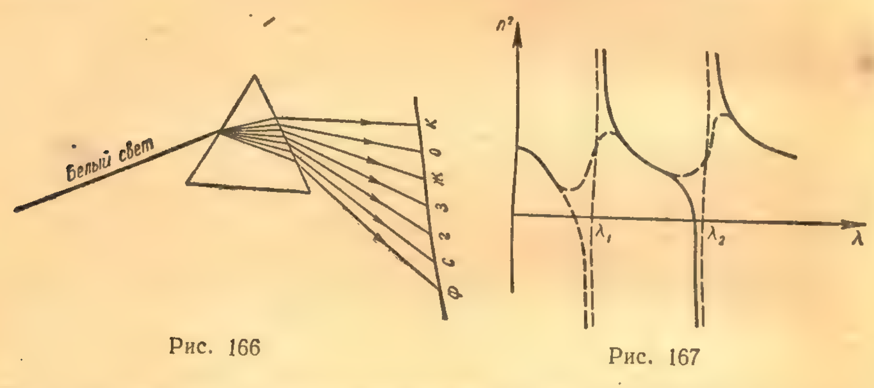


Рис. 166

Рис. 167

Волны указанных частот поэтому весьма сильно поглощаются средой. В спектре света, прошедшего среду, на местах, соответствующих волнам указанных частот, наблюдаются темные полосы поглощения.

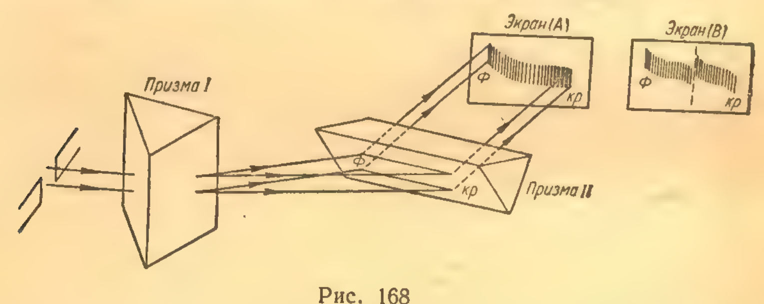


Рис. 168

Применение теории колебаний позволяет получить для коэффициента преломления n дисперсионную формулу:

$$n^2 \simeq 1 + \frac{k_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{k_2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \ldots,$$

где λ — длина первичной волны, а

λ_1, λ_2 и т. д. — длины волн, соответствующие резонансным колебаниям частиц вещества,

$k_1, k_2, \ldots$ — постоянные.

Выражаемая формулой зависимость представлена на рис. 167.

Аномальная дисперсия. Если учесть затухание колебаний, связанное с силами трения и проявляющееся при больших амплитудах колебаний заряженных частиц вещества, то зависимость коэффициента преломления от длины волны будет иметь вид, представленный на рис. 167.

Вблизи полос поглощения коэффициент поглощения растет с ростом длины волны λ (пунктирная часть кривой на рис. 167). Это соответствует случаю аномальной дисперсии.

Методы наблюдения дисперсии. Метод скрещенных призм (рис. 168). Как видно по рис. 168, призма *I* разлагает свет в горизонтальный спектр, а скрещенная с ней призма *II* смещает каждую из линий спектра по вертикали.

На экране *A* получается форма спектра, напоминающая график (рис. 167). Если призма *II* поглощает свет определенной частоты, то на экране *B* наблюдается аномальная дисперсия.

Метод Рождественского (рис. 169). Свет от дуги *S* проходит через интерферометр, составленный из двух полупрозрачных пластинок *A* и *B* зеркал *C* и *D* и двух трубок T_1 и T_2.

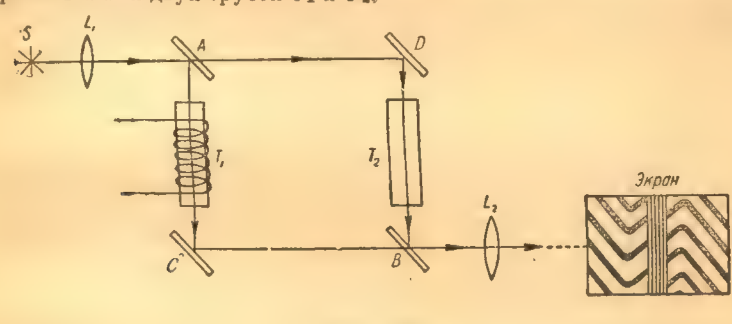


Рис. 169

Поворотом на малый угол одного из зеркал вносится разность хода лучей *I* и *II*, что приводит к появлению интерференционных полос в фокальной плоскости линзы L_2. В этом месте устанавливается щель спектрографа, перпендикулярная полосам, с дифракционной решеткой, штрихи которой параллельны щели. Дифракционная решетка отклоняет лучи большей длины волны на больший угол, вследствие чего полосы изгибаются.

Испаряя в трубке T_1 металлический натрий, Д. С. Рождественский изучил ход дисперсии вблизи полос поглощения по изгибу интерференционных полос в спектрографе, вызванному вносимой парами натрия дополнительной разностью хода. В ветвь T_2 интерферометра вносятся стеклянные пластинки разной толщины, что изменяет величину угла наклона полос интерференции.

§ 16. Поглощение света

Энергия электромагнитной волны в среде затрачивается частично на возбуждение колебаний электронов. Свободные электроны даже для тонкого слоя вещества поглощают всю энергию волны. Поэтому металлы непрозрачны для света. В диэлектриках поглощение света весьма мало.

Закон Бугера — Ламберта. Опыт показывает, что интенсивность пучка (плотность потока) параллельных лучей света *I* при прохождении слоя среды толщиной *x* меняется вследствие поглощения по экспоненциальному закону;

$$I = I_0 e^{-kx},$$

где I_0 — интенсивность волны при входе в среду, *k* — натуральный показатель поглощения и *e* — основание натуральных логарифмов.

Указанный закон был экспериментально установлен Бугером (1729) и теоретически выведен Ламбертом (1760).

§ 17. Спектры

С п л о ш н о й с п е к т р. Накаленные твердые и жидкие тела и газы при большом давлении испускают свет, при разложении которого получается сплошной спектр, в котором спектральные цвета непрерывно переходят один в другой.

Л и н е й ч а т ы й с п е к т р (а т о м н ы й). Атомы нагретых разреженных газов или паров испускают свет, разложение которого дает линейчатый спектр, состоящий из отдельных цветных линий. Каждый химический элемент имеет характерный для него линейчатый спектр (рис. 170).

Спектральные линии группируются в серии. В пределах серии линии сближаются при переходе к более коротким длинам волн и сливаются у некоторого предела.

М о л е к у л я р н ы й с п е к т р. Спектр молекулы состоит из большого числа отдельных линий, сливающихся в полосы, четкие с одного края и размытые с другого. Эти спектры называют п о л о с а т ы м и.

С п е к т р ы п о г л о щ е н и я. Если белый свет от источника, дающего сплошной спектр, пропускается через пары исследуемого вещества и затем разлагается в спектр, то на фоне сплошного спектра наблюдаются темные линии поглощения (фраунгоферовы линии) в тех же самых местах, где лежали бы линии спектра испускания паров исследуемого элемента (рис. 171). Следовательно, «атомы поглощают те же самые длины волн, которые испускают» — это закон Густава Роберта Кирхгофа (1824—1887) и Роберта Вильгельма Бунзена (1811—1899).

Спектры испускания

Приведены главные линии спектров испускания некоторых распространенных веществ. Длины волн выражены в ангстремах ($1 \mathring{A} = 10^{-8}$ *см*). Наиболее интенсивные линии набраны жирным шрифтом. Все длины волн даны для сухого воздуха при температуре 15° С и давлении 760 *мм рт. ст.* В качестве эталонной длины волны выбрана **красная линия кадмия λ 6438, 4696 Å.**

Возбуждение с помощью газового разряда

Гелий

7065,20	4120,820	**5769,60**
6678,149	**4026,192**	**5460,73**
5875,63	**3888,645**	4960,32
5015,678		4916,00

Водород

(спектр содержит много линий; здесь приведены):

H_α	**6562,784**
H_β	**4861,327**
H_γ	4340,466
H_δ	4101,736

Неон

7245,166	**5852,488**
7173,938	5400,562
6506,528	5358,02
6402,246	5341,096
6382,991	5330,779
6266,495	4788,93
6143,062	4715,34
5965,44	4708,86
5881,895	4704,39
	4575,86
	4537,76

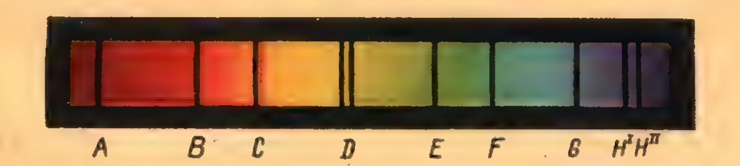
Ртуть

4921,926		**4358,34**
4713,147	10139,77	**4347,50**
4471,480	6907,52	**4339,23**
4387,930	6234,35	4077,82
4143,759	**5790,65**	4046,56

8000 7500 7000 6500 6000 5500 5000 4500 4000 Å

1 Натрий
2 Литий
3 Калий
4 Барий
5 Водород
6 Кислород
7 Азот
8 Ртуть
9 Гелий
10 Неон

8000 7500 7000 6500 6000 5500 5000 4500 4000



Кадмий			*Аргон*		
6438,4696	7067,218	**4702,317**	4335,35	4251,184	4164,180
5085,8230	6965,431	**4628,445**	**4333,561**	**4200,678**	**4158,591**
4799,9139	6752,831	**4596,096**	**4300,100**	**4198,316**	**4044,419**
4678,1504	6032,127	4522,325	**4272,169**	**4191,027**	**3848,980**
4662,3525	5650,708	4510,733	**4266,286**	4190,714	
	5495,875	**4345,168**	**4259,362**	4181,884	

Спектры пламени Основные линии

Хлористый натрий	*Хлористый стронций*
5895,932	Полосы в красном участке спектра
5889,965	6750—6230
	4607,342

Хлористый калий	*Хлористый литий*
7699,01	6707,843
7664,94	
4047,22	
4044,16	

Спектральный анализ. Исследование линейчатых спектров испускания и поглощения является весьма тонким методом спектрального анализа. Линии, присущие данному элементу, позволяют качественно судить о его наличии. Яркость спектральных линий позволяет количественно судить о наличии того или иного элемента.

§ 18. Тепловое излучение

Излучение, причиной которого является возбуждение атомов и молекул вещества вследствие их теплового движения, называется тепловым или температурным излучением.

Интенсивность излучения определяется мощностью, излучаемой с единицы поверхности тела. Энергетической светимостью или испускательной способностью тела $R_э$ называется величина, измеряемая потоком излучения $\Phi_э$ испускаемым единицей поверхности тела по всем направлениям, т. е. $R_э = \frac{\Phi_э}{S}$.

Часть потока излучения, заключенная в весьма узком спектральном интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, называется монохроматическим или точнее квазимонохроматическим потоком.

Распределение энергии в спектре излучения описывается спектральной плотностью энергетической светимости r. Спектральная плотность энергетической светимости измеряется мощностью $dR_э$, испускаемой в узком спектральном интервале $d\nu$ с единицы поверхности тела, т. е. $r_\nu = \frac{dR_э}{d\nu}$, поскольку частота $\nu = \frac{c}{\lambda}$, где λ — длина волны, а c — скорость света в вакууме; спектральная плотность энергетической светимости может быть задана как

$$r_\lambda = \frac{dR_э}{d\lambda}.$$

Спектральная плотность энергетической светимости зависит от температуры тела T и длины волны λ (или частоты ν). Если последняя функциональная зависимость известна, то энергетическая светимость может быть найдена т. е.

$$R_э = \int_0^\infty r_\lambda \, d\lambda, \quad \text{или} \quad R_э = \int_\infty^0 r_\nu \, d\nu.$$

Поглощательная способность. Абсолютно черное тело. Величина α, измеряемая отношением потока излучения $d\Phi'$, заключенного в узком спектральном интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, поглощаемого единицей поверхности тела, к потоку излучения $d\Phi$, падающему на единицу поверхности в этом же спектральном интервале, называется **коэффициентом монохроматического поглощения или поглощательной способностью тела**:

$$\alpha_{\lambda T} = \frac{d\Phi'}{d\Phi}.$$

Коэффициент монохроматического поглощения зависит от температуры тела T и длины волны λ (или частоты ν), т. е. $\alpha = \alpha_{T,\lambda}$, а также от природы тела.

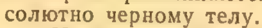
Тело, для которого коэффициент монохроматического поглощения равен 1, называется абсолютно черным телом. Согласно определению α, абсолютно черное тело поглощает все падающее на его поверхность излучение. Сажа и платиновая чернь приближаются по оптическим свойствам к аб-

солютно черному телу.


Рис. 172

Излучение абсолютно черного тела можно исследовать, наблюдая излучение отверстия в полой камере, нагретой до определенной температуры T (рис. 172). Попадающее в отверстие излучение после многократного отражения от внутренних стенок камеры полностью поглощается ими, т. е. поглощательная способность отверстия равна 1.

Изменяя нагрев камеры, можно изучить зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $r_0\lambda$ от температуры.

Закон Кирхгофа. Отношение спектральной плотности энергетической светимости любого тела $r_{\lambda T}$ к его коэффициенту монохроматического поглощения $\alpha_{\lambda T}$ одинаково для всех тел.

Так как для абсолютно черного тела $\alpha = 1$, то из закона Кирхгофа следует, что отношение $\frac{r_\lambda}{\alpha_\lambda}$ для всех тел равно спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $r_{0\lambda}$:

$$\frac{r_{\lambda, T}}{\alpha_{\lambda, T}} = r_{0\lambda, T} = f(\lambda, T).$$

Зная функциональную зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $r_{0\lambda, T}$ от длины волны λ и температуры T и определив опытным путем коэффициент поглощения рассматриваемого тела, можно найти спектральную плотность энергетической светимости для любого тела:

$$r_{\lambda, T} = \alpha_{\lambda, T} \cdot r_{0\lambda, T}.$$

Отражательная способность металлов

Приведены значения (в процентах) отраженной энергии при нормальном падении света на толстые слои металлов.

Длина волны, Å

	8000	7000	6000	5000	4000	3000
Серебро*	97	96	94	91	87	10*
Золото	95	92	84	47	28	32
Никель	70	69	65	61	53	44
Сталь	58	58	55	54	50	37
Платина	70	69	64	58	48	40
Медь	89	83	72	44	31	25
Спекулюм**	69	67	64	63	55	41

* Серебро в области 3160 Å имеет очень низкую отражательную способность.

** Зеркальная бронза.

Отражательная способность прозрачных веществ

(в воздухе, при нормальном падении света)

Показатель преломления	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
Отражательная способность, %	4,0	5,3	6,7	8,2	9,6	11,0	12,6	14,0	15,5	17,0	18,4

Вольфрам

Темпер., °K	Цветовая темпер., °K*	Средняя излуч. способность**	Полная излуч. способность***
2000	2030	0,446	0,264
2200	2238	0,443	0,285
2400	2447	0,440	0,304
2600	2660	0,437	0,320
2800***	2874	0,434	0,334
3000	3092	0,432	0,347

* Цветовая температура — температура абсолютно черного тела, излучение которого имеет тот же цвет, что и излучение вольфрама.

** Средняя излучательная способность — отношение яркостей вольфрамового источника света и абсолютно черного тела при одинаковой их температуре. Полная излучательная способность — отношение полных энергий излучения вольфрамового источника и абсолютного черного тела при одинаковой температуре.

*** 100-ваттная газовая лампа.

У л ь т р а ф и о л е т о в а я к а т а с т р о ф а. Многочисленные попытки получить теоретически закон излучения абсолютно черного тела на основе законов классической физики, предпринятые Вильгельмом Вином (1864—1928), Релеем (1842—1919) и Джемсом Хопвудом Джинсом (1877—1946) в конце XIX в., оказались неудачными.

Релей и Джинс получили формулу:

$$r_{0\nu,T} = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT.$$

(формула Релея — Джинса), которая совпадала с опытной зависимостью $r_{0\nu,T}$ от длины волны λ (или частоты ν), приведенной на рис. 173, в области больших длин волн.

При малых длинах волн, что соответствует ультрафиолетовому участку спектра, формула Релея — Джинса в резком отличии от эксперимента определяла увеличение $r_{0\lambda}$ до бесконечности.

Несоответствие между видом зависимости, полученной Релеем и Джинсом на основе классических законов, и опытной зависимостью $r_{0\lambda,T}$ от длины волны получило название «ультрафиолетовой катастрофы».

Формула излучения Планка. В 1900 г. немецкий физик Макс Планк (1858—1947) получил функцию распределения энергии в спектре абсолютно черного тела на основе чуждого классической физике предположения, что атомные осцилляторы излучают энергию только определенными порциями — квантами.

Энергия кванта ε пропорциональна частоте ν колебания:

$$\varepsilon = h\nu,$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек* — постоянная Планка.

Формула Планка для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $r_{0\lambda,T}$ имеет вид:

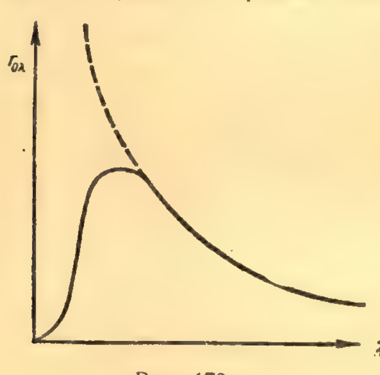


Рис. 173

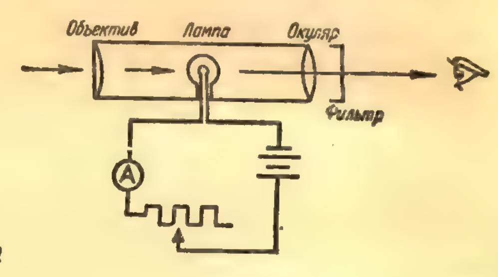


Рис. 174

$$r_{0\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1},$$

или

$$r_{0\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

где e — основание натуральных логарифмов, c — скорость света, k — постоянная Больцмана.

Зависимость спектральной плотности энергетической светимости $r_{0\lambda}$ от длины волны приводится на рис. 173.

Закон Стефана — Больцмана. Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры тела: $R_{0э} = \sigma T^4$.

Закон был установлен в 1879 г. Джозефом Стефаном (1835—1893) и в 1884 г. уточнен Людвигом Эдуардом Больцманом (1844—1906). Он следует из формулы Планка:

$$R_{0э} = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT}} - 1}\, d\lambda = \sigma T^4,$$

где

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-5} \frac{эрг}{см^2\, сек\, град^4}.$$

З а к о н с м е щ е н и я В и н а. Длина волны в спектре излучения абсолютно черного тела, соответствующая наибольшей спектральной плотности энергетической светимости $\lambda_{макс}$ обратно пропорциональна абсолютной температуре T тела:

$$\lambda_{макс} \cdot T = c, \quad c = 0{,}2896 \; см\; град.$$

Закон смещения может быть получен из формулы Планка, если взять производную $\frac{dr_{0\lambda}}{d\lambda}$ и, приравняв ее к 0, решить полученное трансцендентное уравнение.

Законы теплового излучения используются в оптических методах измерения высоких температур (оптическая пирометрия), при расчете энергии, передаваемой при помощи лучеиспускания, в теплотехнике, в устройстве тепловых источников света — ламп накаливания и дуговых ламп.

О п т и ч е с к и й п и р о м е т р с и с ч е з а ю щ е й н и т ь ю. Прибор (рис. 174) представляет собой зрительную трубу, в фокальной плоскости объектива которой помещена нить специальной лампы накаливания, питаемой от аккумулятора.

В цепь лампы включен реостат, позволяющий регулировать накал нити таким образом, чтобы она исчезла на фоне тела, температура которого измеряется. По силе тока в цепи лампы определяется температура нити, а стало быть и температура тела.

Если тело не является абсолютно черным, то температура его, измеренная при помощи данного пирометра, отличается от ее абсолютной температуры T и называется яркостной температурой тела. Его истинная температура всегда выше яркостной.

Температура тела, вычисленная на основе закона смещения Вина при помощи отношения спектральных плотностей яркости для двух различных длин волн, называется цветовой температурой.

Если распределение энергии в спектре тела совпадает с распределением энергии в спектре абсолютного черного тела (такие тела называются серыми), то цветовая температура равна абсолютной. Если тело не является серым, вводится поправка.

Температура тела, определенная на основании закона Стефана — Больцмана по его энергетической светимости, измеренной при помощи термобатареи, называется радиационной температурой. Для не абсолютно черных тел радиационная температура ниже действительной.

Истинная температура T равна радиационной температуре T_R, отнесенной к корню четвертой степени из отношения энергетической светимости данного тела R к энергетической светимости абсолютно черного тела R_0:

$$l_T = \frac{R}{R_0}; \qquad T = \frac{T_R}{\sqrt{l_T}}.$$

§ 19. Фотометрия

Световым потоком Ф называется мощность видимого излучения, т. е. световая энергия, излучаемая по всем направлениям за единицу времени. Источник света, размеры которого незначительны по сравнению с расстоя-

ниями, на которых исследуется его световое излучение, а световой поток распределяется равномерно по всем направлениям, называется точечным источником. Излучаемые точечным источником волны — сферические.

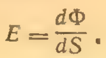
Силой света I называется величина, измеряемая отношением светового потока $d\Phi$, распространяющегося внутри телесного угла $d\Omega$, к величине этого телесного угла:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}.$$

Полный телесный угол вокруг точки равен 4π *стер*, поэтому сила света точечного источника:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}.$$

Освещенностью поверхности E называется величина, измеряемая отношением светового потока $d\Phi$, падающего на поверхность dS, к величине поверхности dS:



$$E = \frac{d\Phi}{dS}.$$

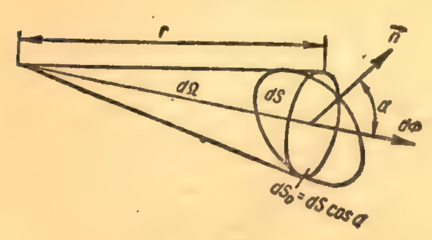


Рис. 175



Рис. 176

Если освещаемая поверхность dS отстоит на расстоянии r от точечного источника с силой света I (рис. 175), причем нормаль к поверхности $\vec{n}$ образует угол α направлением лучей, то телесный угол, в котором распространяется свет, опирается на поверхность:

$$dS_0 = dS \cos\alpha \text{ и равен } d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}.$$

Освещенность, создаваемая точечным источником:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{d\Phi\cos\alpha}{d\Omega r^2} = \frac{I\cos\alpha}{r^2}.$$

Для многих протяженных источников сил света I_φ по направлению, составляющему угол φ с нормалью к поверхности по закону Ламберта, равна:

$$I_\varphi = I_0\cos\varphi = B\sigma\cos\varphi,$$

где I_0 — сила света в направлении нормали к светящейся площадке σ (рис. 176),
B — яркость,
$\sigma\cos\varphi$ — есть видимая поверхность площадки.

Яркость протяженного источника света B определяется отношением силы света в данном направлении к поверхности источника, видимой по этому направлению, либо отношением светового потока $d\Phi$ к произведению телес-

ного угла $d\Omega$, внутри которого излучается поток, на видимую поверхность источника света:

$$B = \frac{I}{\sigma \cos \varphi}, \quad \text{или} \quad B = \frac{d\Phi}{d\Omega\, \sigma \cos \varphi}.$$

Светимость (светность) источника есть величина, измеряемая отношением светового потока $d\Phi$, излучаемого поверхностью, к величине этой поверхности

$$R = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Яркость и светимость источников, подчиняющихся закону Ламберта, связаны соотношением $R = \pi B$.

Все световые величины описывают видимое излучение.

Световые единицы. Основной световой единицей является свеча (*св*). Свеча — это сила света, при которой яркость полного излучения при температуре затвердевания платины равна 60 *св* на 1 *см*². Поэтому 1 свеча равна $\frac{1}{60}$ силы света, излучаемого 1 *см*² абсолютно черного тела при температуре плавления платины в направлении, перпендикулярном к излучающей поверхности.

Люмен (*лм*) — световой поток, излучаемый в пределах телесного угла в 1 *стер* источником, сила света которого равна 1 *св*: 1 *лм* = 1 *св* · 1 *стер*. Люкс (*лк*) — освещенность поверхности потоком, поверхностная плотность которого равна 1 *лм*/*м*².

$$1\ лк = 1\ \frac{лм}{м^2}; \quad 1\ фот = 10^4\ лк.$$

Нит (*нт*) яркость элемента светящейся поверхности, на 1 *м*² которой приходится сила света в 1 *св*:

$$1\ нт = \frac{1\ св}{1\ м^2}; \quad 1\ стильб = 10^4\ нт.$$

Единицей светимости является *лм*/*м*² — светимость поверхности, с которой излучается по всем направлениям поток в 1 *лм* с квадратного метра. Поскольку чувствительность глаза к световым волнам разной длины различна, соотношение между световыми и механическими единицами зависит от длины волны. Световой поток в 1 *лм* белого света равен 46 000 *эрг*/*сек*.

§ 20. Фотоэлектрический эффект и давление света

Фотоэффект. Явление вырывания электронов из тела под действием света называется внешним фотоэффектом.

Внешний фотоэффект открыт Г. Герцем в 1887 г. и детально исследован в 1888 г. Александром Григорьевичем Столетовым (1839—1896). Схема опыта Столетова приводится на рис. 177.

Законы фотоэффекта:

1. Ток насыщения (число электронов, вырываемых в единицу времени) пропорционален мощности падающего излучения.

2. Скорость электронов, вырываемых из тела при фотоэффекте тем больше, чем больше частота ν поглощаемого света; начальная кинетическая энергия фотоэлектронов возрастает линейно с возрастанием частоты света ν.

3. Фотоэффект наблюдается только при облучении светом с частотой $\nu \geqslant \nu_{кр}$, где $\nu_{кр}$ — критическая частота, называемая красной границей фотоэффекта, $\lambda_{кр} = \frac{c}{\nu_{кр}}$ — длинноволновая граница фотоэффекта.

Металл	Cs	Na	Zn	Ag	Pt
$\lambda_{кр}$, *ммк*	660	500	372	260	196,2

Ф о р м у л а Э й н ш т е й н а. В 1905 г. А. Эйнштейн объяснил закономерности фотоэффекта, показав, что фотоэффект вызывается поглощением электронами вещества фотонов с энергией: $\varepsilon = h\nu$.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта выражает закон сохранения энергии. Поглощенная электроном энергия кванта $h\nu$ идет на совершение работы выхода электрона из металла $A_{вых}$ и приобретение электроном кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ по выходе:

$$h\nu = A_{вых} + \frac{mv^2}{2}.$$

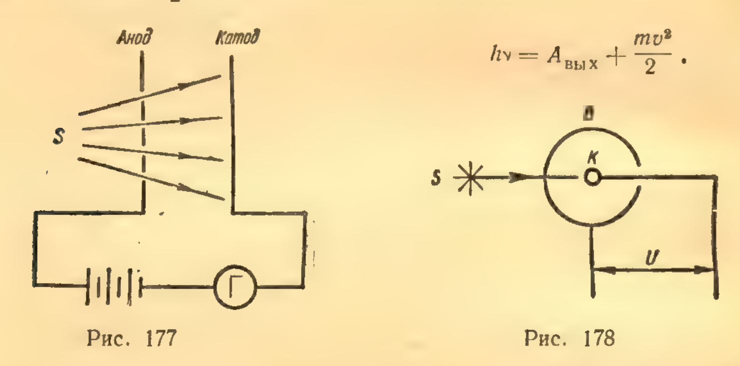


Рис. 177 Рис. 178

О п ы т П. И. Л у к и р с к о г о и С. С. П р и л е ж а е в а. Проверка уравнения Эйнштейна была выполнена П. И. Лукирским и С. С. Прилежаевым при помощи установки (рис. 178) со сферическим конденсатором.

Преимущество сферического конденсатора в том, что электроны, вырванные из катода K, достигнут электрода B и без ускоряющего потенциала, а спад силы тока с возрастанием задерживающего потенциала оказывается более резким.

Установка позволяет определить постоянную Планка.

Внутренний фотоэффект заключается в освобождении связанных с атомом электронов внутри полупроводника под действием света, что приводит к увеличению электропроводности тела. Поглощение электроном фотона и его энергии переводит электрон из заполненной зоны в зону проводимости. Это явление резко выражено у селена.

Фотоэффект запирающего слоя выражается в появлении напряжения на освещаемых соприкасающихся полупроводниках. Фотоэффект запирающего слоя объясняется механизмом проводимости в полупроводниках. Если соприкасаются полупроводники с электронной и дырочной проводимостью и последний освещается, то его электроны, поглощая кванты света, переходят на первый полупроводник, который заряжается отрицательно, последний — положительно. Создается источник тока, причем через запирающий слой фототок проходит в направлении обратном тому, когда это устройство используется как выпрямитель.

Схема купроксного (меднозакисного) фотоэлемента изображена на рис. 179.

Фотоэлементы широко применяются в телемеханике, в звуковом кино, телевидении, реле и т. д.

Фотоумножители позволяют регистрировать очень слабый свет и используются в люминесцентных счетчиках γ-квантов и ряде других случаев.

Давление света согласно электромагнитной теории. Если на поверхность тела нормально к ней падает электромагнитная волна, то наличие электрического вектора **E** приводит к смещению заряженных частиц вещества. На движущиеся заряды со стороны магнитного вектора **H** приходящей волны оказывают воздействие силы Лоренца.

Учитывая связь векторов **E**, **H** и **S** (вектора Пойнтинга), а также применяя правило левой руки, легко убедиться, что на заряженные частицы вещества независимо от знака заряда сила Лоренца действует по направлению светового луча, т. е. направлена внутрь поверхности, на которую падает волна. Эта сила определяет световое давление на поверхность тел.

Давление света согласно квантовой теории. Фотон обладает количеством движения (импульсом) $p_{\text{фотона}}$ и энергией ε.

Если на стенку площади S нормально к ней падает n фотонов за секунду, то, очевидно, $n = \frac{\Phi}{\varepsilon}$, где Φ — световой поток.

Если стенка поглощает фотоны, получая их общее количество движения, то давление на стенку:

$$p = \frac{F_{\text{давл}}}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\Phi}{\varepsilon} p_{\text{фотона}}.$$

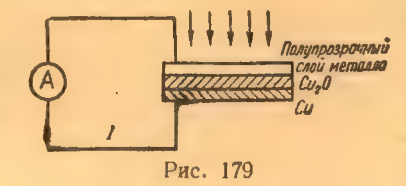


Рис. 179

Если стенка полностью отражает свет, изменяя импульс каждого фотона на противоположно направленный, то давление:

$$p = \frac{2\Phi p_{\text{фотона}}}{S\varepsilon}.$$

Если коэффициент отражения света стенкой $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, то

$$p = \frac{\Phi p_{\text{фотона}}}{S\varepsilon}(1 + \rho).$$

По теореме о кинетической энергии:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = vd\,(mv).$$

Для фотона, движущегося со скоростью c:

$$d\varepsilon = c\,dp_{\text{фотона}},$$

откуда $\varepsilon = cp_{\text{фотона}}$.

Поэтому, давление света:

$$p = \frac{\Phi}{Sc}(1 + \rho) = \frac{I}{c}(1 + \rho),$$

где I — поверхностная плотность потока (поток, падающий на единицу поверхности) $I = \frac{\Phi}{S}$, ρ — коэффициент отражения.

Давление света на мельчайшие частицы вещества комет объясняет образование кометных хвостов при прохождении кометы вблизи солнца. Русский астроном Ф. А. Бредихин объяснил это явление отталкивательной силой лучей солнца.

Давление света было предсказано К. Максвеллом, а экспериментально обнаружено и исследовано русским ученым П. Н. Лебедевым в 1900 г.

Давление света в звездных процессах. Наличие светового давления обусловливает предельные размеры звезд. С увеличением

массы звезды возрастает плотность излучения и давление света на частицы вещества в поверхностных слоях звезды. Масса звезды, при которой действующие на периферийные частицы вещества сила тяготения к центральной области и сила давления света, направленная от центра, уравновешиваются, является предельной массой звезды.

Эффектом Комптона или комптоновским рассеянием излучения называется явление изменения направления весьма коротковолнового излучения при его распространении в веществе, сопровождающееся появлением в составе рассеянного излучения более длинных волн. Это последнее обстоятельство в принципе отличает явление Комптона от классического (релеевского) рассеяния света в веществе.

Явление было изучено в 1922—1923 гг. Артуром Комптоном и объяснено на основе корпускулярных представлений о природе света как упругое столкновение γ-фотона со свободным или слабо связанным электроном в рассеивающем веществе, в результате чего γ-фотон меняет направление распространения и отдает часть энергии электрону, который проявляется как «электрон отдачи». К эффекту применимы законы сохранения энергии и количества движения, т. е. рассеяние, по образному сравнению Комптона, происходит наподобие игры на биллиарде фотонами и электронами.

При записи законов сохранения следует учитывать энергию покоящегося электрона $W = m_0 c^2$ и увеличение массы электрона $\left(m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right)$, так как скорость электрона отдачи v сравнима со скоростью света.

По релятивистскому закону сохранения энергии

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

где $h\nu$ и $h\nu'$ — энергии соответственно падающего и рассеянного фотонов, ν и ν' — сопоставленные им частоты, $\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ — энергия электрона отдачи.

Согласно закону сохранения количества движения:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} + m\mathbf{v}.$$

Последнее равенство носит векторный характер, но вводя в рассмотрение угол φ рассеяния фотона, согласно теореме о квадрате стороны в треугольнике получим:

$$m^2 v^2 = \frac{h^2 \nu^2}{c^2} + \frac{h^2 \nu'^2}{c^2} - 2h^2 \frac{\nu\nu'}{c^2} \cos\varphi.$$

Заменяя частоты ν и ν' длинами волн, согласно равенствам: $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$ и $\lambda' = \dfrac{c}{\nu'}$, а затем, исключая из выражений законов сохранения скорость электрона v, получим для изменения длины волны при комптоновском рассеянии фотона:

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Величина $\Lambda = \dfrac{h}{m_0 c}$ называется комптоновской длиной волны.

Явление Комптона принадлежит к процессам, не находящим объяснения с точки зрения волновой теории света, и свидетельствует в пользу корпускулярных (фотонных) представлений.

Экспериментальное обоснование фотонной теории света. Опыт Боте. Выбор между волновой и корпускулярной теориями может быть выполнен в зависимости от ответа на вопрос, как распределена энергия света. Согласно волновым представлениям, она рассредоточена по всей волновой поверхности, согласно фотонным, — она локализована в фотонах.

В опыте В. Боте тонкая железная или медная фольга подвешивалась между двумя гейгеровскими счетчиками. Облучение фольги жесткими рентгеновыми лучами вызывало характеристическое излучение флуоресценции фольги. В случае, если бы энергия этого излучения распространялась посредством сферических волн, следовало ожидать совпадения работы счетчиков. Опыт показал, что счетчики реагируют совершенно независимо один от другого, т. е. излучение состоит из направленно распространяющихся фотонов, попадающих в опыте либо в один, либо в другой счетчик.

РАЗДЕЛ ПЯТЫЙ

Основы частной (специальной) теории относительности

§ 1. Теория относительности. Экспериментальные основы теории относительности

Теория относительности, или релятивистская теория, была создана Альбертом Эйнштейном в 1905 г. Теория относительности, называемая также частной или специальной теорией относительности, включает в себя теорию пространства — времени, механику быстрых движений со скоростями, близкими к скорости света, электродинамику и оптику движущихся сред.

Общая теория относительности, представляющая собой теорию тяготения, была создана А. Эйнштейном в 1916 г.

Принцип относительности Галилея. Механическое движение тела относительно, — это положение означает, что о движении тела, его перемещении в пространстве можно говорить лишь в том случае, если указано, по отношению к какому телу происходит движение, относительно какого тела происходит перемещение. Понятие «абсолютное движение тела» как движение тела по отношению к «абсолютному» пространству Ньютона бессодержательно.

Опыт показывает, что *во всех инерциально движущихся системах отсчета все механические явления протекают одинаково.* Это положение носит название принципа относительности Галилея, или принципа относительности механики. Его можно сформулировать иначе: *никакими механическими опытами невозможно определить, находится ли система в инерциальном движении или покоится.* Обе формулировки эквивалентны.

Преобразования координат Галилея. Координаты одной и той же точки пространства в различных системах отсчета «неподвижной» $Oxyz$ и движущейся $O'x'y'z'$ связаны соотношением:

$$x' = x - vt; \qquad x = x' + vt';$$
$$y' = y; \qquad y = y';$$
$$z' = z; \qquad z = z';$$
$$t' = t; \qquad t = t',$$

если система отсчета $O'x'y'z'$ движется вдоль оси x со скоростью v, направление соответствующих осей совпадает, время отсчитывается от момента совпадения точек O и O'.

Инварианты преобразований Галилея: а) Расстояние между точками A и B инвариантно относительно преобразования Галилея:

$$S_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 + (z'_A - z'_B)^2} = S'_{AB}.$$

б) Из абсолютности времени и одинакового хода времени в любых системах отсчета ($t = t'$) вытекает, что временной интервал между двумя событиями инвариантен относительно преобразования Галилея:

$$\tau_{AB} = t_A - t_B = t'_A - t'_B = \tau'_{AB}.$$

в) уравнение движения Ньютона сохраняет свой вид в любой инерциальной системе:

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \text{ — в «неподвижной» системе отсчета;}$$

$$m\frac{d^2 x'}{dt'^2} = F'_x = -\frac{\partial u}{\partial x'} \text{ — в «движущейся» системе отсчета;}$$

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(x' + vt') = m\frac{d^2}{dt'^2}(x' + vt') = m\frac{d^2 x'}{dt'^2} =$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x'} = F'_x.$$

Распространение света в движущихся системах отсчета. Уравнения Максвелла приводят к тому, что любое электромагнитное возмущение, возникшее в некоторой точке пространства, будет распространяться со скоростью: $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$. Это вытекает из того, что любая компонента, например, E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Учитывая преобразование Галилея и переходя к движущейся системе отсчета, получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{dt'^2} + \frac{2}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial t'\partial x'} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} = 0.$$

Так как уравнения Максвелла меняют свой вид при переходе от неподвижной системы к движущейся, то это означает, что оптические и электродинамические явления в движущейся и неподвижной системах отсчета должны протекать по-разному.

Или из преобразований Галилея и уравнений Максвелла следует, что оптические и электродинамические явления в движущихся средах протекают иначе, чем в неподвижных, они не подчиняются принципу относительности Галилея.

Гипотеза эфира. Для объяснения природы света в XVII в. была введена гипотеза механического эфира. Эфир — всепроникающая мировая среда, обладающая очень малой плотностью ρ и крайне большой упругостью E, так что $\rho E = c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ *см*^{2}/*сек*^{2}. Свет представляет собой упругие колебания в эфире наподобие звуковых колебаний в воздухе. Предполагалось, что свойства эфира в пустоте и в объеме, занимаемом телами, различны. Эта гипотеза позволила Френелю получить правильное значение коэффициентов отражения и преломления для границы двух сред. Считая эфир неподвижным, но учитывая различие в свойствах эфира в пустоте и в телах, Френель показал, что при движении тел вследствие «сгущения» эфира в телах, эфир как бы частично увлекается. Коэффициент увлечения равен $\varkappa = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; т. е. если тело движется со скоростью V, то эфир движется со скоростью $\varkappa v =$

$= v \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, где n — коэффициент преломления тела. Увлечение эфира должно отразиться на оптических явлениях (см. например, опыт Физо).

После создания Максвеллом электромагнитной теории света гипотеза упругого, механического эфира была заменена гипотезой электромагнитного эфира.

Электромагнитный эфир — это всепроникающая среда, способная передавать электромагнитные сигналы, являющаяся носителем электромагнитного поля и электромагнитных колебаний. Электромагнитное поле — это форма движения эфира.

Возникает вопрос, остается ли эфир неподвижным, или увлекается полностью или частично при движении тел? На этот вопрос различные теории отвечают по-разному.

Теория Герца. Немецкий физик Генрих Рудольф Герц (1857—1894) исходил из предположения, что эфир полностью увлекается движущимися телами. Математически эта гипотеза выражается в требовании заменить $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$ в уравнениях Максвелла, что приводит к появлению дополнительных членов в уравнениях Максвелла, учитывающих движение среды. Однако теория Герца противоречит целому ряду фактов (см. ниже), и поэтому Герц отказался в своей теории от рассмотрения оптических явлений в движущихся средах.

Теория Лоренца. Голландский физик Гендрик Антон Лоренц (1853—1928) исходил из предположения, что эфир полностью неподвижен. Однако так как тела состоят из зарядов, взаимодействующих друг с другом, то при движении тел оптические явления протекают таким образом, как если бы эфир частично увлекался. Исходя из своей теории, Лоренц доказал, что если луч света проходит *замкнутый путь* в системе, движущейся со скоростью v, а точность опытов порядка $\frac{v}{c}$, то никакими опытами со светом невозможно доказать движение системы относительно эфира. Но если опыты позволяют производить измерения с точностью $\sim \left(\frac{v}{c}\right)^2$, то они дают возможность определить движение системы относительно эфира — в движущихся средах должен существовать «эфирный» ветер.

Баллистическая гипотеза Ритца. Если согласно Ритцу предположить, что скорость света складывается со скоростью источника, то уравнения Максвелла будут инвариантны относительно преобразования Галилея и оптические явления будут удовлетворять механическому принципу относительности.

Звездная аберрация. Явление звездной аберрации состоит в том, что звезды меняют свое видимое положение на небесном своде. В течение года они описывают эллипсы с фиксированным центром, большая полуось которых имеет дуговые размеры в 20,5''. Малая полуось различна. Она равна большой полуоси для звезд, лежащих в направлении, перпендикулярном к плоскости земной орбиты и равна нулю для звезд, лежащих в плоскости земной орбиты.

С точки зрения неподвижного эфира аберрация объясняется движением Земли относительно эфира. Волна, входящая через объектив O телескопа, затрачивает время $t = \frac{L}{c}$ на то, чтобы дойти до глаза наблюдателя. Но за это время телескоп пройдет путь $s = vt$, и свет не попадет в глаз. Чтобы свет попал в глаз, телескоп необходимо наклонить в сторону движения на угол $\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{L} = \frac{v}{c}$. Если подставить скорость Земли $v = 30$ *км/сек* и $c = 300\,000$ *км/сек*, то

$$\alpha = 10^{-4}\ рад = 20{,}5''(!).$$

С точки зрения теории Герца звездной аберрации не должно быть, так как лучи света, вступившие в телескоп, распространяются в эфире, который движется вместе с телескопом и никакого отставания света не будет. Таким образом, принцип относительности для оптических явлений, который должен выполняться в теории Герца, приводит к отрицанию звездной аберрации.

Опыт Физо. Французским физиком Ипполитом Физо (1819—1896) был проделан следующий опыт. Свет от источника Q направлялся на полупрозрачное зеркало S_1, которое разделяло его на два пучка — *1* и *2*. Лучи проходят через две трубы, наполненные водой, в противоположных направлениях (рис. 180). Зеркала S_2, S_3 и S_4 осуществляют поворот лучей. После отражения и прохождения одинаковых отрезков пути лучи *1* и *2*, встречаясь, дают интерференционную картину в фокальной плоскости трубы. Фиксируется положение нулевой полосы. После этого вода приводится в трубах в движение. Тогда один луч идет против движения воды, другой—по направлению движения воды. Интерференционная картина должна сместиться. По теории Герца скорость света в неподвижной воде $\frac{c}{n}$, при движении воды скорость света

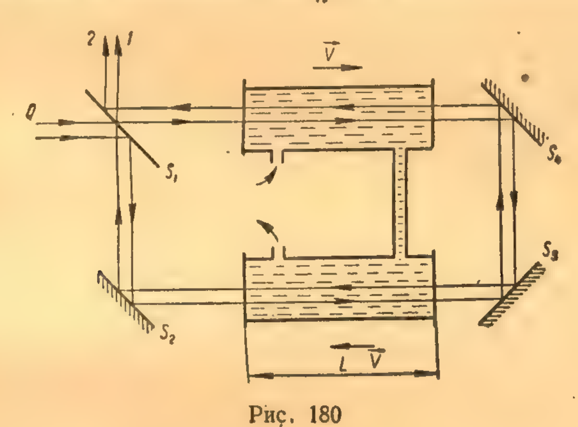


Рис. 180

относительно воды $\frac{c}{n}$, а относительно труб (установки) $\frac{c}{n} \pm v$, где v— скорость воды. Знак (+) относится к одинаковому направлению скоростей воды и света, (—) — к противоположному. Имея разную скорость, лучи *1* и *2* пройдут трубы за разное время. Разность времен

$$\delta t = \frac{2L}{\frac{c}{n} - v} - \frac{4Lv}{\frac{c}{n} + v} = \frac{2L}{\frac{c^2}{n^2} - v^2} = \frac{4Lvn^2}{c^2}.$$

За это время в воздухе лучи получат разность хода $\Delta = \delta tc$, что приведет к смещению интерференционной картины на m полос:

$$\Delta = m\lambda,\ m = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{4Ln^2v}{\lambda c}.$$

По теории Лоренца — Френеля эфир как бы частично увлекаясь, имеет скорость $\varkappa v = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$ и, следовательно,

$$m = \frac{4Ln^2\varkappa v}{\lambda c} = \frac{4Lv}{\lambda c}(n^2 - 1).$$

В опытах Физо: $L = 150$ *см*; $v = 700$ *см/сек*; $\lambda = 5\,000$ Å;
по Герцу: $m = 0{,}50$ полосы;
по Лоренцу — Френелю: $m = 0{,}20$ полосы. Опыт дал $m \simeq 0{,}2$ полосы.

Опыт Майкельсона — Морлея. Американские физики Альберт Абрахам Майкельсон (1852—1931) и Эдвард Вильямс Морлей (1869—1923) с целью обнаружить «эфирный ветер», существующий согласно теории Лоренца, поставили в 1887 г. опыт по следующей схеме.

Свет от источника Q (рис. 181) падает на полупрозрачное зеркало S, разделяется на два луча, которые падают на зеркала S_1, S_2 и отражаются от них. Луч *1*, прошедший через S и луч *2*, отраженный от S, встречаясь, дают интерференционную картину. Пусть теперь интерферометр движется вдоль плеча *2* со скоростью v. Скорость луча *2* по отношению к зеркалу S_2 будет

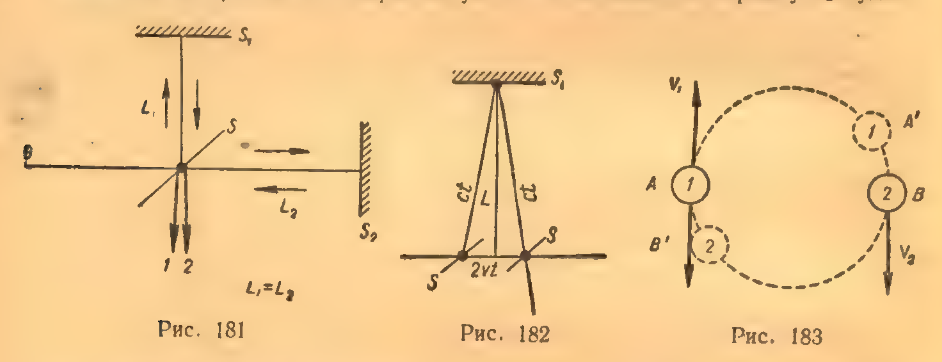


Рис. 181 Рис. 182 Рис. 183

$c - v$ (свет догоняет зеркало). После отражения луч *2* будет двигаться к зеркалу S со скоростью $c + v$. Полное время, которое понадобится лучу *2* на прохождение пути от S до S_2 и обратно, равно

$$t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}.$$

Время t_1 находится из условия, что луч *1* идет по сторонам равнобедренного треугольника (рис. 182):

$$\left(c\frac{t_1}{2}\right)^2 - \left(v\frac{t_1}{2}\right)^2 = L^2; \quad t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Разность времен

$$\delta t = t_2 - t_1 = 2L\left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{c}{(\sqrt{c^2 - v^2})^2}\right) =$$

$$= \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \frac{2L}{c}\,\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{L}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Набираемая лучами разность хода:

$$\Delta = \delta t \cdot c = L\beta^2, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{v}{c},$$

Интерференционная картина сместится на число полос

$$m = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}\beta^2.$$

Если бы мы направили по движению Земли плечо 1, то интерференционная картина сместилась бы на ту же величину в другую сторону. Если зафиксировать положение нулевой полосы, когда плечо L_2 интерферометра направлено вдоль движения Земли, затем повернуть интерферометр на 90°, то полное смещение интерференционной картины будет равно $2m = \frac{2L}{\lambda}\beta^2$. Так как $\beta^2 = 10^{-8}$, то при $L = 11$ *м* и $\lambda = 5000$ Å интерференционная картина должна сместиться на величину $2m = 0{,}44$ полосы. Опыт показал, что смещение отсутствует, т. е. принцип относительности для оптических явлений справедлив.

В последующем опыт был повторен со светом, идущим от внеземного неподвижного источника. Результаты опыта были также отрицательными относительно ожидаемого смещения полос.

Для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона Фитцджеральд и Лоренц выдвинули контракционную гипотезу, согласно которой размеры тел в направлении движения уменьшаются в отношении $\sqrt{1-\beta^2} : 1$, что приводит к равенству времен t_2 и t_1.

Двойные звезды (рис. 183). В астрофизике известны двойные звезды. Две звезды вращаются вокруг их центра масс. Если принять «баллистическую гипотезу» Ритца, то свет от звезд 1 и 2 будет идти с разными скоростями. Когда свет дойдет до Земли, мы увидим звезды в положении A и B. Но к этому моменту звезды займут другое положение. Когда звезда 1 будет находиться в положении A', свет от нее будет идти к Земле с большей скоростью и может прийти раньше, чем он придет от нее, когда она находилась в положении A. Это означает, что мы можем одновременно видеть то две, то четыре звезды, никакой периодичностью видимое движение звезд не должно обладать. В то же время наблюдение показывает, что видимое движение двойных звезд обладает строгой периодичностью и «ложные» звезды отсутствуют. Это означает, что баллистическая гипотеза неверна.

Из всего сказанного выше можно сделать следующие выводы:

1. Опыт Майкельсона показывает, что оптические явления удовлетворяют принципу относительности. Его можно понять, если исходить из теории Герца или баллистической гипотезы. Теория Лоренца находится в противоречии с ним.

2. Баллистическая гипотеза противоречит наблюдениям за двойными звездами, следовательно, скорость света не зависит от скорости движения источника.

3. Опыт Физо и звездная аберрация объясняются теорией Лоренца и противоречат теории Герца.

Следовательно, *объяснить различные оптические явления с единой точки зрения в рамках классической физики невозможно, если не привлекать контракционную гипотезу Лоренца.*

§ 2. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца и их следствия

Постулаты Эйнштейна. В основу созданной в 1905 г. частной, или специальной, теории относительности Эйнштейн положил два постулата, являющиеся следствиями экспериментальных фактов.

Первый постулат: механические, оптические и электромагнитные явления во всех инерциально движущихся системах отсчета протекают одинаково.

Второй постулат: скорость света в вакууме не зависит от скорости источника, во всех инерциальных системах одинакова и равна $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*,

т. е. скорость света не зависит ни от движения источника, ни от движения наблюдателя (приемника).

Первый постулат утверждает, что все инерциальные системы отсчета равноправны, никакими оптическими опытами невозможно определить движение данной системы отсчета, т. е. первый постулат распространяет принцип относительности на оптические и электродинамические явления. Так как распространение света в «неподвижной» системе верно описывается уравнениями Максвелла — Лоренца, то первый постулат утверждает, что уравнения Максвелла — Лоренца во всех инерциальных системах отсчета должны иметь одинаковый вид. Кратко первый постулат называют принципом относительности Эйнштейна.

Постулаты Эйнштейна и преобразования Галилея. Постулаты Эйнштейна и преобразования Галилея несовместимы. Действительно, рассмотрим совместно три положения:

а) принцип относительности Эйнштейна (первый постулат);

б) закон постоянства скорости света (второй постулат);

в) абсолютность времени $t' = t$.

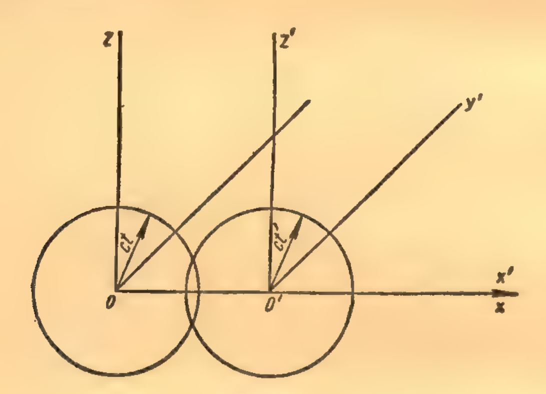


Рис. 184

Рассмотрим две системы отсчета; неподвижную (условно) $Oxyzt$ и движущуюся (условно) $O'x'y'z't'$ относительно неподвижной со скоростью v. Направление соответствующих осей совпадает. В тот момент, когда начала координат O и O' совпадают, в точке O и O' происходит вспышка света. Если этот момент принять за начало отсчета времени, тогда с одной стороны положение волновой поверхности в момент времени t будет описываться уравнением сферы радиуса ct: $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ с центром в точке O, с другой стороны, волновая поверхность будет описываться уравнением сферы $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct)^2$ с центром в точке O'. Таким образом, в один и тот же момент времени $t = t'$ волновая поверхность достигает различных точек пространства (рис. 184), что лишено всякого смысла. На самом деле волновая поверхность одна. Чтобы выйти из противоречия, необходимо отбросить одно из трех утверждений. Но *а* и *б* — это экспериментальные факты, тогда как *в* — утверждение, основанное на наблюдении медленных механических процессов. Опыт приводит к необходимости отбросить понятие абсолютного, независящего от движения, времени.

Преобразования Лоренца. Отбрасывая преобразования Галилея, теория относительности заменяет их преобразованиями Лоренца, основанными на двух постулатах Эйнштейна.

Преобразование координат и времени имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t) \\ y' &= y'(x, y, z, t) \\ z' &= z'(x, y, z, t) \\ t' &= t'(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Они должны быть разрешимы относительно нештриховых координат, для этого необходимо, чтобы якобиан $\frac{dx'_j}{dx_j}$ не равнялся нулю. Преобразование (*) должно оставлять прямолинейное механическое движение прямолинейным; т. е. уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$ должно перейти в уравнение вида: $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{v}'(t' - t'_0)$ (принцип относительности Галилея), а уравнение распространения света:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 = 0$$

в уравнение

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t'}\right)^2 = 0,$$

где $\omega(x, y, z, t)$ — уравнение волновой поверхности.

Эти требования приводят к условию, что преобразования Лоренца должны быть линейными.

Рассмотрим случай движения вдоль совпадающих осей x и x'. Из соображения симметрии или общего линейного преобразования получим: $y' = y$; $z' = z$.

Рассмотрим точку, покоящуюся относительно O', $-x'$. Она движется относительно точки O со скоростью v, тогда можно ожидать, что x и vt войдут симметричным образом: $x' = \alpha(x - vt)$.

Положим $t' = \gamma x + \delta t$. Тогда из уравнений $x^2 = (ct)^2$ и $x'^2 = (ct')^2$ находим после подстановки коэффициенты:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad \delta = -\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Искомые уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \qquad\qquad (**) \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

Если разрешить эту систему уравнений относительно x, y, z и t, то выражение нештрихованных координат через штрихованные будет иметь вид:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

что соответствует тому, что нештрихованная система отсчета движется относительно штрихованной со скоростью $(-v)$[1].

Связь уравнений преобразований Лоренца и Галилея. Преобразования Лоренца переходят в пределе $v \to 0$ (или $c \to \infty$) в преобразования Галилея. Следовательно, все результаты теории относительности при малых скоростях должны совпадать с нерелятивистскими результатами.

Относительность одновременности. Если события A и B происходят в одной точке $x_A = x_B$ и в один и тот же момент времени $t_A = t_B$, то они будут одновременными и в любой другой инерциальной системе координат.

Если события A и B происходят одновременно $t_A = t_B$, но в разных точках $x_A \neq x_B$, то они будут неодновременными в любых других инерциальных системах. Разность времени между ними

$$t'_A - t'_B = \frac{(x_B - x_A)\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{x_B - x_A}{c\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}$$

будет тем больше, чем дальше они расположены друг от друга, чем больше скорость относительного движения систем отсчета.

Если $x_B > x_A$, то $t'_B < t'_A$ — событие B происходит раньше A, если оно происходит в точке с большей координатой.

Интервал. Преобразования Лоренца не оставляют неизменными расстояния между точками пространства и временные интервалы. Сохраняющейся (инвариантной) величиной является так называемый интервал, определяемый в любой инерциальной системе координат соотношением;

$$S_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] =$$
$$= c^2 \left(t'_2 - t'_1\right)^2 - \left[\left(x'_2 - x'_1\right)^2 + \left(y'_2 - y'_1\right)^2 + \left(z'_2 - z'_1\right)^2\right] = S'^2_{12} = \mathrm{Inv}.$$

Событием называется совокупность четырех величин (x, y, z, t) или (x', y', z', t'). Бесконечно близкие события определяются элементарным интервалом:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}\,.$$

Сохранение нулевого интервала $S = 0$ отражает закон постоянства скорости света:

$$c = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \frac{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}{dt'}\,.$$

Собственное время. Замедление времени. Парадокс часов. Для количественного выражения временного промежутка, для измерения времени, используются периодические процессы

---

[1] Преобразования (**) были получены впервые Лоренцом, в силу чего они и называются его именем, однако Лоренц в отличие от Эйнштейна считал их не имеющими физического смысла, рассматривал их лишь как чисто математическое преобразование, упрощающее уравнения.

(«часы») — колебания маятника в обычных часах, вращение Земли, колебания кристаллических пластинок (пьезокварц), колебания молекул (молекулярные генераторы).

Теория относительности приводит к выводу, что ход «часов», т. е. всех физических процессов, зависит от состояния движения.

Сравним показания «движущихся» и «неподвижных» часов. В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по «неподвижным» часам) движущиеся часы переместятся на расстояние

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Для нахождения промежутка времени, который отметят движущиеся часы, необходимо исходить из инвариантности интервала, так как

$$dx' = dy' = dz' = 0,$$

$$c^2\,dt'^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

или

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2\,dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \beta^2},$$

т. е. движущиеся часы покажут меньший интервал времени (dt'), чем неподвижные (dt):

$$dt' : dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1.$$

Если по неподвижным часам пройдет время $\tau = t_2 - t_1$, то промежуток времени τ', показанный движущимися часами,

$$\tau' = t_2' - t_1' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{1 - \beta^2} < \tau.$$

При инерциальном движении

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \text{const} \quad \text{и} \quad \tau' = \tau\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Таким образом, «движущиеся» часы идут медленнее «неподвижных». Время, отсчитываемое по часам, жестко связанным с объектом, называется собственным временем этого объекта. Тогда можно сказать, что собственное время τ_0 есть минимальный временной интервал между двумя событиями. Если временной процесс на движущемся теле измеряется по неподвижным часам — τ и по часам, жестко связанным с телом — τ_0, то:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

В силу относительности понятия «неподвижная» и «движущаяся» система соотношения для τ и τ' обратимы. Однако это не означает, что замедление времени является кажущимся явлением. Реальность замедления времени заложена в относительности одновременности, в силу чего «движущиеся» и «неподвижные» часы (но не системы отсчета!) неравноправны: движущиеся часы (одни) сравниваются с несколькими, по крайней мере, — двумя неподвижными часами. Однако правильнее говорить не об изменении хода времени в разных системах отсчета, а о различии протекания локализованного в пространстве временного процесса.

Для того, чтобы установить какие часы отстают, необходимо «движущиеся» и «неподвижные» часы свести вместе. Но для этого необходимо или «вернуть» «движущиеся» часы, или «ускорить» «неподвижные» часы. Но очевидно, что результаты должны зависеть от характера сближения часов, так как ускорение *абсолютно*.

Отстанут те часы, которые будут двигаться ускоренно. Именно этим объясняется меньшее старение космонавта, вернувшегося на Землю по сравнению с жителями Земли (парадокс часов).

Сокращение длин отрезков. Длина отрезка, или расстояние между его концами, определяется разностью координат точек, занимаемых его концами:

$$l = x_2 - x_1,$$

$$l' = x_2' - x_1'.$$

Рассматривая длину движущегося тела в неподвижной системе, необходимо учитывать относительность одновременности, поэтому необходимо брать те координаты концов, которые они занимают в один и тот же момент времени t' (а не t!), тогда

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Следовательно, при движении тел их длина в направлении движения уменьшается, сокращается ($l > l'$). Наибольшую длину l_0 имеет тело в той системе отсчета, т. е. по сравнению с теми телами, по отношению к которым оно покоится. Длина движущегося тела l связана с собственной длиной l_0 соотношением

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Закон сложения скоростей. Тело, имеющее некоторую скорость w_x в «движущейся» со скоростью v системе координат имеет в неподвижной системе скорость u_x:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\,\dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}}{d\left(\dfrac{t' + \dfrac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \dfrac{v}{c^2}dx'} = \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx'}{dt'}} = \frac{v + w_x}{1 + \dfrac{w_x \cdot v}{c^2}}.$$

Закон сложения скоростей таков, что результирующая скорость не может превзойти скорость света.

Пример. Предположим, что из «электронной пушки» в противоположных направлениях вылетают два электрона со скоростями 0,9 c по отношению к «пушке». Их относительная скорость.

$$u = \frac{0{,}90\,c + 0{,}90\,c}{1 + (0{,}90)^2\dfrac{c^2}{c^2}} = \frac{1{,}80}{1{,}81}c.$$

Формулы преобразования скоростей в общем виде при движении в направлении оси x:

$$u_x' = \frac{u_x + v}{1 + \dfrac{u_x v}{c^2}}; \quad u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{u_x v}{c^2}};$$

$$u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{u_x v}{c^2}}.$$

Эффект Доплера. Воспринимаемая частота света, приходящего от движущегося источника, не совпадает с частотой излучаемого света. Из-

менение частоты, обусловленное движением источника (или приемника), даваемое классической и релятивистской теориями, не совпадают. Пусть угол между скоростью и направлением на приемник равен 90°. В этом случае согласно классической теории изменения частоты быть не должно. Согласно же релятивистской теории должно произойти смещение частоты в красную сторону:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

где ω_0 — излучаемая, ω — воспринимаемая частота света. Изменение частоты при поперечном Доплер-эффекте связано с замедлением временных процессов в движущихся телах. Так как процессы протекают в движущихся телах медленнее, чем в неподвижных, то период колебаний в движущемся источнике возрастет по сравнению с периодом колебаний в таком же покоящемся источнике:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где T_0 — период колебания по собственным часам, а T — по часам «неподвижной» системы. Отсюда вытекает указанная формула для частоты.

Если угол между скоростью и прямой, соединяющей источник и приемник, равен α, то формула для изменения частоты имеет вид:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \alpha}.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Импульс. Зависимость массы от скорости. Рассматривая взаимодействия тел, например, в процессе удара и пользуясь преобразованием Лоренца, можно показать, что величина, равная произведению массы тела m_0 и его скорости $\mathbf{v}$, не сохраняется. Но сохраняются величины вида:

$$\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Закон движения имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}.$$

Его можно записать в обычном виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},$$

если определить импульс как произведение массы m тела на его скорость $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

где масса тела определяется соотношением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, где m_0 — масса покоящегося тела ($v = 0$); при движении тела его масса возрастает.

Кинетическая энергия тела. Сила $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, действующая на свободное тело, в результате совершаемой работы $dA = (\mathbf{F}\, d\mathbf{S})$ изменяет физическую величину, называемую кинетической энергией:

$$dT = dA = (\mathbf{F}\, d\mathbf{S}) = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\, \mathbf{v}\, dt\right) =$$

$$= (\mathbf{v}\, d\mathbf{p}) = \mathbf{v} \cdot d\,(m\mathbf{v}) = v^2\, dm + m d\,\frac{v^2}{2} = c^2\, dm.$$

Кинетическая энергия тела

$$T = c^2 \int\limits_{m_0}^{m} dm = mc^2 - m_0\, c^2 = m_0\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Связь энергии и массы. Так как $T = E - E_0$, то величину $E = mc^2$ можно рассматривать как меру полной энергии, заключенной в теле с массой m. Величину $E_0 = m_0c^2$ можно считать энергией покоя — это полная энергия, которой обладает покоящееся тело. В таком случае кинетическая энергия будет равна изменению полной энергии:

$$T = \Delta E = E - E_0 = c^2\,(m - m_0) = c^2\, \Delta m.$$

Опыт показывает, что один вид энергии переходит в другой, поэтому можно обобщить соотношение между кинетической энергией и изменением массы тела на все формы энергии и считать, что при любом изменении энергии тела на величину ΔE меняется масса тела на величину $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$; при любом изменении массы тела на величину Δm полная энергия тела меняется на величину $\Delta E = \Delta mc^2$.

Установление взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии является одним из крупнейших достижений теории относительности.

Связь импульса и энергии.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{E}{c^2}\, \mathbf{v}.$$

Учитывая выражение зависимости массы от скорости и выражение для импульса можно записать:

$$\frac{E^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2,$$

или

$$E = c\sqrt{p^2 + (m_0\, c)^2}\,.$$

Функции Лагранжа и Гамильтона.

$$L = -m_0\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$H = \mathbf{p}\,\mathbf{v} - L = \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E.$$

§ 3. Экспериментальная проверка теории относительности

Опыт Айвса. Замедление времени проверялось Айвсом на основании поперечного доплер-эффекта. На щель спектрографа Sp с помощью поворотных зеркал (рис. 185) направляется свет, испускаемый движущимися атомами водорода в направлении движения (зеркала S_1, S_2) и в перпендикулярном направлении (S_3) и от обычной разрядной трубки (зеркало S_4). На фотопластинке наблюдаются тройные линии H (рис. 186) серии Бальмера,

например, H_α — красная линия водорода, испускаемая неподвижными атомами, $H_{\alpha\,кл}$ — смещенная в фиолетовую часть спектра вследствие продольного доплер-эффекта и $H_{\alpha\ рел}$ — обусловленная релятивистским (поперечным) доплер-эффектом. Согласие экспериментальных результатов с теоретическими удовлетворительное.

Одним из методов экспериментальной проверки замедления времени является исследование зависимости жизни μ-мезонов от их энергии, т. е. скорости. Опыт показал, что время жизни движущихся μ-мезонов растет с ростом их скорости (энергии) в соответствии с законом замедления времени.

Сокращение отрезков. Подтверждением этому является опыт Майкельсона.

Опыт Физо и аберрация. Опыт Физо и аберрация объясняются релятивистским законом сложения скоростей. Скорость света в неподвижной воде равна $\frac{c}{n}$. При движении воды со скоростью v скорость света относительно неподвижной установки равна:

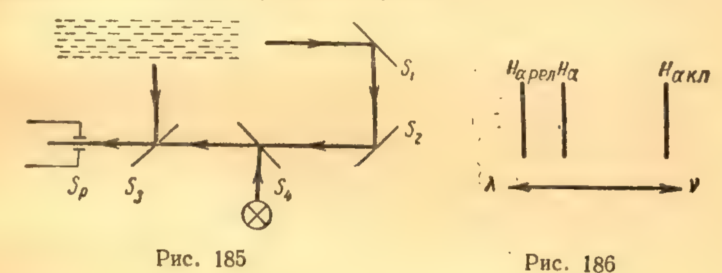


Рис. 185

Рис. 186

$$\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{vc}{nc^2}}=\left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{cn}\right)=\frac{c}{n}+v-\frac{v}{n^2}-\frac{v^2}{cn}=$$

$$=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{c}{n}+\varkappa v,$$

где $\varkappa=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ — известный коэффициент увеличения, с помощью которого опыт Физо полностью объясняется.

Зависимость массы от скорости. Непосредственно эта формула проверялась Цинном, нашедшим удовлетворительное согласие экспериментальных и теоретических значений. Прямой проверкой ее является работа современных ускорителей, в которых учитывается зависимость массы от скорости (бетатрон, фазотрон и др.).

Связь массы и энергии. Косвенной проверкой ($E = mc^2$) является строго выполняемое равенство $\Delta E = \Delta mc^2$, являющееся одним из твердо установленных в ядерной физике законов. Соотношение $\Delta E = \Delta mc^2$ неопровержимо доказано огромным количеством опытных фактов.

Скорость света c — предельная скорость. Теория относительности приводит к выводу, что скорость света c является предельной скоростью передачи любых взаимодействий. Она является предельной скоростью движения любых тел. Это доказывается работой современных ускорителей; например, период обращения электрона в синхротроне не зависит от их энергии, уже начиная с энергии в несколько *Мэв*.

РАЗДЕЛ ШЕСТОЙ

Атомная физика

§ 1. Особенности атомной физики

Атомной физикой называется раздел физики, посвященный изучению свойств и строения электронной оболочки атома, свойств электронов и ионов и их движения в электрическом и магнитном полях. Для атомной физики характерны следующие черты:

а) *атомизм вещества*. Элементарная частица простого вещества носит название *атом* (неделимый), элементарный носитель основных свойств остальных веществ носит название *молекула*. Реальность атомов и молекул доказывается не только косвенно, но и прямыми наблюдениями;

б) *атомизм заряда*. Атомизм заряда состоит в том, что существует элементарный заряд $e = 4{,}802 \cdot 10^{-10}$ СГСЭq, меньше которого в природе не наблюдается. При всех изменениях заряда системы он меняется на целое число e, т. е. меняется дискретно. Устойчивым носителем отрицательного заряда является элементарная частица, называемая электроном, являющаяся составной частью любого атома; положительного заряда — протон, или, ядро атома водорода, входящий в состав всех остальных ядер;

в) дискретность физических величин. Отличительной чертой атомной физики является дискретность большинства физических величин, характеризующих движение электрона в атоме. Сюда относятся энергия, момент количества движения, его проекция и другие величины;

г) важнейшей особенностью элементарных частиц и их образований является *корпускулярно-волновой дуализм*, без которого невозможно полное понимание законов микромира. Он состоит в том, что микрочастицы обладают как корпускулярными, так и волновыми свойствами одновременно. Полное описание микромира дается квантовой механикой, включающей в себя единую, корпускулярно-волновую картину микромира, т. е. элементарных частиц (электрон, позитрон, протон, нейтрон и другие) и их простейших образований (атомы, молекулы, кристаллы).

§ 2. Определение заряда электрона

В макрополях, т. е. полях, создаваемых заряженными телами или магнитами, микрочастицы движутся как обычные классические частицы, или корпускулы, подчиняющиеся механике Ньютона или Эйнштейна. Если рассматривать микрочастицы наподобие объектов, описываемых классической механикой, то их состояние движения определяется заданием координаты и скорости в данный момент времени, а уравнением движения является уравнение Ньютона или Эйнштейна:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — сила Лоренца.

С и л а Л о р е н ц а. Движение элементарной частицы с зарядом e определяется силой Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}],$$

где **E** и **H** напряженности электрического и магнитного полей, **v** — скорость частицы, c — скорость света в вакууме, или электродинамическая константа (система единиц Гаусса).

О п р е д е л е н и е з а р я д а. О п ы т ы М и л л и к е н а. Дискретность и величина элементарного электрического заряда впервые была получена в опытах Милликена (1909). Идея опыта такова: внутри конденсатора с помощью пульверизатора образуются капельки масла, или других веществ. При их образовании на них возникает электрический заряд. Если поля нет, капельки будут опускаться с постоянной скоростью, вследствие сопротивления воздуха. Капелька наблюдается в микроскоп. Скорость ее опускания определяется по пути, проходимому в поле микроскопа за измеряемое время. Величина скорости зависит от силы, действующей на каплю. На основании закона Стокса для движения шара радиуса r в непрерывной среде, обладающей коэффициентом трения η, скорость определяется из условия:

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta r v_g.$$

На каплю действует вес mg, выталкивающая сила $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_в\, g$, направленная вверх. Из равенства $6\pi r v_g \eta = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_в)$ находится радиус капли. Если создать в конденсаторе электрическое поле E такого направления, чтобы частица равномерно поднималась, то

$$Eq - mg = 6\pi\eta r v_E$$

и

$$q = 9\sqrt{2}\,\frac{\pi v_g^{1/2}\eta^{3/2}}{E(\rho - \rho_в)^{1/2} g^{1/2}}(v_g + v_E) = \frac{A(v_g + v_E)v_g^{1/2}}{E},$$

куда входят величины, поддающиеся измерению. При облучении капли рентгеновыми лучами заряд ее меняется и становится равным q_1. Заряд изменяется на величину $\Delta q = q - q_1$:

$$\Delta q = c(v_E - v_{E'}),$$

где

$$c = \frac{A v_g^{1/2}}{E}.$$

Опыт показал, что: а) при перезарядке заряд капли меняется на целое число величины $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГС Э заряда, б) заряд капли кратен той же величине. Тем самым доказывается дискретность изменения и атомизм электрического заряда.

§ 3. Движение заряженных частиц в макрополях

Д в и ж е н и е ч а с т и ц ы в о д н о р о д н о м э л е к т р и ч е с к о м п о л е $\mathbf{E} = \text{const}$.

О т к л о н е н и е ч а с т и ц п л о с к и м к о н д е н с а т о р о м. Частица влетает в плоский конденсатор (рис. 187), в котором создано поле E. Внутри конденсатора частица движется по параболе, после выхода

из конденсатора частица движется прямолинейно, в направлении касательной к параболической кривой в точке $z = l$ (l — длина пластин конденсатора). Тангенс угла наклона касательной определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dx}{dz} = \frac{eE}{2mv_{zo}^2}\, 2z \Big|_{z=l} = \frac{eEl}{mv_{zo}^2}\,.$$

Если на расстоянии L от конденсатора поместить люминесцирующий экран, то заряженная частица попадет на него на расстоянии S от центра;

$$S \cong L \operatorname{tg}\theta = \frac{eE\,lL}{mv_{zo}^2}\,.$$

Смещение частицы от центра экрана пропорционально заряду, напряженности поля, длине пластин конденсатора (длина пластин определяет время действия поля на частицу), расстоянию до экрана и обратно пропорционально энергии частицы.

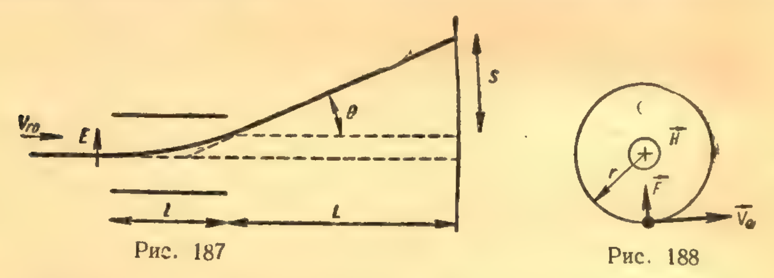


Рис. 187

Рис. 188

Отклонение плоским конденсатором пучка заряженных частиц широко используется в различных областях науки и техники. При исследовании различных периодических процессов широко применяется метод осциллографирования, когда исследуемый процесс (например, периодически меняющееся давление) с помощью подходящего «датчика», например пьезокварца, преобразуется в электрические колебания, которые после усиления подаются на одну пару пластин осциллографа. В этом случае $\frac{eLl}{mv_{zo}^2} = c$ — постоянная величина, определяемая конструкцией прибора, и $S = cE$, т. е. смещение пропорционально полю, или разности потенциалов, снимаемых с датчика.

$$S = c'V\,.$$

Величина c' легко измеряется путем подачи напряжения определенной величины, после чего по отклонению S можно определять V.

Движение в неоднородном электрическом поле. В общем случае решить задачу очень трудно. Наибольшее практическое применение находят неоднородные электрические поля, обладающие осевой симметрией. Такие поля являются основой электронной и ионной оптики.

Движение заряженных частиц в поперечном магнитном поле. Если первоначальная скорость частиц $\mathbf{v}_0$ перпендикулярна полю $\mathbf{H}$, то частицы будут двигаться в плоскости, перпендикулярной полю (рис. 188). Так как сила постоянна, то движение будет происходить по окружности. Радиус окружности найдем, учитывая, что сила Лоренца является в данном случае центростремительной силой:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e}{c}\, vH.$$

Сокращая на v и обозначая импульс частицы $mv = p$, получим:

$$r = \frac{cp}{eH},$$

т. е. радиус кривизны пропорционален импульсу p и обратно пропорционален напряженности магнитного поля H.

Время одного оборота будет равно отношению длины окружности, по которой движется частица, к скорости движения:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi cp}{veH} = \frac{2\pi mc}{eH},$$

т. е. период обращения не зависит от скорости движения частиц при скоростях, когда еще не сказывается изменение массы от скорости.

Следовательно, частицы, имеющие одинаковые значения удельного заряда e/m в данном поле вращаются с одним и тем же периодом независимо от величины скорости.

Угловая скорость вращения $\omega = \frac{v}{r}$, равная циклической частоте $\omega = \frac{2\pi}{T}$, определяется уравнением

$$\omega = \frac{eH}{mc}.$$

Движение в продольном поле. Если частица влетает в магнитное поле вдоль направления **H**, то **F** = 0, так как угол между **v** и **H** равен 0. Следовательно, магнитное поле не оказывает никакого действия на частицу и траектория частицы будет представлять собой прямую линию.

Общий случай. Если частица влетает в магнитное поле под некоторым углом к нему, то скорость частицы можно разложить на две компоненты: продольную и поперечную. На продольный компонент поле никакого действия не оказывает, следовательно, он осуществляет перенос параллельно полю. Действие поля на поперечный компонент скорости сводится к вращению. Следовательно, полное движение представляет собой вращение по окружности, центр которой равномерно движется вдоль поля, вследствие чего траекторией является винтовая линия с постоянным шагом. Такое движение можно использовать для получения изображений. Если электроны выходят из какой-либо точки под небольшими углами к **H**, то через время $T = \frac{2\pi mc}{eH}$ они опишут окружность, продвинувшись на расстояние $l = vT$. Таким образом, если располагать люминесцирующий экран на расстояниях, кратных величине l, то магнитное поле будет создавать изображение источника заряженных частиц.

Движение в неоднородном магнитном поле. Неоднородное аксиально-симметричное магнитное поле позволяет получать изображение, т. е. служит в качестве линз. В отличии от электрических линз магнитные линзы могут быть только собирающими. Магнитные линзы находят широкое применение в телевидении, радиолокации, электронной микроскопии, масс-спектроскопии.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях:

а) *Случай параллельных электрического и магнитных полей.* **E** ∥ **H**. Если начальная скорость направлена вдоль поля, то магнитное поле никакого действия на движение частиц не оказывает, частица движется равномерно-ускоренно вдоль полей.

Если начальная скорость частиц направлена перпендикулярно полю, то магнитное поле закручивает частицу. Однако электрическое поле сообщит частице ускорение, направленное вдоль поля. В результате действия полей

частица начнет равномерно вращаться по окружности, центр которой будет двигаться вдоль поля равноускоренно. Траектория представляет собой винтовую линию с переменным шагом.

б) *Скрещенные поля.* Направим ось z вдоль электрического поля, ось y — вдоль магнитного поля. Пусть в этих полях порождается заряженная частица без начальной скорости.

Под действием электрического поля положительно заряженная частица начинает двигаться ускоренно вверх. Но на компоненту z скорости начинает действовать магнитное поле. Сила будет направлена вдоль оси x. Под действием этой силы частица получает ускорение и скорость вдоль оси x. Но если появилась скорость вдоль оси x, то это движение вызывает силу, направленную вдоль оси z, вниз. В результате действия этой силы ускорение по z уменьшается, меняет знак, и частица начинает двигаться вниз, к оси x.

Математический расчет показывает, что частица будет двигаться по окружности, лежащей в плоскости xOz, центр которой перемещается равномерно вдоль оси x со скоростью $u = c\,\frac{E}{H}$, называемой дрейфовой скоростью.

Траекторией частиц является циклоида. В общем случае, когда частица имеет начальную скорость, она будет двигаться по трахоиде.

§ 4. Движение частиц в аксиально-симметричном поле

Уравнение движения. Если поля невелики (применима механика Ньютона), то уравнение движения частицы в электрическом поле имеет вид:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m}\Delta u.$$

Если положить

$$t_1 = \sqrt{\frac{e}{m}}\,t,$$

то

$$dt = \frac{dt_1}{\sqrt{\frac{e}{m}}},$$

и в уравнении движения заряженной частицы исчезает явная зависимость от удельного заряда, т. е. уравнения движения различных частиц будут одинаковы. Если начальные условия будут удовлетворять соотношениям:

$$\mathbf{r}_1\big|_{t=0} = \mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2\big|_{t=0} = \mathbf{r}_0,$$

и

$$\frac{v_{10}}{v_{20}} = \sqrt{\left(\frac{e}{m}\right)_2 : \left(\frac{e}{m}\right)_1}, \tag{*}$$

то траектории частиц с различными удельными зарядами совпадут или будут подобны. На основании этого соотношения можно сделать следующие выводы, известные как теоремы подобия:

1. В заданном электростатическом поле частицы с различными e/m движутся по совпадающим траекториям, если совпадают их начальные условия (в смысле (*)).

2. При изменении потенциалов на всех электродах в одинаковое число раз траектория частиц останется прежней, неизменной.

3. При изменении всех размеров установки в одинаковое число раз траектория останется подобной.

Эти законы лежат в основе моделирования различных установок.

Основные законы электронной оптики: 1. В отсутствие электрических полей (U-константа) заряженные частицы движутся прямолинейно.

2. Если заряженная частица переходит из области с потенциалом U_1, в область с потенциалом U_2 и падает на границу раздела под углом i, то углы падения i и преломления d электронного пучка связаны между собой соотношением:

$$\sqrt{U_1}\sin i = \sqrt{U_2}\sin\alpha,$$

которое вытекает из закона сохранения энергии.

3. При попадании частицы в тормозящее поле, угол падения и угол отражения равны.

4. Принцип суперпозиции в общем случае несправедлив, так как между частицами существует кулоновское расталкивание. Для релятивистских частиц расталкивание начинает компенсироваться притяжением (параллельные токи притягиваются).

Отличие электронной оптики от геометрической. 1. При наличии отталкивания электронов не выполняется принцип суперпозиции.

2. $\sqrt{U}$, играющий роль электронно-оптического показателя преломления, меняется непрерывно, тогда как в геометрической оптике коэффициент преломления обычно меняется дискретно, хотя возможны случаи непрерывного изменения n.

3. В оптике n составляет несколько единиц, например, стекло $n = 1{,}5$; германий $n = 4{,}0$. В электронной оптике $\sqrt{U}$ можно менять в очень широких пределах.

Уравнение траектории в аксиально-симметричном поле. В аксиально-симметричном поле уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{z} = eE_z,$$

$$m\ddot{\rho} = eE_\rho.$$

На основании закона Остроградского — Гаусса связь между компонентами поля имеет вид:

$$E_\rho = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\rho}{2}U''.$$

Подстановкой $dt = \frac{dz}{v}$ из уравнения движения получается уравнение траектории — основное уравнение электронной оптики в параксиальной области:

$$\sqrt{U}\frac{d}{dz}\left(\sqrt{U}\frac{d\rho}{dz}\right) = -\frac{\rho}{4}U''.$$

Условие параксиальности запишется в виде

$$U(\rho, z) \approx U(0, z) = U(z).$$

Это уравнение приводит к фокусировке, т. е. если пучок электронов выйдет в некоторой точке A, лежащей на оси поля, то расходящийся пучок сойдется в некоторой точке B оси, которая будет изображением точки A. Появление изображения вытекает в частности из того факта, что на частицу, летящую под углом к оси, действует сила, направленная к оси и прямо пропорциональная отклонению частиц от оси. Величина фокусного расстояния для тонкой электростатической линзы дается выражением:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{4\sqrt{U_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U'(z)}{\sqrt{U(z)}}dz.$$

На рис. 189 и 190 приведены примеры электрических линз и показан механизм их действия — дано положение эквипотенциальных поверхностей. Простейшей линзой является диафрагма. Для нее величина фокусного расстояния

$$f = -\frac{4U_0}{E_1 - E_2}.$$

(обозначение см. рис. 189).

Движение в аксиально-симметричном магнитном поле. Уравнение траектории имеет вид:

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} + \frac{eH^2}{8mc^2U}\rho = 0.$$

Член, стоящий перед ρ, всегда положителен, поэтому:

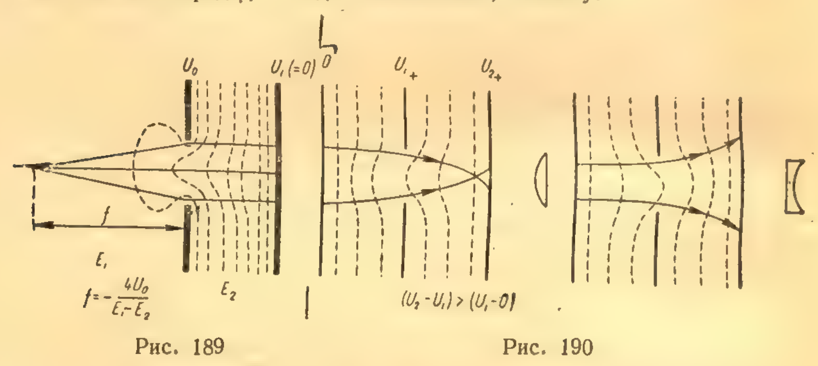


Рис. 189 Рис. 190

а) в магнитном поле возможна фокусировка, 2) магнитные линзы могут иметь только положительные фокусные расстояния. Для тонкой линзы величина фокусного расстояния равна

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8mc^2U}\int_{-\infty}^{\infty} H^2(z)\,dz.$$

Фокусировка на π-радиан. Однородное магнитное поле способно фокусировать расходящиеся пучки заряженных частиц при некоторых условиях. Если пучок заряженных частиц выходит из узкой щели и расходится, то при повороте на π - радиан он снова сфокусируется полем.

Это свойство однородных полей широко используется в масс-спектроскопии. В одном месте соберутся частицы, имеющие одно и то же отношение e/m, таким способом значение e/m может быть измерено:

$$\frac{e}{m} = \frac{2c^2U_0}{(H\rho)^2}.$$

Фильтр скоростей. Для многих целей атомной физики необходимо получать пучки частиц, имеющих одну и ту же скорость, так называемые монохроматические пучки. Простейший фильтр скоростей состоит из скрещенных однородных электрических и магнитных полей, направленных таким образом, чтобы действия магнитного и электрического полей были противоположны (рис. 191). Тогда параллельный пучок, попадая в поля,

будет расходиться. Если на пути его поставить узкую диафрагму, то через отверстие в ней пройдут частицы с определенной скоростью, удовлетворяющей соотношению:

$$\frac{mv^2}{\rho} = eE - \frac{e}{c}\,vH,$$

где ρ радиус кривизны частицы в полях. Перемещая диафрагму, можно выделять те или иные частицы с той или иной скоростью. Без отклонения пройдут частицы, скорость которых как раз равна дрейфовой скорости $v = u = c\frac{E}{H}$, т. е. когда электрическая и магнитная силы равны. Меняя одно из полей, через диафрагму можно пропускать частицы, имеющие одну и ту же скорость, или точнее, имеющие скорости в очень малом интервале.

Цилиндрический конденсатор. Частицы, входящие в цилиндрический конденсатор, и имеющие различную скорость, будут

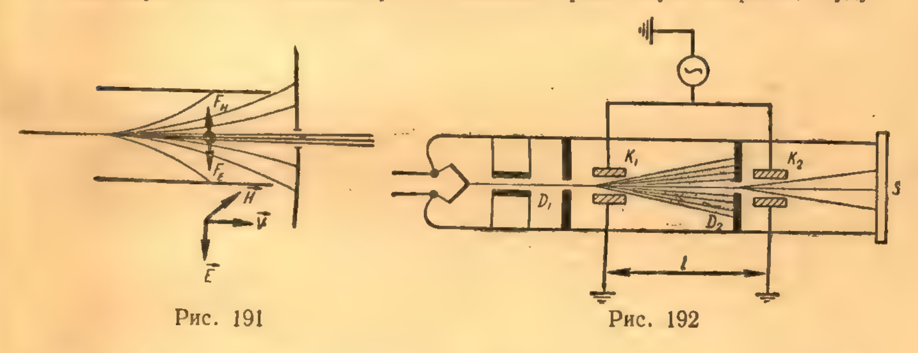


Рис. 191 Рис. 192

двигаться по различным траекториям. Выражая электрическую силу через напряженность поля и центростремительное ускорение, получим

$$eE = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Если на пути частиц в области их максимального расхождения поставить диафрагму, то она выделит монохроматический пучок частиц. Другая замечательная особенность движения частиц в поле цилиндрического конденсатора состоит в том, что частицы, влетающие в конденсатор под различными углами и имеющие различные скорости, фокусируются по прохождении углового расстояния $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127°17'$. О таких устройствах говорят, что они обладают двойной фокусировкой — фокусировкой по скоростям и фокусировкой по направлениям (по углам).

Методы определения удельного заряда. В основе методов определения удельного заряда лежат законы движения частиц в магнитном и электрическом полях. Они основаны на том, что отклонение частиц в магнитном поле определяется импульсом, а в электрическом поле — энергией частицы, поэтому использование только одного поля не дает возможности определения e/m.

Метод двух конденсаторов (метод пролета) (рис. 192). Узкий пучок электронов, выделенный диафрагмой D_1, попадает в конденсатор K_1, на который наложено переменное электрическое поле от генератора известной частоты. Пучок развертывается этим полем в линию. На пути его поставлена вторая диафрагма D_2. Через отверстие в ней пройдут только те электроны, которые проходят конденсатор K_1 без отклонения, т. е. в момент

когда поле в нем равно нулю. Прошедшие вторую диафрагму электроны попадают в конденсатор K_2, питаемый от того же генератора. Электроны попадут в конденсатор K_2 в некоторый момент времени $t = t_0 + \frac{l}{v}$, где t_0 соответствует моменту времени, когда электроны проходили первый конденсатор. В таком случае электроны будут проходить второй конденсатор в такие моменты, когда на его пластинки подается одна и та же разность потенциалов, и пучок будет отклоняться вверх или вниз симметрично относительно оси. На люминесцирующем экране появятся две точки. Меняя ускоряющее напряжение, можно подобрать время пролета между двумя конденсаторами равным целому числу полупериодов.

Тогда

$$v = \frac{2l}{nT} = \frac{2lf}{n}; \quad \text{но} \quad mv^2 = 2eU_0$$

или

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U_0} = \frac{4l^2 f^2}{2n^2 U_0} = \frac{2l^2 f^2}{n^2 U_0}.$$

Величина удельного заряда, полученного таким методом, равна $\frac{e}{m} = (1{,}7590 \pm 0{,}0015)$ СГСМ$_q$/*г*.

Метод фокусировки в продольном магнитном поле. Пучок электронов, вырезаемый малой диафрагмой, попадает в конденсатор, который меняет направление скоростей электронов в небольшом угловом интервале. Так как время обращения в магнитном поле не зависит от скорости, то через время $T = \frac{2\pi mc}{eH}$ электроны соберутся на оси прибора и дадут изображение диафрагмы. Изображение будет располагаться на расстоянии $l = vT$ от конденсатора. Если в этом месте расположить люминесцирующий экран, то на нем будет наблюдаться точка. Комбинируя указанные соотношения для $\frac{e}{m}$ получим

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U_0}{l^2 H^2}.$$

Результаты измерений дают $\frac{e}{m} = (1{,}7586 \pm 0{,}0023) \cdot 10^7$ СГСМ$_q \cdot г^{-1}$.

Наиболее точные значения $\frac{e}{m} = 1{,}7592 \cdot 10^7$ СГСМ$_q \cdot г^{-1}$.

Масса электрона. Удельный заряд позволяет вычислить массу электрона

$$m = \frac{e}{\frac{e}{m}} = 9{,}108 \cdot 10^{-28} г$$

Масса электрона может быть вычислена и другим способом, например, из ядерных реакций.

§ 5. Ускорители заряженных частиц

Основной единицей измерения энергии в атомной и ядерной физике служит электрон-вольт. Один электрон-вольт — это такая энергия, которую получает частица с зарядом, равным заряду электрона, прошедшая разность потенциалов в 1 *в*:

$1\ эв = 1е\ 1в = 1{,}60 \cdot 10^{-12}\ эрг = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ дж.$

Для многих целей требуется получить частицы с энергией, измеряемой десятками и сотнями миллионов электрон-вольт, следовательно, однозарядные (в единицах заряда электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ$_q$) частицы должны пройти разности потенциалов в десятки и сотни миллионов вольт. Однако создать такие большие разности потенциалов невозможно.

Существуют ускорители различных типов:

1. В ускорителях прямого действия используется статическое или квазистатическое электрическое поле, проходя которое частицы набирают энергию. К таким ускорителям относятся импульсный трансформатор, электростатический ускоритель Ван-де-Граафа, в котором большая разность потенциалов создается за счет электризации диэлектрической ленты, заряд с которой снимается на металлическую сферу большого радиуса. Энергия частиц, получаемая в таких ускорителях, достигает 5 *Мэв*.

2. В циклических индукционных ускорителях (бетатрон) используется вихревое электрическое поле, порождаемое переменным магнитным полем.

3. В циклических резонансных ускорителях (синхротрон, циклотрон, фазотрон, синхрофазотрон) энергия сообщается частицам переменным электрическим полем, локализованным в определенном объеме, сквозь который частица проходит многократно в результате действия магнитного поля. Частота поля совпадает с частотой обращения частиц.

4. В линейных резонансных ускорителях частицы проходят небольшую разность потенциалов, создаваемую между большим числом электродов, расположенных вдоль одной прямой.

Основными задачами для каждого ускорителя являются:

а) получение максимально возможной в данном типе ускорителя энергии;

б) получение достаточного числа частиц, обладающих максимальной энергией (пучки частиц большой интенсивности).

Решение второй задачи получается правильным подбором источника частиц, сохранением захваченных в процессе ускорения частиц от рассеяния, попадания на стенки; выводом ускоренных частиц.

Бетатрон. Это индукционный ускоритель электронов. Его работа основана на явлении электромагнитной индукции, и он представляет, в сущности говоря, трансформатор, где вторичной обмоткой является поток электронов.

Принцип действия бетатрона крайне прост. В поперечном постоянном магнитном поле электрон движется по окружности. Если магнитное поле будет изменяться, то оно создает вихревое электрическое поле, которое может сообщить энергию электрону. Электрон, набирающий энергию, будет двигаться в однородном поле по спирали. Если поле сделать неоднородным, то можно заставить электроны двигаться по орбите постоянного радиуса. Для этого необходимо выполнить некоторое условие, накладываемое на структуру магнитного поля. Если такие условия созданы, то электрон движется по орбите постоянного радиуса. Магнитное поле искривляет траекторию частицы, обеспечивает движение по окружности заданного радиуса, электрическое поле ускоряет частицу, меняет величину импульса:

$$\frac{dp_t}{dt} = eE,$$

где p_t — величина импульса в момент времени t, E определяется из величины э.д.с. индукции

$$E = \frac{\mathscr{E}}{2\pi r}.$$

Но $\mathscr{E}$ определяется потоком индукции через площадь орбиты (с точностью до знака)

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\left(\pi r_0^2 H_{cp}\right).$$

Величина импульса связана однозначно с напряженностью магнитного поля на орбите:

$$p_t = \frac{er_0 H_t}{c}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\,\frac{er_0 H_t}{c} = \frac{e}{2\pi r_0}\,\frac{d}{dt}\left(\pi r_0^2 H_{cp}\right).$$

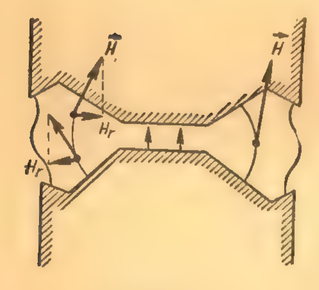


Рис. 193

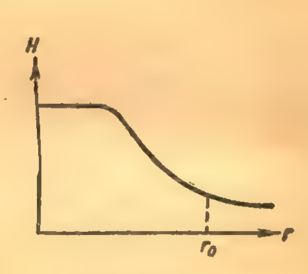


Рис. 194

После сокращения на r_0, e, c, π получается

$$\frac{d}{dt}H_t = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}H_{cp},$$

или

$$H_t = \frac{1}{2}H_{cp}.$$

Это условие для переменной составляющей справедливо для любого момента времени. Оно называется условием Видерое (который впервые получил его) или условием 1 : 2. Оно означает, что одно и то же переменное магнитное поле может ускорять электроны и удерживать их на орбите постоянного радиуса, если напряженность на орбите в два раза меньше среднего значения напряженности поля внутри орбиты.

Схема прибора (рис. 193). Магнит имеет полюсные наконечники специальной формы, которые создают неоднородное поле. В поле помещена тороидальная вакуумная камера, в которой имеется источник электронов.

Силовые магнитные линии в этой области имеют бочкообразную форму.

Распределение магнитного поля вдоль радиуса представлено на рис. 194. Спадание поля в области нахождения траектории происходит по закону $\frac{1}{r^n}$, где n — индекс неоднородности — удовлетворяет условию: $0 < n < 1$. Обычно $n = 0{,}4 \div 0{,}8$. Обмотка магнита питается переменным током с частотой в 50 *гц*.

Энергия, которую набирают электроны, определяется на основании связи между импульсом и полной энергией:

$$E^2 = c^2 \left(p^2 + m_0^2 c^2\right) = c^2 \left[\left(\frac{r_0 eH}{c}\right)^2 + m_0^2 c^2\right],$$

$$E = r_0 eH \sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c^2}{r_0 eH}\right)^2}.$$

Импульс электрона p в бетатроне много больше, чем $m_0 c$:

$$\frac{m_0 c^2}{r_0 eH} \ll 1.$$

Действительно, для сравнительно небольшого бетатрона ($r_0 = 50$ *см*, $H = 3\,000$ *э*):

$$\frac{m_0 c}{p} \sim 10^{-2} \ll 1.$$

Следовательно, для энергии электрона, ускоренного в бетатроне, можно записать с большой степенью точности:

$$E = r_0 eH.$$

Если выражать энергию в *эв*, r_0 в *см*, H в *э*, тогда формулу для энергии можно записать в виде:

$$E = 300\, r_0 H.$$

Выражение показывает, что для получения большей энергии необходимо повышать r_0 и H. В бетатроне H имеет величину порядка 4 000—5 000 *э*, дальнейшее повышение невозможно, так как при этом поле внутри орбиты имеет значение $\sim$ 18—20 *кэ* и наступает насыщение железа. Повышение r_0 также имеет пределы, так как объем железа магнита и его вес растут примерно $\sim r_0^3$. В таком же отношении растут энергия питания и стоимость установки. Следовательно, большое увеличение радиуса r_0 экономически невыгодно.

Однако предел достигнутой в бетатроне энергии кладется одним физическим явлением, известным под названием «светящегося электрона». Движение электрона по орбите есть движение ускоренное, а всякое ускоренное движение заряда приводит к излучению электромагнитных волн, следовательно, к потере энергии. Это излучение, которое при энергии 50—100 *Мэв* видно глазом при наблюдении по касательной к траектории, в виде сине-белого пятна, нарушает условие стационарности, в результате чего при больших энергиях электрон «сваливается» с равновесной орбиты и должен быть использован, в противном случае он попадает на стенки камеры и будет потерян.

Предельная энергия электрона, достигнутая в бетатроне, не превышает 300 *Мэв*.

Так как энергия покоя электрона $E_0 = m_0 c^2 = 0{,}511$ *Мэв*, то электрон, имеющий энергию E *Мэв* имеет полную массу $\frac{m}{m_0} \sim 2E$, т. е. при $E = 300$ *Мэв* полная масса электрона $\sim 600\, m_0$. Для скорости электрона получим:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{E}\right)^2.$$

При $E = 2$ *Мэв*

$$\frac{v}{c} = 0{,}9997,$$

а при 100 *Мэв* $\frac{v}{c} = 0{,}99995$, т. е. при всех вычислениях можно считать $v \cong c$.

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с устойчивостью движения по равновесной орбите. Если электрон случайно отклонится в результате столкновения с остаточными молекулами газа в камере, то он должен быть возвращен на стационарную орбиту, в противном случае к концу процесса ускорения число частиц может резко уменьшиться. Возвращение электрона, вышедшего из плоскости орбиты вверх или вниз, обеспечивается «бочкообразностью» силовых линий поля — наличием радиальной компоненты поля, которая обусловливает силу, направленную к средней плоскости pp (рис. 195) для электронов, движущихся по часовой стрелке, если смотреть сверху (заряд электрона отрицательный!) Этот механизм аксиальной фокусировки действует во всех ускорителях. Возвращение электронов, отклонившихся в сторону больших или меньших значений r, обеспечивается заданием закона спадания: $H \sim \frac{1}{r^n}$. Сила Лоренца $F_л$ зависит от r: $F_л = \frac{\text{const}}{r^n}$, центростремительная сила $F_{цс} = \frac{\text{const}}{r}$. На равновесной орбите $F_л = F_{цс}$. Если частица отклонилась к центру, то сила Лоренца будет меньше, чем необходимая центростремительная сила, и частица получит ускорение по радиусу от центра,

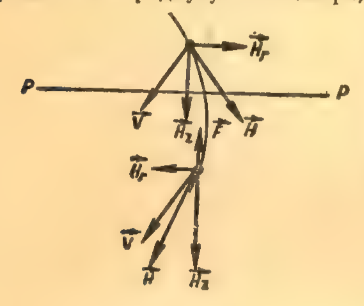
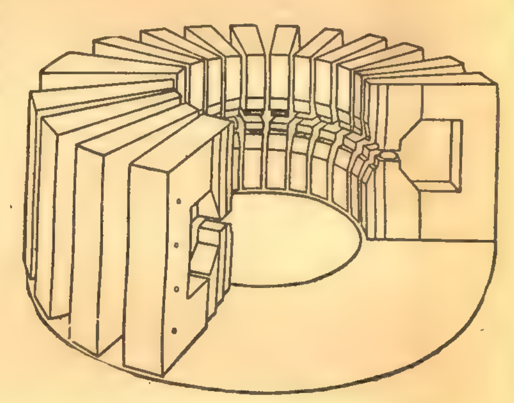


Рис. 195


Рис. 196

вследствие чего вернется на стационарную орбиту. При отклонении от центра сила Лоренца уменьшается медленнее ($n < 1$!), чем центростремительная сила, и, следовательно, сила Лоренца сообщает частице некоторое радиальное ускорение и возвращает частицу на орбиту r_0.

Процесс возвращения электрона на стационарную орбиту приводит вследствие инерции электрона к затухающим колебаниям около стационарной орбиты (бетатронные колебания).

Так как в процессе ускорения электроны захватываются лишь в начальной стадии процесса, то пучок ускоренных частиц получается не непрерывным, а импульсным с частотой, равной частоте питающего электромагнит тока. Энергия электронов используется или непосредственно, или в форме γ-квантов, испускаемых электронами при торможении на специальных мишенях, установленных внутри вакуумной камеры.

Синхротрон. Л. А. Арцимович указал, что ускорение электронов можно производить переменным электрическим полем, приложенным к электродам, сквозь которые проходят ускоряемые электроны, и на долю магнитного поля остается только функция искривления траектории. Это означает, что магнитное поле необходимо получить только в узкой полосе вблизи равновесной орбиты.

Магнит кольцевой формы (рис. 196) создает поле, необходимое для движения электронов по круговой орбите и фокусировки. В некоторой части траектории расположен электрод-резонатор, к которому приложено переменное электрическое поле частоты, равной частоте обращения электронов. При прохождении через поле резонатора электроны набирают энергию $\delta E = eV_0 \cos\varphi$, где V_0 — амплитудное значение ускоряющей разности потенциалов, φ — фаза поля в момент прохождения электрона. В остальной части пути электрон движется с постоянной энергией. Поскольку энергия и импульс электрона возрастают, то магнитное поле должно также расти, чтобы удерживать электрон на равновесной орбите.

Величина энергии $E = 300\, r_0 H$ может быть получена значительно больше, чем в бетатроне. В действующих в СССР синхротронах получаются электроны с энергией 280 *Мэв*.

Максимальная энергия, полученная в настоящее время в синхротроне, составляет 1,3 *Бэв* (США) с радиусом орбиты в 4,7 *м*. Строятся синхротроны на энергию 7 *Бэв*. Теорию работы таких ускорителей дал В. И. Векслер.

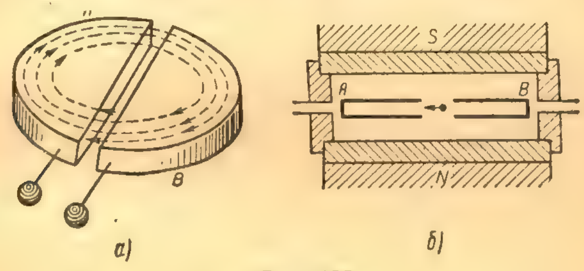


Рис. 197

Ц и к л о т р о н. Для ускорения тяжелых частиц — протонов, дейтонов, α-частиц и ионов других атомов — первоначально был использован ускоритель, называемый циклотроном. На рис. 197 приведена схема прибора. В пространстве между полюсными наконечниками магнита некоторого радиуса помещается плоская вакуумная камера (откачка до 10^{-6} *мм* Hg). В ней помещаются электроды A и B, называемые дуантами, которые можно представить как две половины цилиндрической банки, разрезанной по диаметру и несколько раздвинутые. К дуантам приложена высокочастотная разность потенциалов $V = V_0 \cos\omega t$, создающая в зазоре между дуантами переменное поле. В зазоре же помещается источник, генерирующий используемые для ускорения ионы. Ионы, вылетевшие из ионного источника, ускоряются электрическим полем. Пройдя зазор, они будут двигаться в магнитном поле по окружности. Через время

$$\Delta t = \frac{\pi mc}{eH},$$

ионы вновь подойдут к зазору. Если за это время полярность дуантов поменялась, то ионы опять будут ускоряться. Так как период обращения в магнитном поле от скорости частиц не зависит, то через каждый интервал времени Δt ион будет попадать в зазор, следовательно, через это же время необходимо менять полярность дуантов.

Ионы будут ускоряться высокочастотным полем, если его частота $\omega_Г$ будет равна частоте обращения ионов:

$$\omega_Г = \omega = \frac{eH}{mc},$$

— условие циклотронного резонанса.

Энергия, которую набирает ион, определяется радиусом дуантов и напряженностью поля:

$$T = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{e^2 r_0^2 H^2}{2m_0 c^2}.$$

При $r_0 = 1{,}0$ *м* и $H = 18\,000$ *э* протоны получают энергию $T = 16$ *Мэв*.

Дальнейшее увеличение поля практически невозможно. Увеличение радиуса связано с большими трудностями технического характера. Но, кроме того, имеются причины принципиального характера, которые ограничивают возможности дальнейшего значительного увеличения энергии ионов. Действительно, с увеличением энергии неразрывно связано увеличение массы иона. Но с ростом массы период обращения иона увеличивается — ион начинает выходить из резонанса и может в дальнейшем движении попадать в зазор в моменты, когда поле будет тормозить ион, уменьшать его энергию. Максимальная энергия протонов, полученная в циклотроне, составляет 25 *Мэв*; α частиц — 48 *Мэв*, ионов азота N^{+++} — 160 *Мэв*.

Аксиальная фокусировка в циклотроне осуществляется «бочкообразностью» силовых линий магнитного поля. На выходе получается непрерывно идущий поток ускоренных ионов.

Фазотрон (синхроциклотрон). В 1944 г. советский физик В. И. Векслер и несколько позже американский физик Мак-Миллан открыли принцип автофазировки, который позволил в установке циклотронного типа получить значительно большую энергию. Такой прибор получил название синхроциклотрона, или фазотрона. Принцип действия фазотрона состоит в следующем. Если ион, набрав некоторое количество энергии, вышел из синхронизма с ускоряющим полем, то для приведения в синхронизм необходимо уменьшить частоту ускоряющего поля. Следовательно, иону можно сообщить все большую и большую энергию, если в соответствии с возрастанием периода обращения иона увеличивать период высокочастотного ускоряющего поля. Ион, движение которого находится в точном синхронизме с изменением частоты ускоряющего иона, можно назвать равновесным.

Приращение энергии за период должно быть согласовано со скоростью изменения частоты, что легко видеть из уравнения

$$T = \frac{2\pi mc}{eH},$$

или

$$T = \frac{2\pi E}{ecH}.$$

Приращение периода за время одного оборота

$$\delta T = \frac{2\pi}{ecH}\,\delta E = \frac{2\pi}{cH} V_S,$$

где V_S — ускоряющая разность потенциалов, соответствующая движению равновесного иона (находящегося в точном синхронизме с изменением ускоряющего поля). Равновесное значение ускоряющей разности потенциалов определяет некоторую равновесную фазу:

$$V_S = V_0 \cos \varphi_S.$$

Рассмотрим другой ион, который имеет энергию больше энергии равновесного иона. В таком случае этот ион будет двигаться с периодом большим, чем период равновесного иона, в результате чего он пройдет щель между дуантами позже, чем равновесный ион $(\varphi > \varphi_S)$, следовательно, за время одного оборота приращение его энергии будет меньше приращения энергии равновесного иона. Через некоторое число оборотов энергия неравновесного

иона сравнивается с энергией равновесного иона; сравняются и их периоды обращения. Но при этом фаза неравновесного иона больше фазы равновесного иона, он проходит щель между дуантами позже прохождения щели равновесным ионом, поэтому его энергия будет расти медленнее, чем энергия равновесного иона. Но если его энергия становится меньше энергии равновесного иона, то период также будет меньше, в результате чего он будет проходить щель все раньше и раньше (его фаза начнет смещаться влево) с каждым оборотом величина приобретаемой им за один оборот энергии будет расти. В тот момент, когда его фаза станет равной равновесной фазе, энергия будет меньше энергии равновесного иона (при каждом обороте он получал меньшее приращение энергии, чем равновесный ион), поэтому его фаза будет по-прежнему уменьшаться, а величина получаемой за оборот энергии возрастать по сравнению с eV_s. В тот момент, когда энергия неравновесного иона будет равна энергии равновесного, фаза будет меньше, поэтому энергия его будет увеличиваться быстрее, что приводит к более быстрому увеличению периода. Неравновесный ион начнет увеличивать фазу и т. д.

Таким образом, энергия равновесного иона возрастает синхронно с уменьшением частоты ускоряющего поля. Энергия неравновесного иона периодически меняется вокруг возрастающего равновесного значения энергии. Фаза неравновесного иона периодически изменяется вокруг равновесной фазы.

Этот механизм автоматического изменения энергии и фазы вокруг равновесных значений был назван Векслером автофазировкой. Для автофазировки необходимо лишь достаточно большое значение амплитуды ускоряющего поля. В результате автофазировки число ускоряемых частиц резко возрастает. Тем не менее происходит падение средней интенсивности пучка по сравнению с циклотроном. Кроме того, на выходе будет прерывистый пучок ионов в отличие от циклотрона, где ускоренные ионы получаются непрерывно.

Таким образом, в фазотроне магнитное поле постоянно, имеет конфигурацию, подобную конфигурации поля циклотрона. Частота ускоряющего электрического поля периодически меняется, к концу цикла ускорения частота уменьшается.

Изменение частоты достигается изменением параметров (емкости, индуктивности) контура дуантов, находящегося в резонансе с питающим генератором, частота которого определяется изменяющейся собственной частотой контура дуантов. Энергии протонов, ускоренных в фазотронах, характеризуются величинами: 730 *Мэв* (калифорнийский университет, США), 680 *Мэв* (Дубна, СССР), 600 *Мэв* (ЦЕРН, Швейцария). Токи, получаемые в фазотронах, составляют несколько микроампер, что в сотни раз меньше тока в циклотроне.

С и н х р о ф а з о т р о н. Дальнейшее повышение энергии частиц в фазотроне приводит к быстрому росту веса и объема магнита, что становится экономически невыгодным. Ускорение частиц до больших энергий достигается в наиболее современных ускорителях — синхрофазотронах, включающих в себя принципы синхротрона и фазотрона. Синхрофазотрон — это ускоритель, в котором магнитное поле, необходимое для искривления траекторий, создается кольцевым магнитом; в процессе ускорения частицы движутся по орбите постоянного радиуса (как в синхротроне), что достигается возрастанием во времени магнитного поля (как в бетатроне). Ускорение осуществляется электрическим полем в специальных ускоряющих электродах. Потери на излучение невелики, так как в синхрофазотроне ускоряются тяжелые частицы (протоны).

Магнит синхрофазотрона, построенного в Советском Союзе, состоит из четырех квадрантов со средним радиусом 28 *м*, разделенных прямолинейными промежутками длиной 8 *м* каждый. Вес магнита около 36 тыс. *т*. Мощность питания составляет 140 тыс. *квт*. Камера сделана двойной для улучшения вакуума. Перед впуском протоны имеют энергию 9 *Мэв*. Процесс ускорения

длится 3,3 *сек*, ион получает в среднем за оборот энергию, равную 2 200 *эв*, в двух ускоряющих устройствах в виде пролетных трубок, на которые подается напряжение 5 *кв* на каждую. Частота ускоряющего поля изменяется в 7,5 раз. Протоны совершают около 4,5 млн. оборотов, проходя путь около 10^6 *км*, и набирают энергию в 10 *Бэв* (10^{10} *эв*). В СССР проектируется синхрофазотрон на 50 *Бэв*. Радиус равновесной орбиты его будет составлять 250 *м*, вес магнита 30 тыс. *т*. Наибольшая энергия протонов, достигнутых в синхрофазотроне, составляет 30 *Бэв* (США) и 28 *Бэв* (Церн, Швейцария).

Линейные ускорители. Принцип работы линейного ускорителя легко понять из рис. 198. Ряд цилиндрических полых электродов, расположенных на одной прямой, питаются переменным напряжением. Между ними возникает электрическое поле, которое ускоряет попадающие в зазор частицы. Пройдя зазор, частица попадает внутрь электрода, где электрическое поле практически равно нулю, и движется по инерции. Если через время, необходимое частице для прохождения электрода, поменять

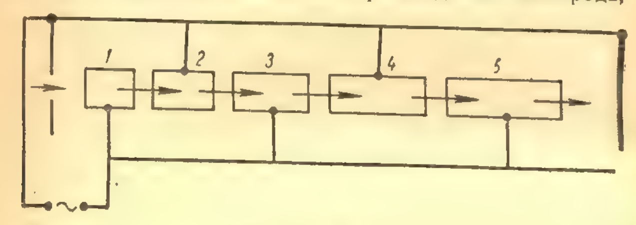


Рис. 198

полярность напряжения, то частица будет снова ускоряться электрическим полем. Так как скорость частицы возрастает по мере увеличения энергии, то длина электродов должна возрастать с тем, чтобы частица пролетала их за одно и то же время, равное половине периода переменного поля. Однако по мере того, как частица набирает все большую и большую энергию, скорость ее приближается к скорости света, поэтому длина электродов перестает возрастать. В линейных ускорителях могут использоваться как легкие частицы (электроны), так и тяжелые (протоны). Протоны ускоряются до 68 *Мэв* (США), а электроны до 1 *Бэв* (Франция) и 0,7 *Бэв* (США). Длина последнего равна 670 *м*.

Ускоренные частицы являются теми снарядами, которыми обстреливают ядра с целью изучения ядерных сил и свойств ядер.

Ускорители на большие энергии позволяют генерировать большое число элементарных частиц — мезонов, античастиц и др. Это позволит проникнуть в тайны природы элементарных частиц и их свойств.

Для решения этой задачи понадобятся ускорители с еще большими энергиями. В связи с этим возникает задача разработки принципиально новых методов ускорения, связанных, в частности, со свойствами плазмы.

§ 6. Масс-спектроскопия

Задачи масс-спектроскопии. Одной из характеристик любой частицы является ее масса, определение ее — одна из основных задач масс-спектроскопии. Это «взвешивание» элементарных частиц или ионов проводится с очень большой точностью (до 10^{-4}% и больше).

Второй не менее важной задачей является определение изотопного состава того или иного элемента.

Третья задача, непосредственно связанная со второй и с потребностями практики, состоит в разработке способов разделения изотопов, основанных

на особенностях движения ионов изотопов в полях (электромагнитный способ разделения изотопов).

Перечисленные задачи решаются применением однотипных приборов, которые называются по-разному в зависимости от их назначения.

Прибор, служащий для точного измерения масс изотопов, называется масс-спектрографом. Для регистрации пучка ионов чаще всего в них применяется фотографическая эмульсия. Прибор, служащий для изотопного анализа, называется масс-спектрометром. В масс-спектрометре для регистрации ионов применяются фотоэлектрические приспособления.

Масс-спектроскопический анализ сводится к ряду операций:

1) превращение исследуемых изотопов в положительные ионы с некоторым зарядом q;

2) получение ионного пучка путем ускорения ионов в продольном электрическом поле до некоторого значения энергии qV;

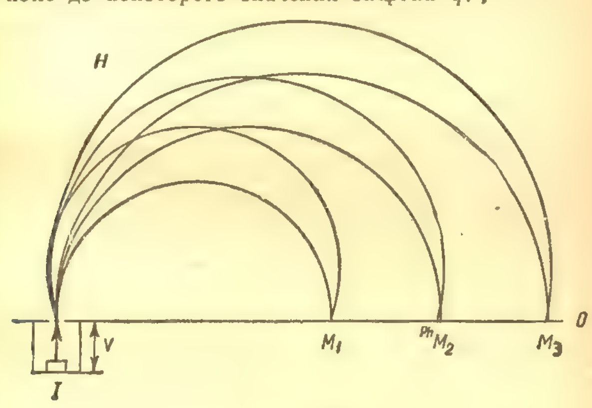


Рис. 199

3) разложение ионного пучка на ряд пучков ионов в зависимости от их массы M при одном и том же q (точнее в зависимости от M/q);

4) регистрация каждого пучка и измерение его интенсивности (определение состава) и расстояния между различными максимумами (определение масс).

Принцип работы масс-спектрографов. В основе действия любого масс-спектрографа лежит зависимость траектории заряженной частицы от ее массы. В настоящее время имеется большое число конструкций масс-спектрографов. Рассмотрим масс-спектрограф, условно называемый «масс-спектрограф с фокусировкой на π радиан» (рис. 199). Ионный источник I создает ионы исследуемого вещества, которые ускоряются электрическим полем V. Получив энергию $T = \frac{p^2}{2M} = qV$ ионы попадают в однородное поперечное магнитное поле H, где будут двигаться по окружности некоторого радиуса

$$r = \frac{cp}{qH}.$$

Но $p = (2MqV)^{1/2}$, следовательно,

$$r = \frac{c(2MqV)^{1/2}}{qH} = \frac{c\sqrt{2V}}{H}\left(\frac{M}{q}\right)^{1/2} = A\left(\frac{M}{q}\right)^{1/2}.$$

Так как $A = \frac{c\sqrt{2V}}{H}$ имеет одно и то же значение для любых ионов, то ионы, имеющие разные массы M при одном и том же заряде q, будут двигаться по окружности разного радиуса. Если по линии VO (рис. 199) расположить приемники ионов, то ионы различных изотопов попадут в разные точки M_1, M_2, M_3. Расстояние между приемниками δl будет равно разности диаметров $\delta l = 2\delta r$.

Относительная разность радиусов равна:

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta M}{M}.$$

Найденное соотношение показывает, что при данной базе $2r$ расстояние между точками, в которых собираются ионы одной массы, прямо пропорционально разности масс и обратно пропорционально средней массе. Следовательно, при $\delta M = 1$ теснее всего будут лежать массовые линии тяжелых элементов.

Пример. Необходимо разделить изотопы урана U^{235} и U^{238}:

$$\frac{\delta M}{M} \approx \frac{1}{80}.$$

^{14}N $^{12}CH_2$ ^{16}O $^{14}NH_2$ $^{12}CH_4$ $^{12}C^{16}O$ $^{14}N_2$

Рис. 200

He^+ D_2^+

0,025604 единицы массы ± 0,000008

Рис. 201

Тогда

$$\delta l = r\frac{\delta M}{M} = \frac{2r}{160},$$

т. е. расстояние между линиями U^{235} и U^{238} составляет одну стошестидесятую долю размеров базы. Следовательно, если база будет иметь величину $l = 256$ *см*, то $\delta l = 1{,}6$ *см*.

Изотопы. *Масс-спектроскопический анализ показал, что атомы одного и того же элемента могут иметь различные массы. Такие атомы называются изотопами элемента.*

Измерение масс изотопов. Массы атомов измеряются с очень большой точностью. За единицу измерения масс в физике принимается $^1/_{16}$ массы наиболее распространенного изотопа кислорода, который приблизительно в 16 раз тяжелее легкого изотопа водорода. Другими словами, масса атома данного сорта кислорода принимается по определению равной 16,000000.... Измерение масс атомов сводится, таким образом, к сравнению массы данного изотопа с массой атома одного из изотопов кислорода.

Для точного измерения масс используют метод дублетов — сравниваются близкие массы двух атомов или молекул, имеющие одинаковые массовые числа. Набор таких пар (дублетов) позволяет определить массы атомов очень точно. На рис. 200 даны примеры подобных дублетов. Промерив рас-

стояния между линиями и зная характеристики прибора, можно определить массы атомов H, C, N. Зная массу H, можно найти массу D, составив пару $H_2^+ - D^+$ и т. д. На рис. 201 приведен пример разрешения дублета $He^{4+} - D_2^+$. Обращает внимание, что ширина массовых линий во много раз меньше расстояния между ними, что и обеспечивает большую точность в определении масс.

Определение изотопного состава элементов. Определение распространенности изотопов, процентного состава обогащенных смесей производится на спектрометрах путем регистрации ионных токов по точкам или на осциллографе. На рис. 202 приведен спектр масс ртути. Определение процентного состава производится с относительной ошибкой порядка одного процента. В настоящее время у 92 элементов насчитывается около 280 стабильных изотопов. Всего известно около 1 000 изотопов,

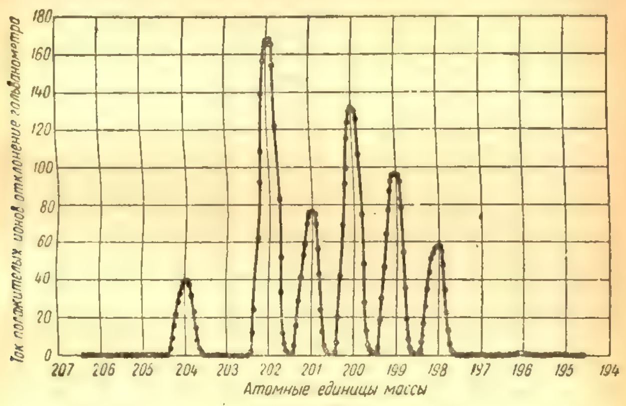


Рис. 202

Делительные машины (электромагнитные сепараторы). В принципе любой масс-спектроскопический прибор позволяет выделять чистые изотопы, однако, скорость деления у них будет очень мала. Для этого должны быть использованы специальные приборы, отличительной особенностью которых является большой ионный ток и использование электрического и магнитного полей, осуществляющих собирание ионов, имеющих разные скорости и идущих под разными углами (двойная фокусировка).

Ионный ток составляет обычно доли ампера. Подсчитаем, за какое время выделяется 1 *г* изотопа U^{235}, если сила ионного тока $I = 0{,}1$ *а*, ионы $_{92}U$ — однозарядные. В каждую секунду ионный источник даст $0{,}1 \cdot 6{,}25 \cdot 10^8$ ионов, из них на долю U^{235} приходится 0,00715 часть. Составим уравнение:

$$1\ г = 6{,}25 \cdot 10^{17} \cdot 0{,}0715 \cdot 235 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24}\, t,$$

откуда

$$t = 5{,}7510^4\ сек = 16\ час.$$

Абсолютное значение масс атомов. Нахождение абсолютного значения масс атомов проводится с меньшей точностью, чем определение массс атомов в кислородных единицах.

Для нахождения абсолютного значения атомной единицы массы (*а. е. м.*) необходимо знать число Авогадро:

$$1\ a.\ e.\ м. = \frac{1}{16} M_{O^{16}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16 г}{N} = \frac{1}{N}\ г.$$

В настоящее время для числа Авогадро принято значение

$$N = (6{,}02502 \pm 0{,}00016) \cdot 10^{23}\ моль^{-1};$$

следовательно,

$$1\ a.\ e.\ м. = 1{,}6605 \cdot 10^{-24}\ г.$$

Для перевода массы атома в граммы необходимо массу в *а. е. м.* умножить на величину 1 *а. е. м.* в граммах:

$$m\,(г) = M\,(а.е.м.) \cdot 1{,}66\ldots 10^{-24}.$$

Применение масс-спектроскопии. Помимо указанных применений масс-спектроскопия находит все большее и большее применение в технике и промышленности — анализ веществ, контроль за технологическим процессом, обнаружение течей в газопроводах и вакуумных системах, при анализе атмосферы с помощью спутников и т. п.

§ 7. Рентгеновы лучи (спектры)

Общие свойства рентгеновых лучей

Получение рентгеновых лучей. Для получения рентгеновых лучей служат специальные рентгеновские трубки (рис. 203). В них имеется накаливаемый катод *K*, являющийся источником электронов, и анод *A*, между которыми приложена высокая разность потенциалов. При резком торможении электронов в результате их соударения с атомами вещества анода возникают рентгеновы лучи. При этом возникает два типа рентгеновского излучения — тормозное и характеристическое.

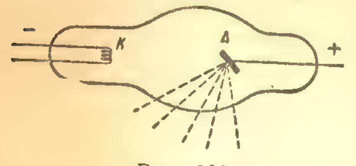


Рис. 203

Тормозное излучение. Природа тормозного излучения может быть легко объяснена с точки зрения электромагнитной теории — при соударении электрон резко тормозится, но ускоренное движение заряда приводит к возникновению электромагнитного поля. Тормозное излучение имеет сплошной спектр. Распределение энергии по спектру имеет максимум при некоторой частоте, оно плавно уменьшается в сторону больших длин волн, стремясь асимптотически к нулю при $\lambda \to \infty$. При уменьшении длины волны интенсивность тормозного излучения уменьшается более круто и резко обрывается при некоторой длине волны, называемой граничной.

Положение граничной частоты так же, как и характер распределения энергии тормозного излучения в спектре, не зависит от материала антикатода (анода).

Граничная частота $\nu_г$ определяется только ускоряющим напряжением V, при этом

$$\nu_г \sim V.$$

С ростом ускоряющего напряжения интенсивность излучения увеличивается, максимум сдвигается в сторону больших частот.

Наличие резкой коротковолновой границы можно объяснить, исходя из фотонной теории света. Электрон, пройдя разность потенциалов V, имеет энергию eV. При столкновении с атомом часть энергии излучается в виде фотона, часть передается атому: $eV = h\nu + T$. Максимальная частота определяется условием, что вся кинетическая энергия электрона ушла на создание кванта: $h\nu_{\Gamma} = eV$.

Для λ_{Γ} получается уравнение:

$$\lambda_{\Gamma} = \frac{ch}{eV}.$$

(Это уравнение позволяет определить константу Планка h). Если в формуле подставить значения постоянных, то для λ_{Γ} получается удобное для запоминания выражение:

$$\lambda_{\Gamma}(\mathring{A}) = \frac{12\,395}{V\,(в)} \cong \frac{12\,345}{V\,(в)}.$$

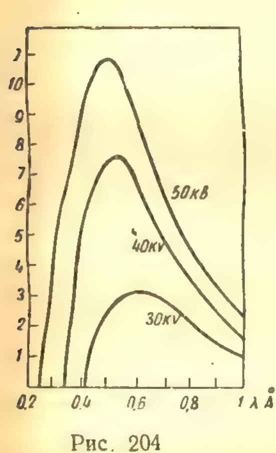


Рис. 204

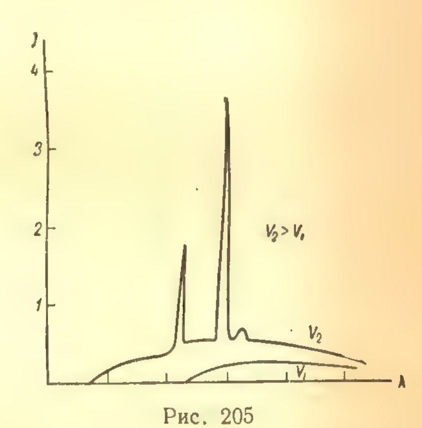


Рис. 205

Распределение энергии по спектру тормозного излучения приближенно дается выражением:

$$I(\lambda) = \frac{I_0 c^2 Z}{\lambda_{\Gamma} \lambda^3}(\lambda - \lambda_{\Gamma}).$$

Оно справедливо почти во всей области за исключением непосредственной области коротковолновой границы λ_{Γ}. Максимум распределения находится при $\lambda_{макс} = \frac{3}{2}\lambda_{\Gamma}$. На рис. 204 приведено распределение $I(\lambda)$ для вольфрамового антикатода при различных напряжениях V.

Х а р а к т е р и с т и ч е с к о е и з л у ч е н и е. Если увеличивать ускоряющее напряжение, то при некотором напряжении на фоне сплошного спектра появляется излучение резкой линии (рис. 205).

Частота этой линии зависит только от материала антикатода и не зависит от ускоряющего напряжения V, если оно больше некоторого критического V_k, необходимого для появления данной линии.

При приложении некоторого достаточно большого ускоряющего напряжения в рентгеновском излучении появляется определенный набор частот, или длин волн, полностью характеризующих вещество антикатода (анода), поэтому это излучение называется х а р а к т е р и с т и ч е с к и м.

Характеристическое излучение данного элемента не зависит от вида химического соединения, в котором он присутствует в веществе антикатода. Этим оно резко отличается от оптического спектра.

Спектральные линии характеристического излучения образуют закономерные последовательности, или серии. Самая коротковолновая серия обозначается буквой K, затем L, M, N. Число серий растет с увеличением атомного номера элемента в таблице Менделеева.

Ослабление рентгеновского излучения. При прохождении рентгенового луча через вещество его интенсивность уменьшается — пучок ослабляется. Ослабление пучка обусловлено двумя причинами — поглощением рентгеновских фотонов и их рассеянием. При этом рассеяние возможно с той же частотой — когерентное, или релеевское, рассеяние и с изменением частоты (ее уменьшением) — комптоновское рассеяние, или комптон-эффект.

При прохождении слоя толщиной dx монохроматический параллельный пучок ослабляется на величину $-dI = \mu I dx$. При прохождении слоя толщиной d пучок ослабляется по закону:

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

где I_0 — интенсивность падающего на слой пучка (если пренебречь отражением),

μ — коэффициент ослабления; он имеет размерность обратной длины и измеряется в $см^{-1}$; $\frac{1}{\mu}$ — численно равно толщине слоя, по прохождении которого пучок ослабляется в $e = 2{,}71818$ раза.

Опыт показывает, что μ пропорционален массе вещества, проходимой рентгеновским пучком.

Величина $\mu_\rho = \frac{\mu}{\rho}$ называется массовым коэффициентом ослабления. Она имеет размерность

$$[\mu_\rho] = г^{-1}\ см^2.$$

Следовательно,

$$I = I_0 e^{-\mu_\rho \rho d}.$$

Но ρd есть величина массы, приходящейся на 1 $см^2$ площади, через которую проходит пучок $\rho d = m_S$. Тогда

$$I = I_0 e^{-\mu_\rho m_s}.$$

Следовательно, $\frac{1}{\mu_\rho}$ — численно равно той массе, приходящейся на 1$см^2$ площади образца, при прохождении которой пучок ослабляется в e раз.

Атомным коэффициентом ослабления называется величина, численно равная произведению массового коэффициента поглощения μ_ρ на массу атома $m_a = \frac{A}{N}$, где A — грамм-атомный вес, а N — число Авогадро:

$$\mu_a = \mu_\rho m_a = \mu_\rho \frac{A}{N} = \frac{\mu}{\rho} \frac{A}{N}.$$

Размерность

$$[\mu_a] = \left[\frac{см^{-1}\ г\ моль^{-1}}{г\ см^{-3}\ \ моль^{-1}}\right] = см^2.$$

Величину μ_a можно рассматривать как эффективное сечение атома для процесса ослабления рентгеновых лучей.

Так как ослабление обусловлено рассеянием и поглощением, то коэффициент ослабления можно представить в виде суммы коэффициента поглощения τ и коэффициента рассеяния σ:

$$\mu = \tau + \sigma,$$

$$\mu_a = \tau_a + \sigma_a.$$

Зависимость атомного коэффициента поглощения от длины волны и заряда ядра атомов рассеивающего вещества определяется эмпирически установленной формулой:

$$\tau_a = cZ^4 \lambda^3.$$

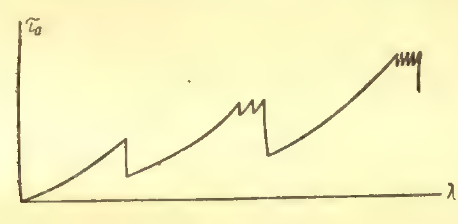


Рис. 206

Зависимость массового коэффициента определяется выражением:

$$\tau_\rho = \frac{cNZ^4 \lambda^3}{A}.$$

Так как грубо

$$A \sim 2Z,$$

то

$$\tau_\rho \sim Z^3 \lambda^3.$$

Атомный коэффициент поглощения элемента не зависит от вида химического соединения, в которое входит данный элемент. Поэтому коэффициент поглощения молекулы равен сумме коэффициентов поглощения образующих ее атомов.

На рис. 206 дана зависимость τ_a от длины волны λ. Монотонное изменение $\tau_a(\lambda) \approx \lambda^3$ при некоторых длинах волн сменяется резким скачком. Кроме того видно наличие одного, трех, пяти максимумов.

Спектры рентгеновых лучей. На рис. 207 приведена схема рентгеновских спектров элементов от кислорода до урана.

Рентгеновские спектры содержат малое число линий, расположенных однотипно, закономерно в зависимости от Z. Они резко отличаются от оптических спектров, содержащих большое число линий — до нескольких тысяч (Fe, редкие земли) и периодически подобных.

Рентгеновские спектры являются атомным свойством, они не меняются, когда элемент вступает в химические соединения.

Спектры распадаются на несколько серий. Наиболее коротковолновая серия называется K-серией. Она состоит из трех линий K_α, K_β, K_γ. K_α наиболее длинноволновая и интенсивная, является дублетом K_{α_1} и K_{α_2}. K_β тоже дублет, но не всегда разрешенный. Серии L и M имеют более сложную структуру.

Закон Мозели. Мозели нашел (1913—1914), что корень квадратный из волновых чисел линий одной и той же серии прямо пропорционален заряду ядра:

$$\sqrt{\nu} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \approx Z.$$

Для линий K_α связь между ν и Z имеет следующий вид:

$$\sqrt{\frac{\nu_{K\alpha}}{\frac{3}{4}R}} = Z - 1.$$

Отсюда

$$\nu_{K\alpha} = R\,(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

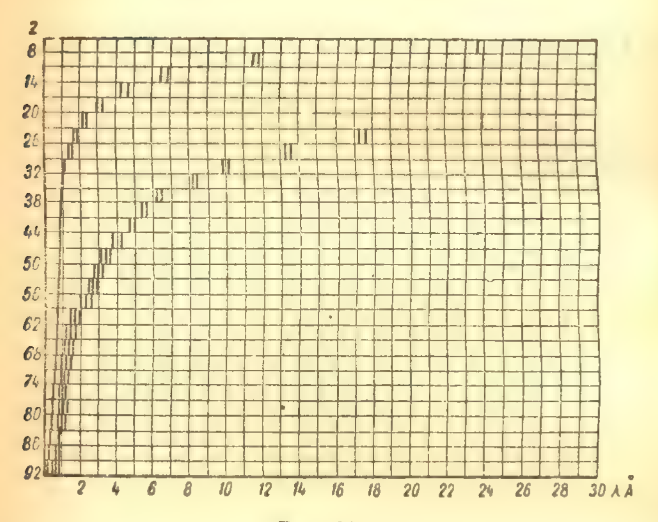


Рис. 207

Закон Мозели позволяет определить заряд ядра по положению линий рентгеновского спектра.

Для других серий выражение имеет вид:

$$\nu_L = R\,(Z-\sigma_L)^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right);$$

$$\nu_M = R\,(Z-\sigma_M)^2\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right).$$

Константа σ носит название константы экранирования. Она слабо зависит от Z. Для K-серии $\sigma_K \approx 1$ для L серии $\sigma \approx 8$.

Механизм возникновения рентгеновского характеристического спектра. Возникновение характеристического спектра можно представить следующим образом. Электрон внутренней оболочки атома выбивается падающим электроном или рентгеновским фотоном. На освободившееся место переходят электроны, лежащие в верхних оболочках. Избыток энергии при этом излучается в виде рентгеновского фотона. На рис. 208 приведена схема образования K,-L,-M серий. K-серия обусловлена выбиванием электрона из K-оболочки и переходом в нее электронов из L (K_α), M (K_β) и N (K_γ) уровней. L-серия обязана переходом на

L-оболочку и т. д. Пунктиром обозначены слабые линии, возникающие при $\Delta j = 2$ (квадрупольные переходы).

Сложная структура линий и спектра поглощения. Наличие на кривой поглощения максимумов объясняется слож-

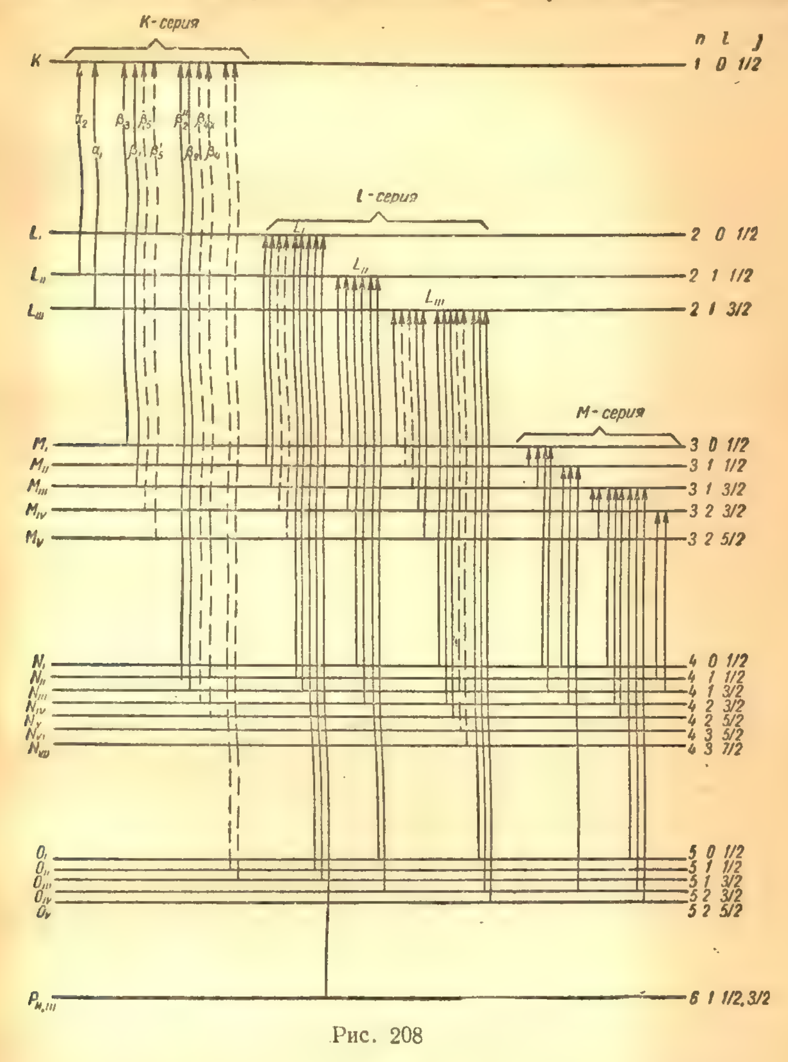


Рис. 208

ной структурой энергетических уровней. Один коротковолновой максимум объясняется тем, что уровень 1 s простой. Уровень L состоит из трех подуровней $2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$, что и определяет наличие трех максимумов границы поглощения L-серии. Уровень M состоит из пяти подуровней $3s_{1/2}$, $3p_{1/2}$, $3p_{3/2}$ $3d_{3/2}$, $3d_{5/2}$, поэтому граница поглощения состоит из пяти максимумов, соответствующих выбиванию электронов из этих состояний.

Дифракция рентгеновых лучей. Рентгеновы лучи обладают свойством дифрагировать, но так как их длина волны мала по сравнению с областью видимого света, то для ее наблюдения требуется решетка с постоянной порядка нескольких Å. Поэтому для наблюдения дифракции рентгеновых лучей используется решетка кристалла. Для измерения λ используются обычные оптические дифракционные решетки, на которые рентгеновы лучи падают под большим углом ($\sim 90°$), что приводит к эффекту уменьшения периода решетки.

Условие максимума для одномерной или линейной решетки имеет вид:

$$a_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m_1 \lambda,$$

где a_1 — расстояние между атомами,

α_0 — угол между падающими лучом и решеткой и

α — угол между дифрагированным лучом и решеткой. При m_1 целом направление на максимум определяется условием:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + m_1 \frac{\lambda}{a_1}.$$

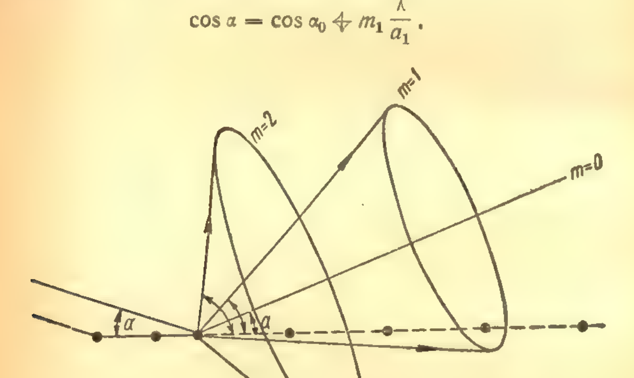


Рис. 209

При $m = 0, 1, 2, \ldots$ это соотношение определяет направление на дифракционный (правильнее — интерференционный) максимум 0-го, 1-го, 2-го порядков. В пространстве это определяется коническими поверхностями с углами при вершине $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (рис. 209).

Условие для интерференционного максимума на трехмерной решетке получается последовательным применением условий для линейной решетки. Для кубической решетки можно записать:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + m_1 \frac{\lambda}{a_1}; \quad m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\cos \beta = \cos \beta_0 + m_2 \frac{\lambda}{a_2}; \quad m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\cos \gamma = \cos \gamma_0 + m_3 \frac{\lambda}{a_3}; \quad m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где a_1, a_2, a_3 — расстояния между соседними атомами вдоль различных кристаллографических осей. Но на эти три дифракционные уравнения необходимо наложить одно геометрическое условие;

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Отсюда следует, что четыре уравнения могут быть удовлетворены не при любых длинах волн. Существуют различные способы наблюдения и расчета дифракции рентгеновых лучей.

Метод Лауэ. В этом методе на монокристалл направляется «белый» рентгеновский спектр, вследствие чего для определенных λ удовлетворяются все четыре уравнения и на фотопластинке образуются дифракционные пятна.

Метод Дебая—Шерера. При этом методе используется монохроматическое излучение, которое направляется на поликристалл, вследствие чего всегда найдутся такие кристаллики, для которых будут выполнены все четыре условия. На рис. 210, *а*, *б*, приведены схема установки и дебаеграммы двух модификаций железа (α и γ).

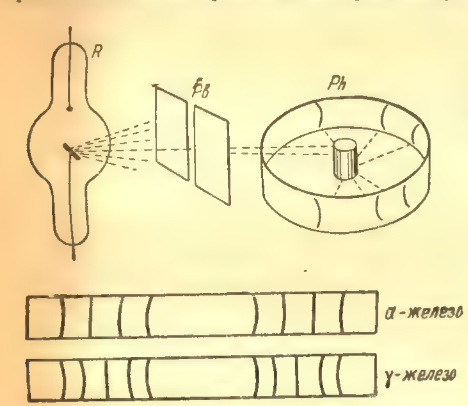


Рис. 210

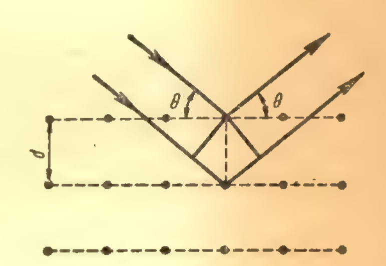


Рис. 211

Метод Вульфа — Брэгга. Русский кристаллофизик Ю. В. Вульф и английские физики У. Г. Брэгг и У. А. Брэгг предложили другой метод расчета и объяснения рентгенограмм, полученных как по методу Лауэ, так и по методу Дебая — Шерера. Каждое пятно рентгенограммы они предлагают считать как интерференционный максимум, получающийся в результате отражения от соответствующих семейств атомных плоскостей (рис. 211), отстоящих друг от друга на расстояниях d.

Луч, претерпевая частичное зеркальное отражение на параллельных атомных плоскостях, после отражения дает интерференционный максимум, если разность хода будет равна целому числу длин волн.

Величина разности хода равна $2d\sin\theta$, где θ угол скольжения. Следовательно, условие максимума:

$$2d\sin\theta = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Эта формула носит название формулы Вульфа — Брэгга. Она лежит в основе рентгеновской спектроскопии и электронографии и служит для исследования строения кристаллов.

Единицы измерения. Абсолютное определение длины волны рентгеновых лучей проводится с дифракционными решетками, содержащими несколько сот штрихов на *мм* при малых углах скольжения.

Единицей измерения служит *x* или *кx* (икс или килоикс). При этом

$$1кx = (1{,}00203 \pm 0{,}00003)\ \mathring{A} \quad 1x = 10^{-3}\ кx.$$

Поляризация рентгеновых лучей. С рентгеновыми лучами можно проводить опыты по поляризации (опыты Баркла),

которые доказывают поперечность колебательного процесса, связанного с движением рентгеновских фотонов. Схема опыта состоит в следующем. Из рентгеновской трубки R (рис. 212) в направлении оси x выходит пучок лучей и падает на пластинку какого-либо вещества, которое их рассеивает. В направлении оси y, перпендикулярном первичному пучку, рассеянный пучок падает на такую же пластинку. Если поставить приемник в направлении 3 (вдоль оси x), то он покажет присутствие рентгеновых лучей, но в направлении 4 (вдоль оси z) рентгеновых лучей нет, хотя направления 3 и 4 по отношению к лучу 2, казалось бы, совершенно равноправны.

Этот факт легко объясняется электромагнитной теорией рентгеновых лучей. Из трубки R в направлении 1 идут колебания всевозможных направлений (в перпендикулярной к лучу плоскости). Но рассеянный в направлении 2 луч будет содержать только колебания bb', т. е. луч будет линейно поляризованным. При его рассеянии вторым телом в направлении 3 пойдет луч с теми же колебаниями bb', но в направлении 4 — перпендикулярном к плоскости чертежа — рассеянного луча не должно быть в силу поперечности электромагнитных колебаний. В плоскости (xz), перпендикулярной лучу 2, для направления, составляющего

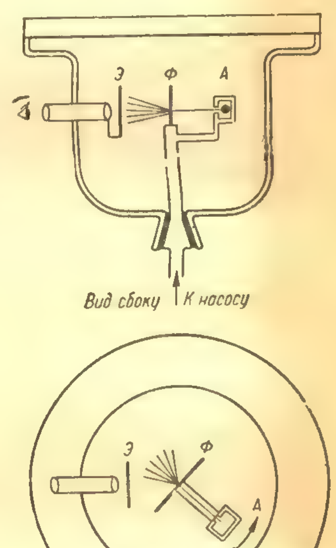


Рис. 212

Рис. 213

угол φ с направлением первичного пучка 1 (с осью x), интенсивность рассеянных лучей должна быть $\sim \cos^2 \varphi$, т. е. в соответствии с законом Малю в оптике.

Применение рентгеновых лучей. Рентгеновые лучи применяются для изучения структуры внутренних электронных оболочек и кристаллов; определения физических констант: e/m, Z, h и др.; в медицине (просвечивание, терапия); технике (дефектоскопия, импульсная рентгенография и др.).

§ 8. Ядерная модель атома Резерфорда

Модель атома Томсона. Из молекулярной физики известно, что размеры атомов и молекул имеют величину порядка нескольких ангстремов ($1 \mathring{A} = 10^{-8}$ *см*).

В первой модели атома, предложенной Томсоном, предполагалось, что вещество в атоме распределено равномерно по сфере диаметра ~ 1 Å. Это вещество заряжено положительно, в нем «плавают» электроны. Колебательное движение электронов возбуждает в пространстве электромагнитные волны. Эти наглядные представления надо было проверить экспериментально, что было сделано в опыте английского физика Эрнеста Резерфорда (1871 — 1931).

Опыт Резерфорда. На рис. 213 представлена схема установки Резерфорда. Радиоактивный препарат *А* дает α -частицы в виде узкого пучка. На люминесцирующем экране *Э* получается светящаяся точка. Резерфорд ставил на пути пучка α-частиц тонкую золотую фольгу *Ф*. Тогда, согласно модели атома Томсона, α-частица не может пройти даже через очень тонкую фольгу — фольга непрозрачная, так как атомы заполняют все пространство; α-частицы должны остановиться, передав свою энергию и импульс фольге в целом. Однако опыты показали (рис. 214) что: 1) основная масса α-частиц

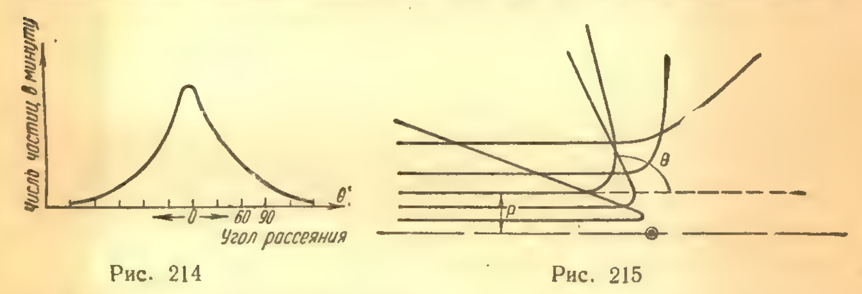


Рис. 214 Рис. 215

проходит сквозь фольгу в направлении своего первоначального движения — фольга почти прозрачна для α-частиц; 2) наблюдаются α-частицы, рассеянные на различные углы θ, при этом с ростом угла рассеяния число рассеянных частиц падает; 3) наблюдается незначительное число α-частиц, рассеянных на очень большой угол, достигающий 180°, т. е. отброшенные назад. Для того, чтобы α-частица, имеющая энергию в несколько *Мэв*, могла быть отброшена назад, необходимо, чтобы при столкновении на нее подействовали очень большие силы, что может быть только в случае, если при столкновении α-частицы и атома их центры сближаются на расстояние $\sim 10^{-12}$ *см*, а не 10^{-8} *см*.

Ядерная модель атома Резерфорда. На основании этих фактов Резерфорд предположил, что атом состоит из положительно заряженного ядра с зарядом $+Ze$ в котором сосредоточена почти вся масса атома. Размеры ядра много меньше размеров атома. Вокруг этого ядра движутся по некоторым орбитам Z электронов. В таком случае рассеяние объясняется следующим образом (рис. 215). Если бы α-частица не взаимодействовала с ядром, то она пролетела бы от него на некотором расстоянии p, называемом прицельным расстоянием (пунктирная прямая на рис. 215). Но ядро отталкивает α-частицу, которая начинает двигаться в этом случае по гиперболе, отклонившись на угол θ от первоначального направления. Величина отклонения будет тем больше, чем меньше p, чем больше Z и чем меньше кинетическая энергия α-частицы (рис. 215).

Так как масса электрона мала, то влиянием электронов на траекторию α-частицы можно пренебречь. Можно найти угол отклонения θ в зависимости от p, Z, $\frac{mv^2}{2}$. Однако проверить таким образом теорию невозможно, ибо невозможно измерить p, которое будет иметь любое значение. Поэтому Резерфорд применяет методы статистики (теории вероятности), в результате чего он получает следующую формулу:

$$\Delta N \sin^4 \frac{\theta}{2} = \text{const}, \quad \text{если } d\theta = \text{const},$$

где ΔN — число частиц рассеянных фольгой в угловой интервал величиной $d\theta$ под углом θ.

Число частиц ΔN подсчитывалось с помощью микроскопа по вспышкам, которые возникают на экране при ударе о него α-частиц. Несмотря на то, что ΔN $\left(\text{и } \sin^4 \frac{\theta}{2}\right)$ меняются в очень широком пределе, их произведение остается постоянным. Это говорит о правильности исходных предпосылок.

Теория рассеяния α-частиц. Пусть масса ядра много больше массы α-частицы. Предположим, что взаимодействие частицы с ядром даже при очень малых расстояниях порядка 10^{-12} *см* определяется законом Кулона (это предположение представляет собой гипотезу). Тогда потенциальная энергия α-частицы в поле ядра равна

$$U = \frac{Z_1 Ze^2}{r}.$$

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{Z_1 Z}{r} e^2 = E,$$

где M — масса α-частицы,
E — ее полная энергия.

По закону сохранения момента количества движения:

$$Mr^2\dot{\varphi} = Mpv.$$

Переходя от уравнений движения к уравнению траектории, можно получить связь между углом рассеяния и характеристиками α-частицы и ядра:

$$\text{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{Mv^2 p}{ZZ_1 e^2}.$$

Непосредственная проверка этой формулы невозможна в силу того, что невозможно определить p — прицельное расстояние. Резерфорд применил методы статистики, предположив, что p меняется случайным образом, пробегая все значения от ∞ до 0.

Число α-частиц, имеющих прицельное расстояние в интервале p, $p - dp$, пропорционально площади кольца $2\pi p dp$. Но интервал прицельного расстояния dp связан с угловым интервалом $d\theta$:

$$\frac{d\theta}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = -\left(\frac{Mv^2}{Z_1 Ze^2}\right) dp.$$

В таком случае для α-частиц, проходящих через кольцо $2\pi p dp$, эффективное сечение рассеяния равно

$$d\sigma = n 2\pi p dp,$$

где n — число рассеивающих центров на единице площади фольги. Все dN рассеянных α-частиц отклоняются на угол θ и попадут в угловой интервал $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$.

Но

$$d\sigma = \frac{dN}{N},$$

где N — число частиц в падающем пучке.

Тогда

$$\frac{dN}{N} = d\sigma = n2\pi p dp = -\frac{n2\pi}{4}\left(\frac{Z_1 Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta =$$

$$= -n\pi\left(\frac{Z_1 Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

В условиях опыта можно сделать постоянными $\left(\frac{Z_1 Ze^2}{Mv^2}\right)^2$, $d\Omega$, n, N. Тогда

$$dN \sin^4\frac{\theta}{2} = \text{const}.$$

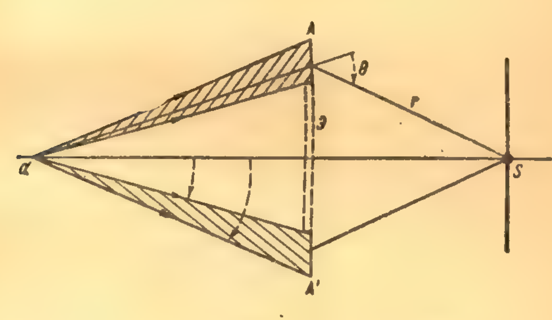


Рис. 216

При изменении угла рассеяния θ подсчитывались сцинтиляции, т. е. число рассеянных частиц dN, соответствующее данным условиям опыта. $\sin^4\frac{\theta}{2}$ и dN менялись в очень широких пределах, dN менялось от 33 при $\theta = 150°$ до 132 000 при $\theta = 15°$, произведение оставалось постоянным.

Опыты Чадвика (определение заряда ядра). Формула Резерфорда позволяет определить заряд ядра. Для этого, кроме $\frac{eZ_1}{Mv^2}$, n и θ необходимо определить dN и N одновременно. Это удалось сделать английскому физику Джеймсу Чадвику (1891). На рис. 216 дана схема его опыта. Рассеивающая фольга имеет вид кольца AA^1. α-препарат и флюоресцирующий экран расположены на одинаковом расстоянии r от фольги. Если внутрь кольца вставить непрозрачный для α-частиц экран Э, закрывающий прямой пучок, то можно подсчитать в точке S число частиц только рассеянных кольцом на угол θ. Если экран Э убрать, то можно подсчитать число частиц в прямом пучке, который обычно ослаблялся прерыванием в известное число раз. Чадвик получил, например, для Pt $Z = 77{,}4$, для Ag $Z = 46{,}3$; для Cu $Z = 29{,}3$. Таким образом, опыты Чадвика показали, что заряд ядра Z (в единицах $e = 4{,}802 \cdot 10^{-10}$ СГСЕq) численно равен порядковому номеру элемента в таблице Менделеева.

Следствия опыта и теории Резерфорда: 1) Внутри атома имеется положительно заряженное ядро с зарядом $+Ze$, в котором сосредоточена почти вся масса атома.

2) Размеры этого ядра меньше, чем 10^{-12} *см*. Этим и объясняется «прозрачность» фольги.

3) Закон Кулона, на основании которого рассчитывается движение рассеянных α-частиц, выполняется до расстояний $\sim 10^{-12}$ *см* между центрами ядра и α-частицы. При меньших расстояниях закон Кулона нарушается. Это нарушение таково, как если бы на α-частицу подействовали силы притяжения. Эти новые силы, действующие на коротком расстоянии, называются ядерными.

§ 9. Теория атома водорода по Бору

Спектр. Набор частот (или длин волн) излучения, которое испускается данным телом, называется его спектром. Нагретые твердые тела испускают сплошной спектр.

Свободные, невзаимодействующие между собой, атомы имеют линейчатый спектр, состоящий из определенного набора длин волн (или частот). Молекулы испускают полосатый спектр — они испускают определенные полосы или группы густо расположенных линий.

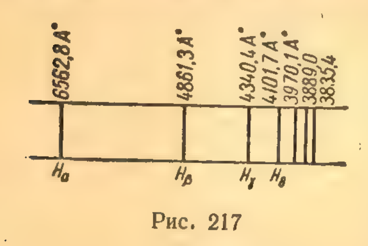


Рис. 217

Спектр вещества является одной из его важнейших характеристик. В природе не существует двух одинаковых спектров — этот факт лежит в основе спектрального анализа — вещества распознаются по их спектрам.

Спектр водорода. Атом водорода имеет наиболее простой спектр. В видимой области содержится несколько линий, получивших специальное название: H_α (красная), H_β (зелено-голубая) H_γ (синяя), H_δ, H_ε (фиолетовые). На рис. 217 приведен спектр водорода в видимой и ближней ультрафиолетовой области и указаны длины волн линий.

Швейцарский физик Иоган Яков Бальмер (1825—1898) подобрал эмпирическую формулу, позволяющую вычислить длины волн линий. Эта группа линий, длины волн которых передаются одной общей формулой, называется спектральной серией — серией Бальмера. Формулу Бальмера удобно писать для волновых чисел: $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$. Волновое число показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке длиной 1 *см*. Для видимой области спектра волновое число изменяется от 12 500 $см^{-1}$ (8000 Å) до 25 000 $см^{-1}$ (4000 Å). Тогда для волновых чисел формула Бальмера имеет вид:

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где $n = 3, 4, 5, 6\dots$ — целое число.

Число $R = 109676{,}576\ см^{-1}$ называется постоянной Ридберга, оно является одной из наиболее точно измеренных констант физики. Полагая $n = 3$, получим волновое число H_α, для $n = 4$ — H_β, для $n = 5$ — H_γ и т. д.

Обращает на себя внимание тип закономерности $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}(n)$, где n принимает только целые значения, тогда как в классической физике все физические величины меняются непрерывно. Спектр атома водорода был впервые (1913) объяснен теоретически Н. Бором.

Неприменимость классической электродинамики к внутриатомным явлениям. В основу своей теории

датский физик Нильс Бор положил ядерную модель атома Резерфорда. Он предположил, что электроны движутся вокруг ядра по круговым орбитам. Движение по окружности даже с постоянной скоростью есть движение ускоренное. Но ускоренное движение заряда есть переменный ток (постоянный ток — это равномерное и прямолинейное движение зарядов), но переменный ток создает в пространстве переменное электромагнитное поле. На создание этого поля расходуется энергия.

Энергия поля может создаваться за счет энергии кулоновского взаимодействия электрона с ядром. В результате электрон должен двигаться по спирали и упасть на ядро. Однако опыт показывает, что атомы — очень устойчивые образования. Отсюда вытекает вывод, что результаты классической электродинамики, основанной на уравнениях Максвелла неприменимы к внутриатомным процессам. Необходимо найти новые закономерности.

П о с т у л а т ы Б о р а. В основу теории атома водорода Бор положил следующие постулаты:

Первый постулат. Электрон в атоме может находиться только в некоторых определенных устойчивых состояниях, которые называются стационарными. Находясь в станционарных состояниях, атом не излучает (этим постулатом утверждается неприменимость классической теории).

Второй постулат. Атом излучает только при переходе из одного стационарного состояния в другое. Если энергия атома в исходном (начальном) состоянии E_k, а в конечном состоянии E_l, то разность энергий начального и конечного состояния будет излучена в виде фотона с частотой ν (условие частот Бора):

$$h\nu = E_k - E_l,$$

где h — постоянная Планка,
ν — частота излучаемой линии,
E_k — энергия начального состояния,
E_l — энергия конечного состояния (условие выражает закон сохранения энергии).

Третий постулат. Из всех возможных состояний в атоме осуществляются только те, для которых момент количества движения M равен целому числу $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (условие квантования орбит), т. е.

$$M = n\hbar = n\frac{h}{2\pi},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — квантовое число.

Э н е р г и я э л е к т р о н а в а т о м е. Полная энергия электрона в атоме складывается из кинетической T и потенциальной U энергий. Потенциальная энергия обусловлена взаимодействием электрона с ядром, она равна $U = -eV$, где $(-e)$ — заряд электрона, а V — потенциал, который создает ядро в том месте, где находится электрон. Предполагаем для общности, что заряд ядра равен Ze, тогда

$$U = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Следовательно, полная энергия

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r},$$

У с л о в и е у с т о й ч и в о с т и д в и ж е н и я э л е к т р о н а. Для движения электрона по окружности ему необходимо сообщать центростремительное ускорение. Это ускорение электрону сообщает сила кулоновского взаимодействия электрона с ядром.

Для кругового движения можно записать:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}.$$

Отсюда найдем связь между значениями кинетической и потенциальной энергиями. Сократив на r, получим:

$$mv^2 = \frac{Ze^2}{r},$$

т. е.

$$mv^2 = 2T = \frac{Ze^2}{r} = -U,$$

или

$$T = -\frac{1}{2}U = -E$$

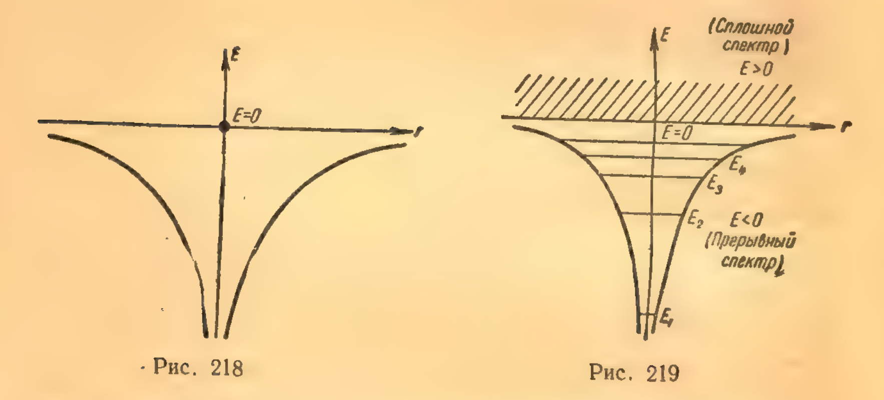


Рис. 218

Рис. 219

(полная энергия отрицательна).

На рис. 218 представлена графическая зависимость возможной полной энергии E от расстояния r между электроном и ядром.

Радиусы стационарных орбит. Из третьего постулата Бора следует, что электрон может находиться не на любых орбитах. Найдем радиусы стационарных орбит. Из выражения $\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}$ следует

$$\frac{r^2m^2v^2}{Ze^2m} = r \qquad \left(r = \frac{M^2}{Ze^2m}\right).$$

Но $[\mathbf{r}m\mathbf{v}] = \mathbf{M}$, а $M^2 = n^2\hbar^2$, следовательно, r принимает только дискретные значения, соответствующие данному n; обозначим эти значения через r_n,
тогда

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{Ze^2m}.$$

Радиус первой боровской орбиты ($n = 1$) для водорода ($Z = 1$) будет равен:

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{e^2m} = 0{,}5285\ \text{Å}.$$

Таким образом, теория Бора дает правильные значения для размеров атомов. Для элемента с порядковым номером Z радиус первой орбиты будет в Z раз меньше. С ростом квантового числа радиусы орбит растут пропорционально квадрату квантового числа n^2:

$$r_n = \frac{r_1}{Z} n^2.$$

Энергия стационарных состояний. Так как радиус может принимать только некоторые избранные значения, то энергия может принимать только некоторые разрешенные значения E_n:

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{1}{2}\frac{Z^2e^4m}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

т. е. энергия изменяется обратно пропорционально квадрату квантового числа n^2. С ростом n энергия растет (уменьшается ее отрицательная величина). На рис. 219 представлены разрешенные значения энергии, так называемые уровни энергии E_n. Так как энергия атома больше при большем n, то следовательно, свет испускается атомом при переходе с более удаленных орбит на менее удаленные орбиты.

Отрицательные значения величины полной энергии на первой боровской орбите атома водорода ($n=1$) равно $E_1 = -13,5$ *эв*, на второй $E_2 = -3,38$ *эв*, на третьей $E_3 = -1,50$ *эв* и т. д., $E_{n=\infty} = 0$ (рис. 219).

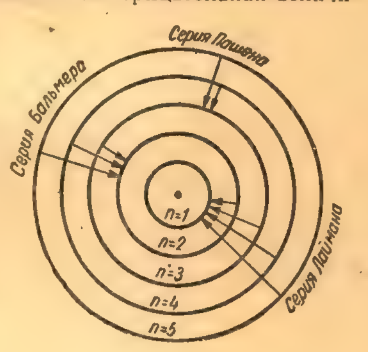


Рис. 220

Спектр атома водорода. Пусть атом водорода переходит из k-го состояния, характеризуемого энергией:

$$E_k = -\frac{1}{2}\frac{Z^2e^4m}{\hbar^2}\frac{1}{k^2},$$

в n-ое состояние с энергией:

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{Z^2e^4m}{\hbar^2}\frac{1}{n^2},$$

тогда волновое число спектральной линии, излучаемой атомом при этом переходе:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{E_k - E_n}{2\pi\hbar c} = \frac{Z^2e^4m}{4\pi\hbar^3c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Подсчитаем коэффициент, стоящий перед скобкой (при $Z = 1$):

$$\frac{e^4m}{4\pi\hbar^3c} \approx 1,10\cdot 10^5\ см^{-1},$$

т. е. коэффициент

$$\frac{e^4m}{4\pi\hbar^3c} = \frac{2\pi^2e^4m}{h^3c} = R$$

есть постоянная Ридберга. В таком случае серия Бальмера получается при $n = 2$ и $k = 3, 4, 5, \ldots$, т. е. при переходе (рис. 220), с верхних уровней (орбит) на второй уровень (орбиту). Однако из выражения для волновых чисел следует, что в атоме водорода могут быть другие переходы:

$$n = 1,\ k = 2, 3, 4, \ldots \quad \tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Эта серия была найдена в далеком ультрафиолете Лайманом и называется его именем (рис. 219).

При $n = 3$, $k = 4, 5, 6, 7, \ldots$ серия была найдена Пашеном в инфракрасной области спектра. Были открыты и другие серии линий.

Из приведенного вытекает, что серией является группа линий, получающаяся при переходе с различных верхних на один и тот же более низкий уровень.

Ограниченность теории Бора. Теория Бора, блестяще объяснив спектр водорода, оказалась не в состоянии объяснить свойства основного состояния атома водорода ($n=1$) (сферически-симметричное распределение заряда, отсутствие орбитального механического и магнитного моментов), а также совершенно непригодной к более сложным атомам, начиная с гелия.

§10. Тонкая структура спектральных линий атома водорода

Формула Дирака для уровней энергии. Водородоподобные атомы (HI, DI, TI, HeII, LiIII и т. д.) являются простейшими атомными системами. Для них квантовая теория позволяет рассчитывать точные значения большинства физических характеристик, позволяет учесть и выделить ряд очень тонких эффектов. Поэтому изучение спектров этих атомов дает возможность проверки основных положений теории.

Тонкая структура спектральных линий является квантоворелятивистским эффектом. Она объясняется результатом действия двух факторов: 1) взаимодействием собственного магнитного момента электрона с магнитным моментом орбитального движения электрона; 2) релятивистской зависимостью массы электрона от скорости. Зависимость этих величин от состояния n, l, j электрона приводит к расщеплению боровского уровня $T_n = \frac{RZ^2}{n^2}$ на несколько подуровней тонкой структуры и смещению их вниз к более отрицательным величинам энергии. Тонкая структура математически описывается полувекторным (спинорным) уравнением Дирака, из которого следует известная формула для энергии состояния nlj:

$$E_{nlj} = -\frac{RhcZ^2}{n^2}\left\{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right\}, \qquad (1)$$

где R — постоянная Ридберга:
h — постоянная Планка;
c — скорость света:
Z — заряд ядра;
α — постоянная тонкой структуры;
n — главное;
l — орбитальное и j — внутренние квантовые числа. Согласно этому выражению состояния с различными l, но одинаковыми j совпадают (j-вырождение).

Выражение для энергии перепишем для величины соответствующего терма, т. е. разделим на $(-hc)$:

$$T_{nj} = \frac{Z^2 R}{n^2}\left\{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right\}.$$

Тонкая структура линий $\nu_{nj,\,n'j'} = -(T_{nj} - T_{n'j'})$ получается при учете правил отбора:

$$\Delta l = \pm 1; \quad \Delta j = 0;\ \pm 1.$$

Структура α**-линии серии Бальмера.** В качестве примера рассмотрим первую линию серии Бальмера трития T_α, которая возникает при переходе с третьего уровня на второй. В таблице приведены переходы, обозначения компонент и расстояния между ними, вычисленные на основании теории Дирака. Приведены теоретические значения относительных интенсивностей $I_{теор}$ компонент. На рис. 22 приведена структура линии: *А* по Дираку; *В* — с учетом смещения Лэмба.

Обозначение	Переход	По Дираку в $1\cdot 10^{-3} см^{-1}$	(лэмб. сдвиг) в $1\cdot 10^{-3} см^{-1}$	I теор.
a	$3d_{5/2}-2p_{3/2}$	0,0000	0,0000	9,00
g	$3d_{3/2}-2p_{1/2}$	328,6	328,6	5,00
f	$3p_{3/2}-2s_{1/2}$	328,6	293,6	2,08
e	$3p_{1/2}-2s_{1/2}$	220,8	185,8	1,04
d	$3s_{1/2}-2p_{1/2}$	220,8	230,8	0,10
b	$3d_{3/2}-2p_{3/2}$	—36,0	—36,0	1,00
c	$3s_{1/2}-2p_{3/2}$	—144,2	—134,2	0,195

На рис. 222 приведена структура линии He^4 II $\lambda 4686 \mathring{A}$ (переход $n = 4 \rightarrow n = 3$).

Тонкая структура первой линии серии Бальмера подвергалась неоднократным исследованиям: ей посвящено несколько десятков работ. Структура линии разрешалась методами спектроскопии высокой разрешающей силы (эталон Фабри — Перо, дифракционная решетка и др.). Однако линии водорода имеют большую доплеровскую ширину даже при охлаждении, поэтому H_α разрешена всего на два комплекса.

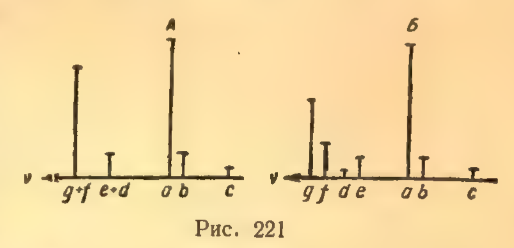


Рис. 221

Дейтерий имеет ширину почти в 1,5 раза, а тритий — в 1,7 раз меньше, поэтому разрешение $D\alpha$ и $T\alpha$ больше. В результате работ оптическими методами физики пришли к выводу, что формула Дирака для энергии не выполняется. На самом деле уровни $ns_{1/2}$ и $np_{1/2}$ не совпадают. Уверенно впервые этот факт был доказан радиоспектроскопическим методом.

Опыт Лэмба — Ризерфорда. В 1947 г. американские физики Лэмб и Ризерфорд, применив метод радиоспектроскопии, впервые доказали, что уровень $2s_{1/2}$ в водороде смещен относительно $2\,p_{1/2}$ на величину около 1 000 *мгц* ($1\ мгц = 1/3\cdot 10^{-4} см^{-1}$). Так как для главного квантового числа правил отбора не существует, то возможны переходы с $\Delta n = 0$. Переход из состояния $2s_{1/2}$ в состояние $2\,p_{3/2}$, согласно теории Дирака, связан с поглощением энергии 0,365 $см^{-1}$, т. е. с поглощением излучения с длиной волны 2,74 *см* (10 930 *мгц*). Однако непосредственное определение резонансной частоты для перехода ($2\,p_{3/2} - 2\,s_{1/2}$) связано с большими трудностями. В опытах Лэмба и Ризерфорда использовалась метастабильность уровня $2\,s_{1/2}$ (переход в $1\,s_{1/2}$ запрещен правилами отбора для l), время жизни которого при отсутствии возмущения около 1/7 *сек*, тогда как время жизни уровня $2\,p$ порядка 10^{-9} *сек*.

Молекулярный водород подвергался диссоциации в печи при высокой температуре. Пучок атомов, вылетающий из печки, подвергался бомбардировке потоком электронов, вследствие чего некоторое число атомов возбуж-

дается до метастабильного состояния $2s_{1/2}$. При взаимодействии с металлической мишенью метастабильные атомы переходят в состояние $1s_{1/2}$ без излучения, а энергия возбуждения идет на вырывание электрона. Если теперь каким-либо способом разрушить метастабильное состояние до взаимодействия атомов с мишенью, переводя атомы из $2s_{1/2}$ в $2p_{1/2}$, то детектор покажет уменьшение тока, поскольку атомы водорода в состоянии $2p_{1/2}$ успевают излучить энергию прежде, чем они попадут на детектор. Разрушение метастабильных состояний в работе Лэмба и Ризерфорда достигалось воздействием радиочастотного излучения, которое индуцирует переходы из состояний $2s_{1/2}$ в состояния $2p_{1/2}$. Измерения проводились при нескольких фиксированных значениях частоты радиоизлучения. Для получения условий резо-

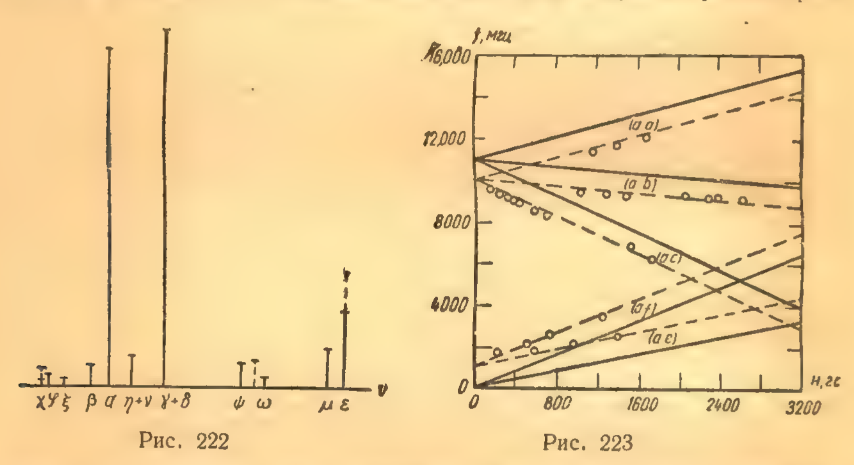


Рис. 222 Рис. 223

нанса использовался эффект Зеемана на компонентах тонкой структуры. Меняя магнитное поле, можно было получить кривую изменения тока электронов при данной частоте. Максимумы на кривой трактуются как условия резонанса для Зееман-переходов $2s_{1/2}(m_1) \to 2p_{3/2, 1/2}(m_2)$. Нанося на график значения резонансных частот в функции магнитного поля и экстраполируя результаты для $H = 0$, авторы нашли, что расстояние между $2s_{1/2}$ и $2p_{3/2}$ ~ на 1 000 *мгц* меньше, чем следует из теории Дирака. Наиболее точные результаты для расстояния между уровнями $2s_{1/2}$ и $2p_{3/2}$ равны:

$$\delta E^{(H)}(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = (1057{,}77 \pm 0{,}10) \text{ мгц для водорода,}$$

$$\delta E^{(D)}(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = (1059{,}00 \pm 0{,}10) \text{ мгц для дейтерия.}$$

На рис. 223 приведены типичные графики разонансных частот в функции магнитного поля. Сплошные линии обозначают условия резонанса для зееман-переходов, основанные на теории Дирака, пунктирные линии соединяют экспериментальные точки. Линии αa, αb, αc обозначают переходы между уравнениями $2s_{1/2}$ и $2p_{3/2}$, линии αf, αe — между $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$.

Метод радиоспектроскопии был применен и к исследованию смещения уровня $2s_{1/2}$ в He^4 II. Идея метода в основном не отличается от описанной для водорода. Отличие состояло только в способе детектирования, которое основывалось на регистрации электронов с энергией 41 *эв*, вырываемых из мишени возбужденным атомом He^4 II при переходе из состояния $2p$ в состояние $1s_{1/2}$. Получено для смещения уровня $2s_{1/2}$ значение $(14\,020 \pm 100)$ *мгц*, или $(0{,}4673 \pm 0{,}0033)$ $см^{-1}$.

Метод радиоспектроскопии для водорода и дейтерия превосходит спектроскопические исследования по точности; в случае He II они имеют точность одного порядка.

Результаты теории лэмбовского сдвига уровней энергии электронов водородоподобных атомов. Сдвиг уровней энергии электронов водородоподобных атомов нашел объяснение в рамках квантовой электродинамики. Наиболее наглядная интерпретация сдвига дана Вельтоном.

Основная величина лэмбовского сдвига уровней энергии обусловлена взаимодействием электрона атома с нулевыми флуктуациями поля фотонов. Небольшие поправки обусловлены поляризацией электронно-позитронного вакуума, взаимодействием полевого магнитного момента электрона с полем ядра и другими вакуумными эффектами. Поле в вакууме можно разложить на компоненты Фурье $E_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$ и каждой компоненте ряда сопоставить осциллятор. Тогда энергию поля можно выразить или в виде энергии волн через плотность энергии, или в виде энергии осцилляторов. Учитывая, что нулевая энергия осциллятора отлична от нуля, мы приходим к выводу, что в случае отсутствия фотонов среднее значение поля равно нулю, однако вокруг нулевого значения поля возможны флуктуации. Если среднее значение флуктуации равно нулю, то среднее значение квадрата флуктуаций отлично от нуля. Флуктуации поля вызывают колебания электрона относительно некоторого положения равновесия. Движение электрона будет напоминать при этом броуновское движение частиц. Колебания электрона приведут к изменению его потенциальной энергии. Если обозначить положение равновесия через $\mathbf{r}$, отклонение $\mathbf{q}$, то мгновенное значение энергии можно представить в виде:

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{q}) = V(\mathbf{r}) + (\bar{\mathbf{q}}\bar{\nabla}) V(\bar{\mathbf{r}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{q}^2 \nabla^2) V(\mathbf{r}) + \ldots$$

Учитывая изотропию смещений $\mathbf{q}$ и заменяя ее линейной величиной q, для изменения потенциальной энергии вследствие колебаний электрона в первом приближении можно записать:

$$\delta V = \frac{1}{6} q^2 \Delta V(\mathbf{r}).$$

Если рассматривать электрон в некотором квантовомеханическом состоянии ψ, то для изменения его энергии получается значение:

$$\delta E = \frac{4}{3} \alpha Z e^2 |\psi(0)|^2 \ln \frac{k_2}{k_1},$$

откуда видно, что смещение испытывают только уровни ns ($|\psi(0)| = 0$ при $l \neq 0$). Смещение остальных уровней может быть получено только при более точном рассмотрении вопроса. Тем не менее приближенный способ рассмотрения дает основную закономерность сдвига ns термов:

$$\delta E_s \sim \frac{Z^4}{n^3}.$$

Теоретические значения смещения уровней в водороде и He II можно найти из соотношений:

$$\delta E_s = 0{,}275 n^{-3}\ см^{-1}\ \text{(для водорода, дейтерия и трития)};$$

$$\delta E_s = 16 \cdot 0{,}225 n^{-3}\ см^{-1}\ \text{(для He II)}.$$

Формула показывает, что величина сдвига $ns_{1/2}$ возрастает для He II несколько меньше, чем Z^4. Сдвиг np в водороде может быть рассчитан из соотношений:

$$\delta E_{p_{1/2}} = -0{,}0035 n^{-3}\ см^{-1};$$

$$\delta E_{p_{3/2}} = 0{,}0032 n^{-3}\ см^{-1}.$$

Тогда для расстояния $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ получим величину

$$\delta E_s = 0{,}0344 - (-0{,}0008) = 0{,}0352\ см^{-1}.$$

Точный расчет дает:

$$\delta E^{\mathrm{H}}(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = 1057{,}19\ мгц\ (\text{для водорода});$$

$$\delta E^{\mathrm{D}}(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = 1058{,}49\ мгц\ (\text{для дейтерия}).$$

Оптические измерения для линий T_α дают

$$\delta E_{2s_{1/2}} = 0{,}0355\ см^{-1}.$$

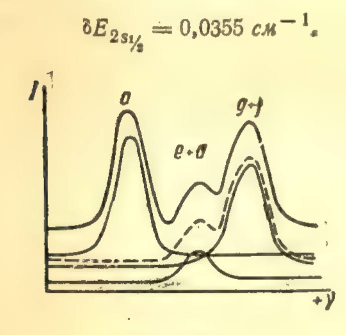


Рис. 224

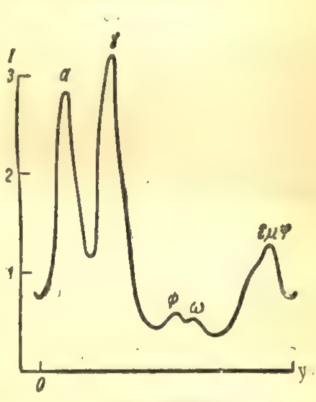


Рис. 225

На рис. 224 приведена кривая интенсивности линии T_α, в которой отчетливо видно три группы линий. Кривая интенсивности линии He^4 II λ 4686 Å (рис. 225) показывает отчетливое разрешение компонент ψ и ω, совпадающих по теории Дирака. При этом обе компоненты сдвинуты относительно их положения по Дираку, что вызвано смещением уровней $3s_{1/2}$ (для ψ) и $4s_{1/2}$ (для ω).

Аномальный магнитный момент электрона. Радиоспектроскопические исследования показали, что магнитный момент электрона не равен в точности одному магнетону, а несколько больше. Квантовая электродинамика показала, что возрастание магнитного момента электрона обязано взаимодействию электрона с вакуумом (физическим пространством). В таком случае собственный момент электрона должен быть равен

$$\mu_e = \mu_0 \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}328\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\right] = 1{,}0011596\mu_0.$$

Величина вакуумной добавки составляет $\sim \frac{\alpha}{2\pi} \sim 0{,}12\%$.

Сверхтонкая структура уровней и спектральных линий водорода. Ядро атома водорода имеет собственный магнитный момент. Магнитное взаимодействие ядерного момента $\mu_я$ с орбитальным моментом μ_e приводит к так называемому сверхтонкому расщеплению уровней энергии. Это связано с тем, что энергия взаимодействия магнитных моментов зависит от их взаимной ориентации. Энергия, дополнительная к энергии уровня тонкой структуры, обусловленная сверхтонкой структурой:

$$E_c = \frac{Z^3\alpha^2 gmhRc}{n^3 M_p} \cdot \frac{f(f+1) - I(I+1) - j(j+1)}{j(j+1)(2l+1)},$$

где Z — заряд ядра в единицах заряда протона,
M_p — масса протона,
m — масса электрона,
α — постоянная тонкой структуры,
R — постоянная Ридберга,
h — постоянная Планка,
c — скорость света в вакууме,
g — гиромагнитное отношение для ядра,
n — главное квантовое число,
l — орбитальное квантовое число,
j — внутреннее квантовое число,
I — спиновое ядерное квантовое число,
f — полное квантовое число, определяющее модуль полного момента условием:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} + \mathbf{I}; \quad \mathbf{f}^2 = \hbar^2 f(f+1).$$

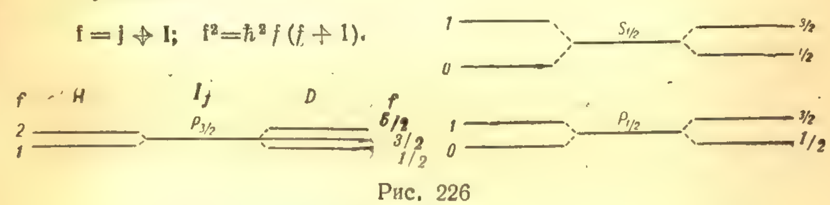


Рис. 226

На рис. 226 представлена схема сверхтонкой структуры уровней водорода (Н) и дейтерия (D) для $n = 2$. В середине изображено положение уровней тонкой структуры, сбоку указано значение f.

Основное состояние атома водорода $1s_{1/2}$ расщепляется на два подуровня с $f = 1$ и $f = 0$. Разность энергии между ними равна $\sim 5{,}9 \cdot 10^{-6}$ *эв*. Излучение, возникающее при этом переходе, характеризуется частотой 1420 *мгц* или длиной волны $\lambda = 21{,}2$ *см*.

Изучение сверхтонкой структуры водорода и дейтерия позволяет проверять многие выводы современной квантовой механики и квантовой электродинамики, связанные с гиромагнитными отношениями для ядер Н и D, аномальным магнитным моментом электрона и др.

В 1951 г. было открыто интенсивное радиоизлучение Галактики на волне $\lambda = 21{,}2$ *см*. Оно обусловлено переходами между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атомов водорода. Изучая распределение интенсивности излучения по различным точкам Галактики, можно получить ценные сведения о распределении водорода в межзвездном пространстве. Максимальная плотность водорода соответствует 2 атомам/*см*³, средняя плотность равна примерно 0,7 атомам/*см*³. Плотность водорода неравномерна, она образует своеобразные спиральные рукава. Наблюдается расширение водорода от центра Галактики.

Радиоизлучение на волне 21,2 *см* используется для изучения других Галактических систем.

§ 11. Сложные атомы

Состояние электрона в атоме. Если электрон находится в атоме, то его состояние необходимо описывать четверкой квантовых чисел.

Главное квантовое число $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ Оно определяет энергию электрона в поле ядра (и атомного остатка). Главное квантовое число определяет

номер, порядок слоя электронов в сложных атомах, электроны с одним и тем же главным квантовым числом образуют электронную оболочку. Энергия электронов, выраженная через главное квантовое число, дается простым выражением только для атома водорода или водородоподобного иона:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} = -\frac{RhcZ^2}{n^2} = -\frac{13{,}5\cdot Z^2}{n^2}\ \text{эв}.$$

Для других, более сложных атомов это выражение не имеет места. Но для одновалентных атомов I группы энергию электрона можно выразить в подобном виде, а именно:

$$E_n = -\frac{Rhc}{(n-\Delta)^2},$$

где Δ — квантовый дефект, зависящий от формы орбиты, т. е. от орбитального момента. Наибольшую величину поправки имеет s — состояние, и $\Delta=0$ для f и более высоких состояний.

Значение Δ для Li, Na, K, Rb, Cs.

	s	p	d	f
Li	0,41	0,04	0,00	0,00
Na	1,37	0,38	0,01	0,00
K	2,23	1,77	0,15	0,01
Rb	3,20	2,72	1,23	0,01
Cs	4,13	3,67	2,45	0,02

Величина $n-\Delta=n^*$ называется **эффективным главным квантовым числом**. С помощью величин квантовых дефектов можно легко находить частоты и длины волн спектра щелочных элементов, так как Δ очень слабо зависит от главного квантового числа.

Применимость водородоподобной модели для других атомов определяется размерами оболочки валентного электрона. Если атом помещен в среду с диэлектрической постоянной ε, то размеры оболочки возрастают во столько же раз, и можно описывать уровни энергии формулой для водорода с достаточной степенью точности, что и используется, например, в полупроводниках, при описании уровней энергии примеси или экситона.

Орбитальное квантовое число l. Для электрона, находящегося в данной оболочке, т. е. с заданным главным квантовым числом n, оно может принимать различные значения: $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, всего n значений. Спектроскопические обозначения соответствующих состояний:

$$\begin{array}{l} l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots \\ \quad\ \ s,\ p,\ d,\ f,\ g,\ h,\ \ldots \end{array}$$

В состоянии с данным значением квантового числа l электрон имеет момент количества движения:

$$|\mathbf{M}| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar.$$

С ним связан орбитальный магнитный момент:

$$\mu_l = \frac{e}{2mc}\mathbf{M};\quad |\mu_l| = \mu_0\sqrt{l(l+1)};\quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0c}.$$

Орбитальное квантовое число определяет поправку к энергии, обусловленную влиянием атомного (электронного) остатка. Электроны с одним и тем же значением l образуют подоболочку.

Магнитное орбитальное квантовое число m_l. Оно определяет проекцию орбитальных механического M и магнитного μ моментов электрона на некоторое произвольное направление z или на направление магнитного поля:

$$M_z = m_l \hbar; \quad \mu_z = m_l \mu_0.$$

Магнитное орбитальное квантовое число связано с орбитальным квантовым числом l. При заданном значении l m_l может иметь следующие значения:

$$m_l = l,\ l-1,\ \ldots,\ +1,\ 0\ -1,\ \ldots,\ -(l-1),\ -l,$$

всего $(2l+1)$ значений. При заданном значении главного квантового числа n всего различных состояний будет $\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$. Угол между осью z и $\mathbf{M}$ (или μ) определяется условием:

$$\cos\varphi = \frac{M_z}{|\mathbf{M}|} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}.$$

Тем самым угол между осью z (или $\mathbf{H}$) и моментом $\mathbf{M}$ может принимать $(2l+1)$ дискретных значений:

$$\varphi = \arccos\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}.$$

Минимальный и максимальный углы определяются условием

$$m_l = \pm l.$$

Эти состояния обычно называют параллельными и антипараллельными полю (или оси z), хотя углы при этом не равны 0° и 180°.

Замечание. В отличие от самих моментов величины проекции момента определяются не в виде $\sqrt{m_l(m_l+1)}\,\hbar$, а в виде $M_z = m_l\hbar$.

Состояния с различными m_l при данном l имеют одно и то же значение энергии, такие состояния называются вырожденными. Степень или кратность вырождения $f = 2l+1$ равна числу состояний с одной и той же энергией (или моментом количества движения). Если наложить магнитное поле, электрон в атоме будет иметь дополнительную энергию $\delta E = m_l\mu_0 H$ и вырождение снимается.

Спиновое квантовое число s и спиновое магнитное число m_s или s_z:

s называется спиновым квантовым числом, оно определяет собственный механический момент электрона, величина которого равна

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{s(s+1)}\cdot\hbar.$$

Спиновое квантовое число имеет одно единственное значение:

$$s = 1/2, \text{ так что } |\mathbf{S}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar.$$

Спиновое магнитное квантовое число m_s или s_z принимает два значения $s_z = 1/2$, $s_z = -1/2$. Оно определяет проекцию спина на ось z:

$$|\mathbf{S}_z| = s_z\hbar.$$

Вместо этих чисел часто пользуются числами j и m_j.

Полное или внутреннее квантовое число j определяет полный момент электрона в атоме, равный сумме орбитального и спинового моментов:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M} + \mathbf{S}.$$

Модуль полного момента равен

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar.$$

Внутреннее квантовое число связано с орбитальным и спиновым квантовыми числами:

$$j = l \pm s = l \pm \frac{1}{2},$$

т. е. при данном l оно принимает два значения. При этом $j = l + s$ соответствует «параллельной» ориентации $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$, $j = l - s$ — «антипараллельной». На самом же деле они будут располагаться под некоторым углом, который можно определить по формуле:

$$|\mathbf{J}|^2 = |\mathbf{M}|^2 + |\mathbf{S}|^2 + 2|\mathbf{M}||\mathbf{S}|\cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2l(l+1)\cdot(s+1)}.$$

Магнитное квантовое число m дает проекцию полного момента j на некоторое направление z:

$$j_z = m\hbar.$$

Оно равно: $m = j,\ j-1,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots -j$, всего $2j+1$ значений.

С полным механическим моментом связан полный магнитный момент, величина которого определяется соотношением:

$$\mu = g\mu_0\sqrt{j(j+1)},$$

где g — так называемый фактор Ланде.

Состояние электрона. Состояние электрона описывается набором четырех динамических величин, в качестве которых можно выбрать те или другие физические величины. Для электрона в атоме удобно брать следующие четыре квантовых числа: n, l, j, m, или n, l, m_l, m_s.

Сложные атомы. Состояние атома определяется состоянием и взаимодействием его электронов. Выбор квантовых чисел для описания состояния электрона в сложном атоме определяется видом атома, они отражают характер взаимодействия электронов в атоме.

Если взаимодействие между орбитальными моментами различных электронов и взаимодействие спинов между собой сильнее взаимодействия орбитального и спинового момента одного и того же электрона, то полный момент атома строится следующим образом. Орбитальный момент атома L равен векторной сумме орбитальных моментов всех его электронов:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i,$$

Следовательно, одно и то же количество электронов может дать различные значения $\mathbf{L}$, а следовательно и состояния атома. Состояния атома в целом записывается теми же, но большими, буквами, что и состояние одного электрона.

Если

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{L(L+1)}\,\hbar,$$

где L — орбитальное квантовое число атома, то при $L=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ состояния обозначаются S, P, D, F ...

Поскольку понятия главного квантового числа для атома в целом не существует, то максимальное значение L определяется суммой всех l_i: $L_{\text{макс}} = \sum l_i$. Решение вопроса о возможности того или иного состояния решается применением принципа Паули.

Полный спиновый момент атома равен векторной сумме спиновых моментов всех электронов:

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i\,;\ |\mathbf{S}| = \sqrt{S(S+1)}\,\hbar,$$

где $S = \sum S_i$,
Полный момент атома равен

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad |J| = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar.$$

Внутреннее квантовое число J принимает значения:

$$J = L + S; \quad L + S - 1, \; L - S,$$

всего $(2S + 1)$ значений. Если $L < S$, то

$$J = L + S, \; L + S - 1, \; \ldots, \; S - L,$$

всего $(2L + 1)$ значений.

Число $(2S + 1)$ показывает, сколько различных ориентаций будет иметь полный спиновый момент относительно орбитального момента $\mathbf{L}$. Это число носит название мультиплетности состояния. Состояние атома в целом записывается в виде символического указания орбитального момента (S, P, D и т. д.), вверху слева записывается мультиплетность, внизу справа внутреннее квантовое число.

Пример: $L = 1$; $S = 1$; $J = 2$. Состояние будет: ${}^3P_2$.

Принцип Паули. В элементарной формулировке принцип Паули гласит: в каждом состоянии, определяемом полным набором четырех квантовых чисел, не может быть больше одного электрона.

Принцип Паули применим к любым частицам, имеющим полуцелый спин (электрон, позитрон, протон, нейтрон и др.).

Принцип Паули позволяет решать вопрос о возможности того или иного состояния атома и целый ряд других вопросов.

Число состояний в оболочке. В состоянии с главным квантовым числом n возможно $2n^2$ состояний и, следовательно, по принципу Паули в этой оболочке может быть не больше $2n^2$ электронов. Величина $2n^2$ получается следующим образом. В каждом состоянии nlm_lm_s может быть один электрон; в состоянии nlm_l — два электрона, с противоположно направленными спинами. Но различных m_l при данном l возможно $2l + 1$, следовательно, всего состояний:

$$\sum_{l=0}^{l=n-1} 2(2l + 1) = 2n^2.$$

Число состояний в подоболочке l равно $2(2l + 1)$.

Ниже, в таблице сведены результаты подсчета числа различных состояний в различных оболочках и подоболочках, и также указаны рентгеноскопические обозначения оболочек.

Гл. квантовое число n	Обозначение оболоч.	Подоболочки и число состояний						Число состояний в оболочке
		$s(l=0)$	$p(l=1)$	$d(l=2)$	$f(l=3)$	$g(l=4)$	$h(l=5)$	
1	K	2	—	—	—	—	—	2
2	L	2	6	—	—	—	—	8
3	M	2	6	10	—	—	—	18
4	N	2	6	10	14	—	—	32
5	O	2	6	10	14	18	—	50
6	P	2	6	10	14	18	22	72

Таблица показывает, что в самой нижней оболочке может быть два электрона, затем восемь, восемнадцать и т. д. При заполнении данной оболочки начинается заполнение следующей. Это лежит в основе периодичности всех свойств чистых элементов. Однако между идеальной и реальной таблицей

Менделеева имеется расхождение. Фактически периоды таблицы Менделеева содержат 2, 8, 8, 18, 18, 32 элемента, а не 2, 8, 18, 32, 50. Это связано с взаимодействием оболочек. Спектроскопические, химические и рентгеноскопические данные позволяют понять причину расхождения между идеальной и реальной таблицей Менделеева.

Начиная с водорода до аргона $Z = 18$ заполнение оболочек идет в соответствии с принципом Паули. У аргона заполнены оболочки K, L и $3s$ и $3p$ подоболочки оболочки M. У следующего элемента калия К электроны должны начать заполнение подоболочки $3d$, однако состояние $4s$ имеет меньшую энергию, чем $3d$, поэтому электроны начинают заполнять $4s$ подоболочку. Заполнение ее заканчивается у $_{20}$Ca. Следующий электрон элемента скандия может располагаться или в $4p$, или в $3d$. Так как состояние $4p$ оказывается с большей энергией, то начиная со скандия, заполняется $3d$ подоболочка. Подобное же положение имеет место и у ванадия $_{24}$V: при 24 электронах термы $3d$ и $4s$ оказываются очень близкими, в результате чего пять из шести внешних электронов находятся в состоянии $3d$ и один — $4s$. У меди $_{29}$Cu: при 29 электронах $_{29}$Cu состояние $3d$ оказывается более глубоким по сравнению с $4s$, в результате чего у меди в состоянии $3d$ оказывается один электрон. Но вместе с тем подоболочка $3d$ заполнена полностью.

Подобное же нарушение порядка заполнения слоев наблюдается у рубидия ($Z = 37$), у которого 37-й электрон располагается не в $4d$ - состоянии, а в $5s$. 38-ой электрон стронция также заполняет состояние $5s$, но начиная с 39 элемента (иттрий) до 46 (палладий) идет заполнение подгруппы $4d$ (а не $5p$). Интересное отступление наблюдается в группе редких земель. 57-й электрон лантана находится в состоянии $5d$. У него заполнены подгруппы $5p$, $5d$ и $6s$ Однако энергия электронов в $4f$ оказывается меньше, чем в состоянии $6p$, поэтому идет заполнение глубокой внутренней подоболочки $4f$. При этом наружные подоболочки у целой группы элементов одинаковые, что определяет их почти идентичные химические свойства. Группа редких земель в таблице Менделеева поэтому помещается в одной клеточке ($Z=58-71$, подгруппа лантаноидов). Подобное же положение имеется в группе актиноидов, в которой, начиная с 89-го элемента (актиния), происходит заполнение подоболочки $5f$ при заполненных $6s$, $6p$, $6d$-подоболочках. К актиноидам относятся торий, протактиний, уран и заурановые элементы.

Конфигурация электронной оболочки и состояние атома. При записи состояние атома вместе с состоянием каждого электрона одинаковые состояния электронов записываются в виде «показателя», например $3p^6$. Это означает, что в состоянии $3p$ находится 6 электронов. Состояние атома, соответствующее минимальной энергии, называется основным, или нормальным (невозбужденным) состоянием. Для определения нормального состояния по электронной конфигурации необходимо провести соответствующее экспериментальное исследование, так как одна и та же электронная конфигурация приводит к различным атомным состояниям. Иногда вопрос можно решить на основании эмпирических правил Гунда.

§ 12. Магнитные свойства атома

Проявление магнитных свойств атомов. Все вещества взаимодействуют в той или иной форме с магнитным полем, независимо от агрегатного состояния. Это говорит о том, что природа магнитных свойств всех веществ заложена в самих атомах. Магнитные свойства атомов проявляются в оптических исследованиях, радиоспектроскопических и целом ряде других.

Магнитный момент атомов. Наличие у атомов магнитного момента следует из теории Бора. Движение электрона по его орбите представляет собой электрический ток;

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi},$$

где T — период обращения. Если радиус орбиты r, то площадь, обтекаемая током, $S = \pi r^2$ равносильна рамке с током. Но рамка с током обладает магнитным моментом, следовательно, магнитный момент атома:

$$\mu = \frac{IS}{c} = \frac{e\omega}{2\pi c}\pi r^2 = \frac{em_0 r^2\omega}{2m_0 c} = \frac{e}{2m_0 c} M,$$

где m_0 — масса электрона.
Или в векторной форме:

$$\mu = \frac{e}{2m_0 c}\mathbf{M},$$

где $\mathbf{M}$ — орбитальный момент электрона в атоме. Согласно квантовой механике орбитальный момент квантован:

$$|\mathbf{M}| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar.$$

Следовательно, и магнитный момент должен быть квантованным:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_0 c}\sqrt{l(l+1)} = \mu_0\sqrt{l(l+1)}.$$

$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0 c} = 0{,}920\cdot 10^{-20}$ *эрг·гс*$^{-1}$ — носит название магнетона Бора, он является единицей измерения магнитного момента электрона и атома.

Проекция магнитного момента на ось z будет равна

$$\mu_z = \mu_0 m_l,$$

где m_l — орбитальное магнитное квантовое число. Атом с магнитным моментом, помещенный в магнитное поле, будет обладать дополнительной энергией: $\Delta U = -(\mu\mathbf{H}) = \mu_0 m_l H$.

Прецессия момента вокруг направления магнитного поля. На магнитный диполь, помещенный в магнитное поле, действует вращающий момент (пара сил), равный $[\mu\mathbf{H}]$, который стремится повернуть диполь вдоль направления поля $\mathbf{H}$, т. е. действует ориентирующим образом; однако этому препятствует наличие у атома механического момента $\mathbf{M}$ — *атом подобен гироскопу*. Применяя основной закон вращательного движения, можно сказать, что за dt атом получит приращение момента на величину $dt\,[\mu\mathbf{H}]$. Но это приращение перпендикулярно к μ. Следовательно, ориентирующее действие магнитного поля при наличии у атома механического момента приводит к прецессии моментов $\mathbf{M}$ и μ вокруг направления магнитного поля, при этом для вещества $\mu_z^{\text{ср}} = 0$. Угловая скорость прецессии $\omega = \frac{|[\mu\mathbf{H}]|}{|\mathbf{M}|}$. Намагничение образца в магнитном поле обязано тепловому движению, приводящему в результате столкновения к изменению ориентации, при этом, согласно классической статистике, более вероятны будут процессы, приводящие к уменьшению угла φ между направлениями поля, что соответствует уменьшению энергии диполя μ.

Парамагнетизм вещества. Пусть атомы (молекулы) имеют магнитный момент $\mu = \mu_0 g\sqrt{j(j+1)}$ с проекцией на направление магнитного поля $\mu_z = \mu_0 mg$, где g — фактор Ланде. Взаимодействие с полем приводит к дополнительной энергии $\Delta U = -(\mu\mathbf{H}) = mg\,\mu_0 H$.

Вероятность того, что проекция момента на ось z равна μ_z будет иметь вид:

$$w(m) = Ce^{-\frac{mg\mu_0 H}{kT}} = Ce^{-\alpha m}$$

при обычных полях в несколько *кгс* и комнатных температурах $\alpha = \frac{g\mu_0 H}{kT}$ мало. Константа C найдется из условия нормировки: $\sum_{m=-j}^{m=j} w(m) = 1$. Это дает

$$C = e^{-\alpha j} \frac{1 - e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha(2j+1)}}.$$

Если $\alpha \ll 1$,

$$C = \frac{1}{2j+1}.$$

Если элемент объема содержит N атомов, то намагничение, создаваемое атомами с магнитным квантовым числом m и $(-m)$, будет равно разности:

$$I(m) = \Delta\mu(m) = \mu_0 gmNC\left(e^{\alpha m} - e^{-\alpha m}\right).$$

Сумма этих величин по всем m от 1 до j дает полный магнитный момент единицы объема, т. е. намагничение

$$I = \mu_0 gNC \sum_{m=1}^{j} m\left(e^{\alpha m} - e^{-\alpha m}\right).$$

При $\alpha \ll 1$

$$I = \frac{2\mu_0 g^2 NH}{(2j+1)kT} \sum_{m=1}^{j} m^2 = \frac{\mu_0^2 g^2 j(j+1)}{3kT} H = \varkappa H.$$

Отсюда $\varkappa = \frac{[\mu_0 g\sqrt{j(j+1)}]^2}{3kT}$ — парамагнитная восприимчивость обратно пропорциональна температуре (закон Кюри) и пропорциональна квадрату магнитного момента вещества. Впервые теория парамагнетизма была построена Ланжевеном и Друде.

Опыт Штерна — Герлаха. Пространственное квантование, вытекающее уже из теории атома Бора, доказывается в опытах Штерна и Герлаха, которые состояли в следующем. Пусть атом имеет магнитный момент μ. Если его поместить в неоднородное магнитное поле, то на него будет действовать сила

$$\mathbf{F} = (\mu\nabla)\mathbf{H}.$$

Если $\mathbf{H} = (0, 0, H_z(x, y, z))$, то

$$F_z = \mu_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

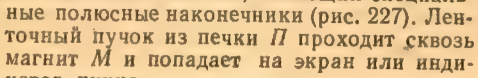
Но в результате прецессии вектора μ вокруг $\mathbf{H} = \mathbf{H}_z$ среднее значение

$$\overline{\mu_x \frac{\partial H_z^{\text{ср}}}{\partial x}} = \overline{\mu_y \frac{\partial H_z^{\text{ср}}}{\partial y}} = 0,$$

тогда

$$F_z^{\text{ср}} = \mu_z \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Для того, чтобы на атом действовала заметная сила, необходимо, чтобы неоднородность была заметна на расстоянии порядка размера атома (~ Å). Если сквозь такое неоднородное магнитное поле пропустить узкий пучок атомов с произвольной ориентацией магнитных моментов μ относительно **H**, то под действием силы F пучок отклонится. Если поле выключить, на экране должно получиться изображение диафрагм, ограничивающих пучок. Для получения неоднородного поля использовался магнит, имеющий специальные полюсные наконечники (рис. 227). Ленточный пучок из печки $П$ проходит сквозь магнит $М$ и попадает на экран или индикатор пучка.



Если пропустить атомы, находящиеся в состоянии с орбитальным моментом l, то на пластинке наблюдаются $(2l + 2)$ полос. С точки зрения классической теории все μ_z равновероятны, и поэтому должна получиться широкая полоса. С точки зрения теории Бора должна получиться $(2l+1)$ полоса. Фактически же наблюдается на одну полосу больше. Если пропустить атом в S-состоянии, когда орбитальный момент должен равняться нулю, то на экране наблюдается не одна полоса, соответствующая нерасщепленному пучку, а две, расположенные симметрично относительно среднего положения (рис. 228). Сближение полос у краев связано с уменьшением $\frac{\partial H_z}{\partial z}$ в этой области.

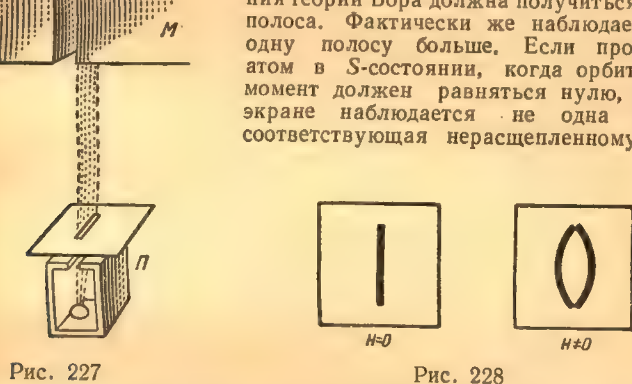


Рис. 227

Рис. 228

Выводы из опыта:

1) магнитный и механический моменты ориентируются относительно поля не под любыми углами, а только под некоторыми, так что проекция момента меняется на одну и ту же величину (полосы находятся друг от друга на одном и том же расстоянии).

2) расщепление пучка атомов в S — состоянии можно объяснить, если предположить, что электрон имеет собственный магнитный момент в соответствии с гипотезой Юленбека — Гаудсмита. Измерив величину расщепления и зная параметры установки, Штерн и Герлах нашли, что собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора;

3) с собственным магнитным моментом электрона должен быть связан механический момент **S** (спин), проекция которого на поле принимает всего лишь два значения, которые равны $\frac{1}{2}\hbar$; $-\frac{1}{2}\hbar$.

Это следует из векторного характера моментов: $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, и число проекций должно быть равно $2j + 1 = 2(l + {}^1/_2) + 1$, $j = l + {}^1/_2$.

Опыт Эйнштейна—де-Гааза. Этот опыт позволяет измерить гиромагнитное отношение. Идея и схема опыта. В однородном магнитном поле соленоида на тонкой упругой кварцевой нити подвешивается тонкий железный стержень (рис. 229). Соленоид питается переменным током. Изменение направления магнитного поля (т. е. перемагничивание стержня) приводит к повороту стержня вокруг своей оси. Объяснение результата опыта состоит в следующем. Пусть $\mathbf{H}$ направлено вверх, тогда магнитные и механические моменты будут прецессировать вокруг поля и в результате соударения будут ориентированы преимущественно вдоль поля, т. е. образец намагничен и находится в покое. Изменим направления поля. В результате этого происходит перемагничивание образца, т. е. магнитные моменты атомов

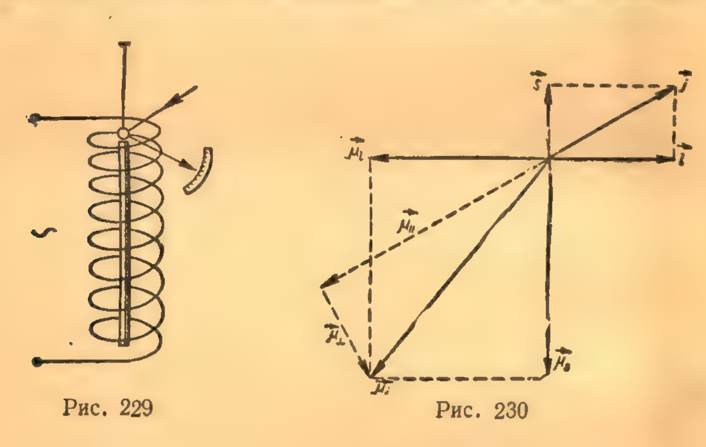


Рис. 229 Рис. 230

меняют свое направление, а вместе с ними меняют направление и механические моменты атомов. И на основании закона сохранения момента количества движения стержень в целом получит приращение вращательного момента $\Delta\mathbf{M}$. Зная угол поворота стержня и упругость нити, можно найти величину механического момента стержня, и тем самым найти гиромагнитное отношение μ/M для одного атома по измеренному моменту стержня. Эйнштейн и де-Гааз нашли $\mu/M = \frac{e}{m_0c}$ вместо $\frac{e}{2m_0c}$, как это следует из классической теории. Результат опыта был объяснен гипотезой спина много позже его осуществления: для собственных моментов электрона $\mu/M = g\frac{e}{2m_0c}$ при $g=2$, тогда как для орбитального движения $g = 1$. Для усиления эффекта соленоид питается током с частотой, равной собственной частоте крутильных колебаний стержня, т. е. измерения выполняются по методу резонанса.

Фактор Ланде. Магнитный момент μ, находящийся в магнитном поле H, обладает потенциальной энергией $\Delta U = -(\mu\mathbf{H})$, однако, при подсчете этой величины необходимо учитывать аномальность гиромагнитного отношения для собственных моментов, что усложняет выражение для энергии. Гиромагнитное отношение собственных моментов в два раза больше гиромагнитного отношения орбитальных моментов, поэтому полный магнитный момент атома не будет совпадать с направлением полного механического момента (рис. 230). Это проявляется на рис. 230 в том, что в принятом масштабе, когда μ_l в два раза больше $\mathbf{l}$, μ_s больше S в четыре раза. Угол между $\mathbf{j}$ и

μ_j; обозначим через α. В результате магнитного спин-орбитального взаимодействия $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ будут прецессировать вокруг $\mathbf{j}$, это приведет к прецессии μ вокруг $\mathbf{j}$. Разложим μ на две компоненты параллельную и перпендикулярную $\mathbf{j}$: $\mu_{\parallel}$ и $\mu_{\perp}$. В результате прецессии μ вокруг $\mathbf{j}$ среднее значение $\mu_{\perp} = 0$. Поэтому во всех явлениях будет проявляться только $\mu_{\parallel}$, которую и называют обычно магнитным моментом атома. Следовательно, $\Delta U = (\mu_{\parallel} \mathbf{H})$. Подсчитаем величину:

$$\mu_{\parallel} = \mu_l \cos (l j) + \mu_s \cos (s, j),$$

где

$$\cos (l, j) = \frac{l(l+1) + j(j+1) - s(s+1)}{2\sqrt{s(s+1)}\sqrt{j(j+1)}}$$

$$\cos (s, j) = \frac{s(s+1) + j(j+1) - l(l+1)}{2\sqrt{s(s+1)}\sqrt{j(j+1)}}.$$

Это выражение получено на основании теоремы косинусов в тригонометрии и выражения для модуля векторов, например, $|\mathbf{j}| = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar$. Учитывая, что $\mu_l = \frac{e\hbar}{2m_0 c}\sqrt{l(l+1)}$ и $\mu_s = 2\frac{e\hbar}{2m_0 c}\sqrt{s(s+1)}$, после подстановки получим

$$\mu_{\parallel} = \frac{e\hbar}{2m_0 c} g\sqrt{j(j+1)} = \mu_0 g\sqrt{j(j+1)},$$

где $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0 c}$ — магнетон Бора, $g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$ называется фактором (или множителем) Ланде, который играет роль гиромагнитного отношения в общем случае. При $l = 0$ $g = 2$; при $s = 0$ $g = 1$.

Выражение для энергии:

$$\Delta U = -(\mu_{\parallel} H) = -\mu_0 g\sqrt{j(j+1)}\, H \cos (\mu_{\parallel} \mathbf{H}).$$

Но

$$\cos (\mu_{\parallel} \hat{\mathbf{H}}) = -\cos (\mathbf{j}, \hat{\mathbf{H}}) = -\frac{m}{\sqrt{j(j+1)}},$$

где $m = j, j-1, \ldots, -j$ — магнитное квантовое число.

Тогда

$$\Delta U = g\mu_0 mH.$$

Расщепление уровней. В магнитном поле состояние с полным моментом $\mathbf{J}$ распадается на $2j+1$ подуровней с расстояниями между ними $\delta U = \mu_0 Hg$. Если выражать поле в эрстедах, то величина расщепления термов T ($см^{-1}$);

$$\delta T\,(см^{-1}) = 4{,}685 \cdot 10^{-5} gH\,(э).$$

Аномальный Зееман-эффект. При переходе электрона из одного состояния в другое ($nljm \to n'l'j'm'$) в соответствии с правилами отбора излучается спектральная линия с волновым числом ν_0 $см^{-1}$.

Если атом поместить в магнитное поле, то термы расщепляются, что приводит к расщеплению линий. Это явление носит название эффекта Зеемана. Величина расщепления определится соотношением:

$$\nu = T - T' = \left(T_{nljm} + \frac{mg\mu_0 H}{ch}\right) - \left(T_{n'l'j'm'} + \frac{m'g'\mu_0 H}{ch}\right) =$$

$$= \nu_0 + \frac{\mu_0 H}{ch}(mg - m'g').$$

Величина $\frac{\mu_0 H}{ch} = \nu_L = 4{,}685 \cdot 10^{-5}\, H\, см^{-1}$, носит название нормального Лоренцева расщепления.

В единицах ν_L расщепление линии равно

$$\Delta\nu = mg - m'g'.$$

При этом $\Delta m = m - m' = 0, \ \pm 1.$

Пример. Расщепление линии Na $\lambda = 5895{,}30\,\mathring{A}$, возникающей при переходе $3^2p_{1/2} \to 3^2s_{1/2}$. Начальное состояние $2p_{1/2}: l = 1;\ j = 1/2,\ s = 1/2$ — это дает $g = \frac{2}{3}$. Конечное состояние $2s_{1/2}: l = 0\ \ j = 1/2$ и $g = 2$. Схема расчета:

начальное

$m = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

$mg = \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}$

$m' = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

конечное

$m'g' = 1 \quad -1$

Стрелками обозначены переходы $\Delta m = 1; \quad 0; \quad 0; \quad -1.$

$\Delta\nu = 4/3;\ \ 2/3;\ -2/3;\ -4/3.$

Структура линий всегда симметрична относительно центра — это позволяет делать краткую запись.

Зеемановские компоненты поляризованы по-разному в зависимости от Δm: при $\Delta m = \pm 1$ компоненты поляризованы по правому и левому кругу (σ-компоненты): при $\Delta m = 0$ линейно поляризованное излучение с колебанием вдоль поля (π-компонента).

При сокращенной записи выписываются только половина компонент в виде дроби с общим знаменателем, при этом π-компоненты записываются в скобках. В нашем случае в виде:

$$\Delta\nu = \frac{(2)\,4}{3}.$$

Число наблюдаемых компонент будет зависеть от способа наблюдения. При наблюдении вдоль поля π-компоненты не будут видны.

Эффект Пашена — Бака. При увеличении поля картина зеемановского расщепления претерпевает изменение, превращаясь в триплет. Это явление носит название эффекта Пашена — Бака. Объясняется оно тем, что при больших полях разрывается связь между μ_l и μ_s, вследствие чего они начинают прецессировать независимо вокруг поля H. В этом случае расчет дает:

$$\Delta\nu = (\Delta m_l + 2\Delta m_s)\,\nu_L.$$

Но

$$\Delta m_l = 0, \quad \pm 1; \quad а\ \Delta m_s = 0.$$

Поэтому

$$\Delta\nu = \nu_L, \quad 0, \quad -\nu_L,$$

что дает «нормальный». Лоренцевский триплет, объяснимый и в классической физике.

Понятие «сильное» или «слабое» поле определяется следующим соображением: если зеемановское расщепление меньше мультиплетного для данной линии, то поле слабое; если их величины сравнимы, то — сильное. Одно и то же поле для разных линий может быть или слабым, или сильным.

§ 13. Волновые свойства частиц

Гипотеза де Бройля. Исходя из некоторых оптико-механических аналогий, из связи геометрической оптики и волновой, французский физик Луи де Бройль выдвинул в 1924 г. гипотезу, что с каждым телом должна быть связана плоская волна. Движение этих волн должно отражать характер движения тел. Следовательно, если мы будем знать законы распространения этих волн, то, предположив взаимно-однозначное соответствие между движением тела и распространением связанной с ним волны, мы сможем определить характер движения тел по распространению волн. Характеристики волн, связанных с телами, по предположению де Бройля, должны определяться через энергию E и импульс p тела:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}; \quad \nu = \frac{E}{h}.$$

Легко видеть, что эти соотношения есть не что иное, как соотношения Эйнштейна для фотона, записанные «наоборот».

Уравнение плоской волны, идущей в направлении r будет иметь вид:

$$\psi = \psi_0 e^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - \mathbf{pr})}.$$

В уравнении E, $\mathbf{p}$ — энергия и импульс тела (или частицы), r — координата, t — время, h — постоянная Планка, ψ_0 — амплитуда волны де Бройля, ψ — обозначение самой волны.

Свойства волн де Бройля. Это уравнение представляет плоскую, монохроматическую волну. Понятие монохроматических волн справедливо при условии: $-\infty < t < \infty$; $-\infty < x < \infty$, т. е. для колебаний, длящихся бесконечно долго во времени и заполняющих все пространство. Реальные волны всегда ограничены во времени и пространстве. В этом случае любую волну можно представить в виде определенного набора монохроматических волн, разложив любое колебание в интеграл Фурье:

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} c(k) e^{-i(\omega t - kx)} dk.$$

Такое образование носит название группы волн или волнового пакета, если Δk мало.

1. Групповая скорость света определяется соотношением:

$$v = \frac{d\nu}{dk}.$$

Учитывая связь между частотой и волновым числом волн де Бройля и энергией и импульсом, мы можем написать:

$$v = \frac{d\nu}{dk} = \frac{hd\nu}{hdk} = \frac{dE}{dp}.$$

Соотношение, дающее величину групповой скорости волн де Бройля, равно производной от энергии тела по импульсу. Используем связь между энергией и импульсом: $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$,

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{2cp}{2\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{c^2 p}{E} = \frac{p}{m} = v_т.$$

Групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы $v_т$.

2. Фазовая скорость определяется соотношением:

$$u = \frac{\nu}{k} = \frac{h\nu}{hk} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv_т} = \frac{c^2}{v_т} = \frac{c^2}{v}.$$

Фазовая скорость волн де Бройля обратно пропорциональна скорости частицы, или, что то же самое, групповой скорости.

3. Вычислим длину волны λ для электрона. Если он прошел разность потенциалов V, то его импульс:

$$p = \sqrt{2meV}.$$

Длина волны

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}.$$

Если выразить λ в ангстремах $\mathring{A}$ $(1\mathring{A} = 10^{-8}$ *см*$)$, V в вольтах, то после подстановки численных значений получим:

$$\lambda(\mathring{A}) = \sqrt{\frac{150}{V\,(в)}} = \frac{12{,}25}{\sqrt{V(в)}}.$$

Для электрона, имеющего энергию 150 *эв*, $\lambda = 1\mathring{A}$, если $V = 1$ *в*, то $\lambda = 12{,}25\mathring{A}$. Если электрон имеет скорость, близкую к скорости света, соотношение, основанное на классической связи между энергией и импульсом, оказывается непригодным. Для ультрарелятивистского электрона

$$p \simeq \frac{E}{c} \quad и \quad \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{c}{\nu}.$$

Если выразить энергию в мегаэлектронвольтах, а λ в $\mathring{A}$, то

$$\lambda = \frac{3{,}18 \cdot 10^{-2}}{E\,(Мэв)}.$$

При $E = 318$ *Мэв* $\lambda = 10^{-4}\,\mathring{A} = 10^{-12}$ *см*.

Для электрона, ускоренного в синхротроне до энергии $E = 1{,}5$ *Бэв*, $\lambda = 2{,}2 \cdot 10^{-13}$ *см*.

Для протона, прошедшего небольшую разность потенциалов,

$$\lambda = \frac{0{,}286}{\sqrt{V\,(в)}}\ \mathring{A}.$$

Длина волны частиц при тепловом движении на основании $\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}kT$ равна

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}.$$

Если выразить массу в а. е. м., T в градусах, λ в ангстремах, то

$$\lambda = \frac{23{,}8}{\sqrt{MT}}\,(\mathring{A}).$$

Для протона или нейтрона $M = 1$, тогда $\lambda = \frac{23{,}8}{\sqrt{T}}\ \mathring{A}$.

При $T \approx 300°$ K $\lambda \approx 1{,}4\mathring{A}$,

Экспериментальная проверка гипотезы де Бройля. Опыты Девиссона — Джермера по рассеянию электронов. Первой исторической проверкой гипотезы де Бройля были опыты американских физиков Девиссона и Джермера. На рис. 231 приведена схема опыта. На грань кристалла Ni из электронной пушки Э падает узкий пучок электронов. При соударении с кристаллом пучок рассеивается во все стороны. Цилиндр Фарадея может перемещаться по окружности вокруг точки O. С цилиндром связан регистрирующий прибор, показывающий число электронов (по току), рассеянных в небольшой угол $d\omega$ (постоянный) под углом φ к направлению первоначального пучка.

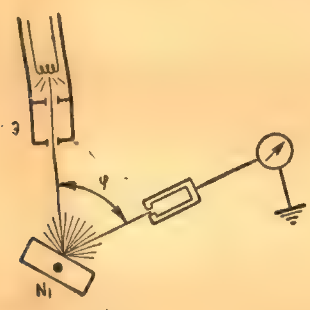


Рис. 231

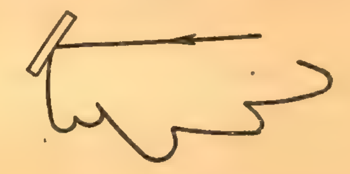


Рис. 232

При построении полярной диаграммы тока от угла φ для данного угла φ откладывается отрезок, пропорциональный количеству электронов. На рис. 232 приведена полярная диаграмма для рассеяния электронов на поликристалле никеля.

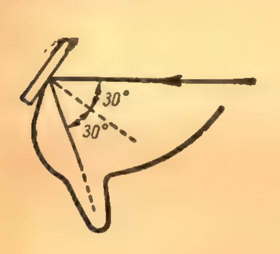


Рис. 233



Рис. 234

Обращает внимание наличие резко выраженных максимумов. Положение и величина максимумов зависит от энергии электронов. Попытка расчета полученной картины с точки зрения взаимодействия электрона как частицы с атомами кристалла не может объяснить наличия максимумов, передающих некую периодичность при отражении электронов. На рис. 233 приведена полярная диаграмма интенсивности рассеянных электронов от монокристалла никеля. Симметрично падающему лучу, под углом зеркального отражения наблюдается резкий максимум тока. Так же, как и в предыдущем случае, объяснить наличие максимума под углом зеркального отражения, рассматривая электрон как заряженную частицу, взаимодействующую с заряженными ионами кристаллической решетки, оказывается невозможным. Наличие максимумов на рис. 232, 233 свидетельствует о механизме отражения, характерном для волнового процесса.

Предположим, что с движением электронов действительно связана волна де Бройля, определяющая поведение электронов при их взаимодействии с ионами. В этом случае можно рассматривать отражение волн от атомных плоскостей (рис. 234) аналогично интерференции в тонких пленках в оптике. Если обозначить расстояние между атомными плоскостями буквой d, то разность хода лучей, отраженных от двух параллельных атомных плоскостей, будет определяться соотношением $2d \sin\theta = m\lambda$, где θ — угол скольжения, λ — длина волны, m — порядок интерференции.

Эта формула была получена для интерференции рентгеновых лучей на атомных плоскостях Вульфом и Бреггами и называется их именами. Ее можно использовать для проверки гипотезы де Бройля. Величину d можно определить по интерференции рентгеновых лучей. Расположим электрон-

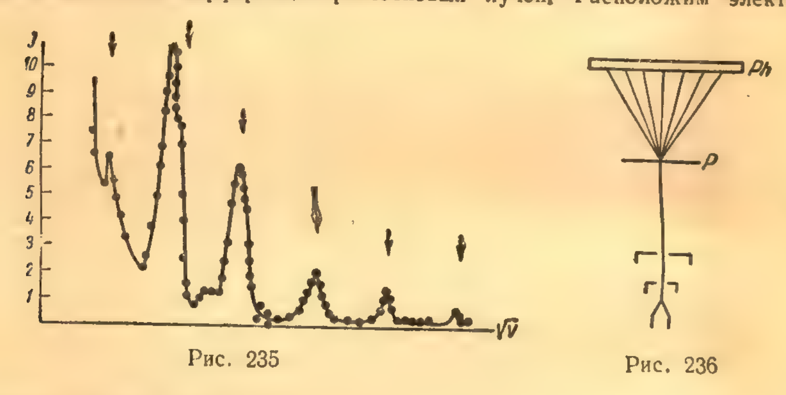


Рис. 235 Рис. 236

ный луч и коллектор под равными углами к нормали и будем менять длину волны λ электронов, меняя величину ускоряющего напряжения. Тогда, если разность хода будет равна целому числу длин волн, то мы получим максимум тока, при полуцелом числе длин волн — минимум.

Положение максимумов легко рассчитать заранее. На основании соотношения

$$\lambda = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}$$

можно записать

$$2d \sin\theta = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}\, m,$$

или

$$V^{1/2} = \left(\frac{12{,}25}{2d \sin\theta}\right) m.$$

На рис. 235 вычисленное (ожидаемое) положение максимумов в координатах $V^{1/2}$, I (I — ток коллектора) отмечено стрелками. Сплошной линией обозначена экспериментально полученная кривая тока в зависимости от ускоряющего напряжения при фиксированном положении электронного луча, коллектора и монокристалла. Обращает на себя внимание, что вычисляемое и наблюдаемое положение максимумом для больших V прекрасно совпадает, но с увеличением длины волны (с уменьшением V) наблюдается систематически увеличивающееся расхождение. Оба эти факта говорят, что гипотеза де Бройля безусловно подтверждается, но что в расчетах не учтен какой-то фактор, сказывающийся при больших длинах волн. Расхождение между ожидаемым и наблюдаемым положением максимумов объясняется следующими со-

ображениями. Из фотоэффекта известно, что для того; чтобы вырвать электрон из металла в вакуум, необходимо сообщить ему энергию, произвести работу, а это означает, что потенциальная энергия электрона в металле по отношению к вакууму отрицательна ($-\varphi$). Если электрон, имеющий в вакууме кинетическую энергию E и нулевую потенциальную энергию, переходит в металл, то его полная энергия сохраняется. Следовательно, $E + 0 = E_1 + (-\varphi)$. Следовательно,

$$E_1 = E + \varphi = eV + eU_0 = e(V + U_0),$$

т. е. кинетическая энергия электрона E_1 увеличивается на величину работы выхода. Но это означает, что длина волны де Бройля уменьшается:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E+\varphi)}},$$

т. е. в формуле необходимо учитывать преломление волн де Бройля на границе вакуум-металл.



Рис. 237

Коэффициент преломления для волн де Бройля, записанный через отношение фазовых и групповых скоростей,

$$n = \frac{u}{u_1} = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{V + U_0}{V}} = \sqrt{1 + \frac{U_0}{V}},$$

где u, u_1 — фазовые, а v, v_1 — групповые скорости волн де Бройля в вакууме и в металле соответственно; U_0 — потенциал металла относительно вакуума $\left(U_0 = \frac{+\varphi}{e} > 0\right)$.

Если учесть преломление волн де Бройля, тогда вычисляемое и наблюдаемое положения максимумов прекрасно совпадают. Определяемый из этих же опытов, внутренний потенциал металла U_0 хорошо согласуется со значениями, полученными из других явлений.

Дифракция электронов. Волновые свойства электронов можно обнаружить и другим способом. Если на тонкую поликристаллическую пластинку P пустить электронный пучок (рис. 236), то на экране Ph будет наблюдаться картина, подобная дифракционной картине рентгеновых лучей. На рис. 237 приведена фотография дифракционной картины для электронов от порошка $NaCl$.

Рис. 237 показывает, что при прохождении поликристаллической пленки электроны летят по вполне определенным направлениям, определяемым дифракционными условиями.

Дифракционные явления наблюдаются не только с электронами, но и протонами, атомами и даже молекулами.

Помимо дифракции электронов можно наблюдать и их интерференцию. На рис. 238 приведена интерференционная картина, полученная с электронно-оптической бипризмой Френеля.

На рис. 239 приведена схема действия электронно-оптической бипризмы Френеля.

Электроны из источника S проходят через симметричное электрическое поле, образованное двумя заземленными электродами $Э_1$ и $Э_2$ и электродом F в виде тонкой проволоки. Меняя положительный потенциал на электроде F, можно менять преломляющую силу двойной призмы. Вследствие преломления на бипризме электронные волны, прошедшие через левую и правую половины призмы, сводятся на экране вместе. Волны, прошедшие на экран Ph, получены из одной волны расщеплением в призме, поэтому они являются когерентными и дают на экране интерференционную картину. Для расчета разности хода можно рассматривать два мнимых когерентных источника

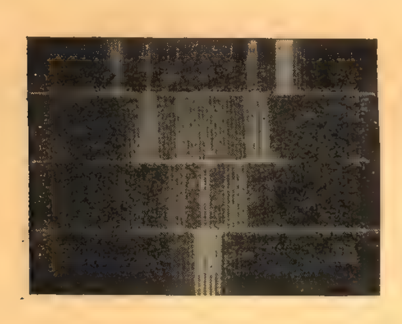


Рис. 238

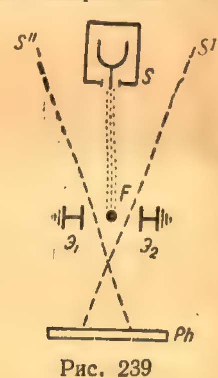


Рис. 239

S', S''. Размеры интерференционной картины пропорциональны длине волны, а так как длина электронных волн мала, то для наблюдения интерференционной картины требуется большое увеличение. Снимки рис. 238 получены при различных ускоряющих напряжениях (разные λ).

Мы говорим, что электроны дифрагируют. Какой смысл мы вкладываем в это понятие?

Чем отличается явление дифракции электронов от рассеяния электронов? Действительно, электроны, пролетая через кристалл, взаимодействуют с атомами и ионами кристаллической решетки по законам взаимодействия точечных зарядов (собственных у ионов и наведенных, индуцированных у атомов). Учитывая взаимодействия со всеми атомами и ионами, встречающимися на пути электрона, казалось бы, можно было вычислить величину отклонения электронов от первоначального направления. Однако, теория дает при этом монотонный спад числа рассеянных электронов с ростом угла рассеяния. Наличие и чередование максимумов классическая теория не объясняет. Наличие максимумов и минимумов говорит о том, что электрон обладает волновыми свойствами, что с его движением связано распространение волны, длина которой согласно предположению де Бройля определяется импульсом электрона:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

В таком случае мы, говоря о дифракции, подчеркиваем, что электрон, проходя кристалл, одновременно взаимодействует со всеми ионами с одинаковыми силами, что и дает дифракционную картину, характеризующуюся закономерным чередованием максимумов и минимумов.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга. Естественно возникает вопрос, обладает ли волновыми свойствами каждая отдельная частица, или волновые свойства присущи набору электронов. В опытах Фабриканта, Бибермана и Сушкина для получения дифракционной картины использовался электронный пучок очень малой интенсивности, так что взаимодействие электронов в пучке, которое могло бы обусловить волновые свойства, отсутствовало. Однако и в этом случае получалась обычная дифракционная картина. Это означает, что волновыми свойствами обладает каждая частица.

Из волновых свойств вытекает важный вывод, раскрывающий внутреннюю природу свойства микрочастиц: микрочастица (так же как и любая волна) не имеет одновременно точного значения координаты и импульса. Это значит, что представлять движение микрочастиц по определенной траектории с определенной скоростью в каждой точке невозможно (подобно движению обычных, классических частиц), всякая волна не имеет траектории в виде геометрической линии. Это проявляется в том, что если мы будем измерять одновременно координаты, положение частицы и ее скорость или импульс, то неточности, с которыми мы можем измерять эти величины, удовлетворяют соотношению: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h$, где Δx — неточность в значении координаты электрона, Δp_x — неточность в значении импульса, связанная с неточностью в скорости соотношением; $\Delta p_x = m\Delta v_x$. Это соотношение, постулированное впервые Гейзенбергом и называемое соотношением неопределенностей, буржуазными физиками трактуется идеалистически: невозможно одновременно измерить точно координату и импульс частицы, ибо в процессе измерения, например, координаты измерительный прибор изменяет импульс микрочастицы; вследствие неконтролируемого воздействия измерительного прибора нарушается возможность причинного описания поведения микрочастицы и познания их свойств и характеристик. Отрицание причинности в микромире и его познаваемости заложено в махистском, позитивистском мировоззрении большинства крупнейших буржуазных физиков.

Согласно трактовке, принятой в советской физике, соотношения неопределенности ограничивают возможности перенесения представлений и образов из классической физики в физику микрочастиц, показывают их неприменимость. В соотношении неопределенности отражается своеобразие микрочастиц, подчеркивается синтез дуалистических, противоречивых свойств — свойство волны и свойство частицы — микрочастиц.

Легко показать, что из волновых свойств действительно должны вытекать соотношения для неточностей. Рассмотрим дифракцию электронов на узкой щели шириной b, за которой расположен экран; после прохождения щели электроны дают дифракционную картину. Угловая величина нулевого максимума определяется соотношением:

$$\sin\varphi \simeq \frac{\lambda}{b}.$$

Дифракционное распределение обусловлено тем, что в момент прохождения электроном щели его импульс из $\mathbf{p}_0=(p_x, 0)$ превратился в $\mathbf{p} = (p_x, \Delta p_y)$; величина $\Delta p_y \simeq p_x \sin\varphi \simeq p\frac{\lambda}{b}$ характеризует неопределенность p_y — компоненты импульса в результате дифракции. До прохождения щели $\Delta p_y = 0$. Рассмотрим теперь координату y. До прохождения щели координата y была совершенно неопределенной. В момент прохождения щели координата y определена с точностью до ширины щели b, а импульс при этом с точностью Δp_y. Их произведение:

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \simeq p\frac{\lambda}{b}\, b = p\frac{h}{p} = h.$$

Если учесть максимумы более высоких порядков, то в общем случае:

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geqslant h.$$

Соотношение неопределенностей, отражающее волновые свойства частиц, характеризует движения любых тел. Но так как размеры дифракционных картин пропорциональны длине волны, то волновыми свойствами частиц можно пренебречь, если эти частицы обладают большим импульсом. В этом случае можно описывать их движение как движение обычных частиц. Соотношение Гейзенберга при этом всегда удовлетворяется. Действительно, пусть пуля в 10 *г* движется со скоростью 800 *м/сек*. Предположим, что мы определим ее координату с точностью до $1\mu = 10^{-3}$ *мм* и скорость — с точностью до $10^{-3}\%$ (!), т. е.

$$\Delta x = 10^{-4}\ см;\ \Delta v_x = 8 \cdot 10^{-1}\ см/сек;\ \Delta p_x = 8\ гсм/сек.$$

Тогда

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim 8 \cdot 10^{-4} \gg h.$$

Соотношение неопределенностей заведомо выполняется, и мы вправе пренебрегать волновыми свойствами макротел и не учитывать их при описании движения. Другое положение в атомной физике. Если нас интересует движение электрона в атоме, мы должны знать его координату, например, с точностью до 10^{-3} размеров атома, т. е. $\Delta x \sim 10^{-11}$ *см*, а скорость с точностью хотя бы до $\Delta v \approx c \approx 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, что соответствует $\Delta p_x \sim 2{,}7 \cdot 10^{-17}$.

Тогда $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx 10^{-11} \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-17} \approx 13 \cdot 10^{-28} < h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}$. И для того, чтобы выполнялось соотношение неопределенности, Δx должно быть $\sim 10^{-9}$, т. е порядка размера атома.

Приведенный пример, показывает, что попытка описать поведение электрона в атоме в терминах и понятиях классической физики оказывается несостоятельной. Предел применимости понятий классической физики к внутриатомным явлениям кладут волновые свойства частиц.

§ 14. Рассеяние электронов атомами и ионами

Упругое и неупругое соударения. Прохождение пучка электронов через разреженный газ приводит к уменьшению их числа в пучке, вызываемому рассеянием. Рассеяние есть результат сложного процесса взаимодействия электрона с атомом, который для краткости называют соударением. Различают упругое и неупругое соударение.

Соударение называется упругим, если сумма кинетических энергий электрона и атома сохраняется постоянной. Если же сумма кинетических энергий электрона и атома после соударения будет меньше (или больше), чем до соударения, то соударение называется неупругим. Таким образом, при неупругом соударении часть кинетической энергии превращается в другие формы.

Понятие эффективного сечения. Понятие эффективного сечения того или иного процесса играет в атомной и, особенно, в ядерной физике огромную роль. Оно вводится в рассмотрение следующим образом.

Пусть на единичную площадку в единицу времени падает n_0 частиц, например, электронов. Пусть на ней расположена частица с площадью поперечного сечения σ. Тогда вероятность того, что один (точечный) электрон попадет в эту частицу, будет равна отношению площадей: $\sigma/1^2 = \sigma$. Если таких частиц на единице площади будет n, тогда вероятность попадания для

одного электрона будет $n\sigma$, а для n_0 — $n_0 n\sigma$. При большом числе падающих частиц число попаданий

$$N = \sigma n n_0.$$

Таким образом, площадь сечения шарика дает относительную вероятность попадания в него электрона. В случае, если электрон (протон, нейтрон или другая частица) падает, например, на фольгу, то представление об атоме как шарике непригодно. Непригодно понятие площади сечения для иона, на который падает электрон, поскольку их взаимодействие происходит на любых расстояниях. Но во всех этих случаях можно ввести понятие эффективного сечения (или эффективного поперечника) σ^* как некоторой площади, вероятность попадания в которую равна вероятности «соударения» частиц. Введенное таким образом эффективное сечение процесса должно быть сложной функцией скоростей частиц, видов сталкивающихся частиц, типов рассматриваемых процессов.

Рис. 240

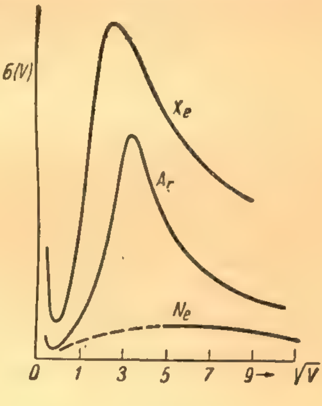


Рис. 241

Знание эффективных сечений тех или других процессов позволяет получать много ценного о них. Например, пусть параллельный пучок электронов с интенсивностью I падает на слой вещества (газ, фольга), в котором в единице объема содержится n атомов, имеющих эффективное сечение рассеяния электронов σ^*. Тогда вероятность рассеяния электронов слоем толщиной dx будет пропорциональна $ndx\sigma^*$. Это приведет к ослаблению интенсивности пучка на

$$-dI = Indx\sigma^*,$$

откуда легко получается зависимость интенсивности пучка от проходимой толщины:

$$I = I_0 e^{-\sigma^* nx}.$$

Обычно значок (*) у σ^* опускается.

Угловое распределение. Дифференциальный поперечник рассеяния. При столкновении с атомами электроны рассеиваются под различными углами. Большое значение имеет знание углового распределения рассеянных частиц, которое можно определить следующим образом: из всех рассеянных частиц в угловой интервал $d\Omega$ под углом θ к направлению движения электронов рассеется dN электронов:

$$dN = Nndxf(\theta)\,d\Omega.$$

Из этого выражения следует, что $f(\theta)d\Omega$ есть вероятность рассеяния электронов в угловой интервал $d\Omega$ под углом θ, т. е. это можно назвать дифферен-

циальным поперечником рассеяния; $f(\theta)$ — вероятность рассеяния в единичный угловой интервал под углом θ — определяет угловое распределение рассеянных электронов.

Классическая физика и рассеяние. Классическая теория рассеяния частиц приводит к выводу, что угловое распределение $f(\theta)$

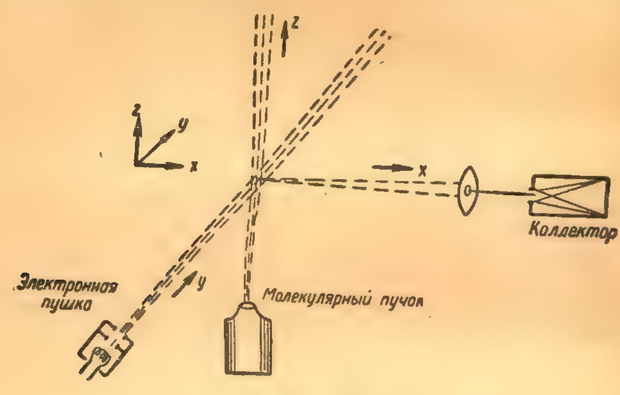


Рис. 242

должно быть монотонной функцией угла θ (рис. 240). Рассматривая зависимость эффективного сечения от скорости электронов, классическая физика приводит к монотонной зависимости $\sigma^*(v)$.

Эффект Рамзауэра. На рис. 241 приведены результаты по определению эффективного сечения и его зависимость от скорости для благородных газов.

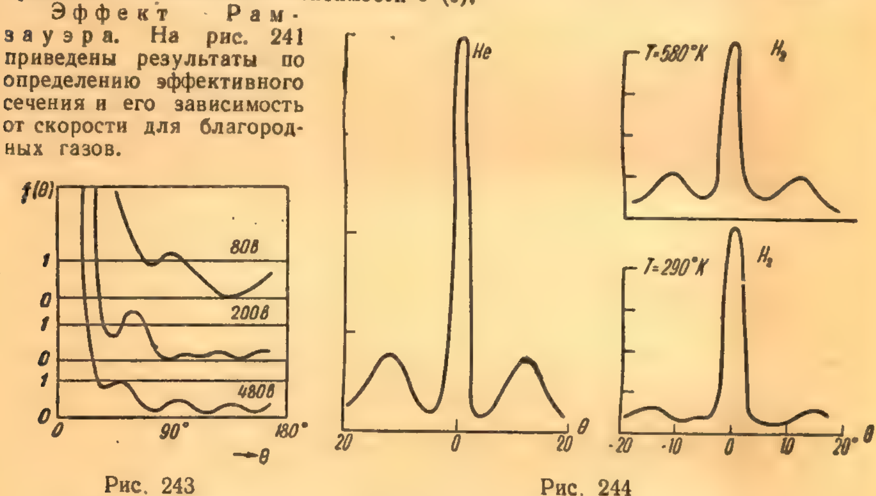


Рис. 243 Рис. 244

Обращает на себя внимание немонотонная зависимость σ от v. В области малых энергий наблюдается аномальная прозрачность газов, поперечник $\sigma < \pi r^2$, где r — радиус атомов, полученный из газокинетических соотношений. Аномальная прозрачность газов при малых скоростях известна как эффект Рамзауэра.

Угловое распределение. Принципиальная схема измерения $f(\theta)$ сводится к следующему. Пучок молекул, даваемый молекулярной

пушкой (рис. 242) обстреливается пучком электронов под прямым углом к молекулярному пучку. Коллектор может вращаться вокруг молекулярного пучка в перпендикулярной ему плоскости, тем самым можно найти $f(\theta)$.

На рис. 243 приведена $f(\theta)$ для паров ртути, обстреливаемых электронами различных энергий. Обращает на себя внимание прекрасно выраженная периодичность, напоминающая дифракционные максимумы.

Дифракция тяжелых частиц. На рис. 244 приведены кривые, дающие угловое распределение для интенсивности отраженного пучка атомов гелия и молекул водорода от кристалла фтористого лития. Они показывают, что и в этом случае наблюдаются дифракционные максимумы.

§ 15. Системы с отрицательным поглощением

Квантовая радиофизика. В последние годы бурное развитие получила отрасль физики, называемая квантовой радиофизикой, имеющая большое теоретическое и практическое значение. Основной задачей квантовой радиофизики является получение и усиление излучений с помощью квантовых систем (атомов, молекул, кристаллов). Использование квантовых систем позволяет получать крайне стабильные колебания $\delta\nu(\nu\sim10^{-12})$, преобразовывать энергию излучения оптического участка спектра в энергию излучения сантиметрового и миллиметрового диапазона, что методами обычной радиофизики удается получить с большими трудностями.

Методы квантовой радиофизики позволяют получать излучение в инфракрасной области спектра значительно большей интенсивности, чем от тепловых источников. В оптической части спектра можно получить узкие направленные пучки большой мощности.

Понятие отрицательной температуры. Равновесное распределение частиц по энергии E описывается, в зависимости от их спина, функцией распределения Ферми — Дирака или Бозе — Эйнштейна:

$$f(E,T)=\left(e^{\frac{E-F}{kT}}\pm1\right)^{-1}.$$

Характерной особенностью функции распределения является то, что вероятность с ростом энергии уменьшается. Это означает, что в системе из N частиц на более высоком энергетическом уровне будет меньше частиц, чем на более низком:

$$n_l<n_k,\ \text{если}\ \ E_l>E_k.$$

В системах неравновесных в энергетически более высоких состояниях может находиться больше частиц, чем в более низких, т. е.

$$n_l>n_k,\ \text{если}\ E_l>E_k.$$

В этом случае распределение частиц по состояниям можно описать теми же функциями распределения, если считать формально температуру отрицательной, Действительно, в случае статистики Больцмана:

$$\left.\begin{aligned}n_l&=Ne^{-\frac{E_l}{kT}}\\ n_k&=Ne^{-\frac{E_k}{kT}}\end{aligned}\right\}\frac{n_l}{n_k}=e^{\frac{E_k-E_l}{kT}}.$$

Если $E_l>E_k$, и $n_l>n_k$, то это возможно только в том случае, если считать $T<0$. Необходимость введения понятия отрицательной температуры вытекает из того, что функции распределения равновесных состояний применяются к неравновесным распределениям. При этом необходимо иметь в виду, что отрицательная температура не имеет физического смысла подобного понятию обычной темпера-

туры, а является только удобной математической величиной, характеризующей неравновесность системы. Если система имеет только два состояния E_1 и E_2 ($E_2 > E_1$), то

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{kT}}.$$

Если $T \to +0$, то $n_2 = 0$, $n_1 = N$, т. е. все частицы находятся на нижнем уровне. Если $T \to (-0)$, то $n_1 = 0$, $n_2 = N$ — все частицы находятся на верхнем уровне.

Если система имеет несколько уровней, то уровень E_l может иметь отрицательную температуру только по отношению к одному, или двум или нескольким уровням, тогда как по отношению к остальным уровням он имеет положительную температуру.

Отрицательная абсорбция. Важнейшим свойством систем с отрицательной температурой является то, что они обладают отрицательным поглощением. Это означает, что при прохождении светом систем с отрицательной температурой интенсивность света возрастает. Действительно, пусть вероятность перехода из состояния l в состояние k равна w_{lk} ($= w_{kl}$). Тогда число переходов из l в k будет пропорционально числу занятых состояний в l и числу свободных состояний в k:

$$I_{lk} \sim w_{lk} f_l (1 - f_k).$$

Переходы из l в k (излучение!) будут происходить как под действием нулевых флуктуаций вакуума (спонтанные переходы) так и под действием падающего излучения, пропорционально числу падающих фотонов n_{lk} (индуцированные, или вынужденные переходы):

$$I_{lk} = w_{lk} f_l (1 - f_k)(1 + n_{lk}).$$

Переходы из k в l (поглощение) будет определяться аналогичным соотношением:

$$I_{kl} = w_{kl} f_k (1 - f_l) n_{lk}$$

Истинное «поглощение» $I_{погл.}$ будет определяться разностью:

$$I_{погл} = I_{kl} - I_{lk}.$$

Но

$$I_{kl} - I_{lk} = w_{lk} n_{lk} (f_k - f_l) + w_{lk} f_l (f_k - 1).$$

Это выражение показывает, что если уровень l имеет отрицательную относительно k температуру, то поглощение $I_{погл} < 0$, так как

$$f_l > f_k.$$

Первый член пропорционален числу падающих фотонов. Это значит, что свет, проходя через систему, усиливается по мере ее прохождения:

$$I = I_0 e^{-\varkappa x},$$

где x — проходимый светом путь,

I_0 — интенсивность падающего на систему света,

$\varkappa$ — отрицательный коэффициент поглощения.

Усиление пучка происходит потому, что индуцированные фотоны имеют ту же поляризацию и направление движения, что и падающие.

Второй член не зависит от числа падающих фотонов, поэтому он обусловливает шумы усилителей.

Системы с отрицательной температурой могут служить не только для усиления, но и для генерации. Для этого на выходе луча из системы часть его энергии необходимо подвести к входу (положительная обратная связь), благодаря чему необходимость во внешнем источнике отпадает. Случайно возникшие излучения, например, за счет спонтанных переходов, могут привести систему в устойчивое автоколебательное состояние.

Методы получения отрицательных температур: *а*) Одним из первых методов получения отрицательных температур был метод сортировки молекул аммиака в молекулярном генераторе, созданном Басовым и Прохоровым. Молекулы аммиака распределены по различным вращательным и инверсионным уровням. Если их пропустить через неоднородное электрическое поле квадрупольного конденсатора, то они отклоняются в этом поле по-разному, в зависимости от направления электрического дипольного момента молекулы. Таким образом удается собрать на оси конденсатора только активные молекулы, которые пропускают в резонатор, где и происходит усиление излучения.

Увеличивая поток молекул, можно увеличить коэффициент усиления, но это приводит к самовозбуждению усилителя и превращению его в генератор. Молекулярный генератор на аммиаке работает в миллиметровом и сантиметровом диапазоне длин волн. Стабильность частоты молекулярного генератора характеризуется величиной: $\frac{\delta\nu}{\nu} \approx 10^{-12}$, что было до открытия эффекта Мёссбауэра рекордной величиной.

б) Отрицательные температуры можно получить с помощью газового разряда. Прохождение тока через газ приводит к возбуждению атомов или молекул газа. В зависимости от соотношений времен жизни уровней для некоторых пар из них возможно получение отрицательных температур.

в) Отрицательные температуры могут быть получены в полупроводниках. Для этого к полупроводнику прикладывается импульсное электрическое поле. Благодаря этому определенная часть электронов из валентной зоны будет переведена в свободную зону. Концентрация свободных носителей в зонах окажется повышенной по сравнению с их равновесным распределением. Отрицательная температура по отношению к валентной и свободной зонам будет получена, если, например, $f(E) \geqslant 0{,}5$ для энергии E вблизи E_c — дна свободной зоны, и $f(E) \geqslant 0{,}5$ для E вблизи E_v — потолка валентной зоны. Практически при этом полупроводник будет вырожденным. Для образования отрицательных температур необходимо, чтобы время жизни свободных носителей было больше времени установления равенства температуры электронов и температуры решетки (время замедления электронов). Возникающие при этом трудности связаны с необходимостью получения низких температур (1—2° К).

г) Широкое распространение получил метод двойного резонанса, сущность которого сводится к следующему. Пусть система имеет три энергетических уровня E_1, E_2, E_3 ($E_1 < E_2 < E_3$). Если на систему воздействовать частотой ω_{13}, то между уровнями 1—2 или 2—3 могут возникнуть состояния с отрицательной температурой. В таком случае излучение с частотой ω_{12}, или ω_{23}, будет усиливаться. Таким путем энергия оптической части спектра может легко преобразовываться в энергию миллиметрового диапазона или инфракрасного участка спектра. С помощью кристаллов (рубин), удается получать излучения в оптической области спектра.

Для лучшего использования энергии большой частоты излучающий кристалл помещается в резонатор. Его можно получить, если, например, на плоскопараллельные торцы кристалла нанести зеркала с большим коэффициентом отражения, что приводит к многократному использованию возбуждающего света. Для выхода усиленного излучения в одном из зеркал делается небольшое отверстие. Таким путём можно получить направленное излучение большой мощности.

РАЗДЕЛ СЕДЬМОЙ

Основы квантовой механики

§ 1. Волновая функция

Квантовая механика — это механика микромира, механика движения микрочастиц в микрополях — в атомах, молекулах, кристаллах. Отображая резкое своеобразие микромира, квантовая механика имеет целый ряд особенностей, делающих ее на первых порах трудной для восприятия и усвоения.

Основной особенностью квантовой механики является ее статистический характер; то, что она позволяет вычислять лишь вероятность того или иного значения определенной физической величины. Причина этого кроется в корпускулярно-волновом дуализме микромира, в том, что микрочастицы обладают как корпускулярными, так и волновыми свойствами. Однако между классической статистической механикой и квантовой механикой есть глубокое различие — статистическая механика основана на механике Ньютона, она возникает в результате усреднения характеристик движения отдельных частиц. В принципе мы могли бы дать описание движения отдельной частицы, и если мы этого не делаем, то это связано лишь с огромными математическими трудностями. Квантовая механика в современной трактовке исходит из того, что в принципе невозможно построение теории индивидуального микропроцесса, что возможна лишь теория статистических совокупностей — ансамблей, тождественных микрообразований.

Вторая особенность микромира и, следовательно квантовой механики, атомизм — дискретность физических величин; например, заряд в микромире изменяется на величину, кратную заряду электрона $e = 4{,}802 \cdot 10^{-10}$СГСЭ$_q$. Не наблюдается заряда $\frac{1}{2}e$, или $\frac{1}{4}e$ и т. д. Огромную роль в микромире играет постоянная Планка[1] $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ *эрг. сек* так называемый квант действия — это та основная мера, которой измеряются все основные величины в микромире.

Чтобы понять необходимость и своеобразие квантовой механики, необходимо хорошо представить те экспериментальные факты, из которых она вытекает.

Третья особенность заключается в том, что при построении аппарата квантовой механики мы всегда исходим из классической механики, в которую квантовая механика переходит при $\hbar \to 0$. Квантовая механика берет свое обоснование в классической физике, без которой она не может быть построена.

Однако квантомеханическое описание имеет целый ряд особенностей.

---

[1] $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ называется также постоянной Дирака.

Например, нельзя представить себе движение микрочастиц как движение по какой-то определенной траектории. Это вытекает например, из опытов по интерференции электронов. Но если движение электрона нельзя представить в виде движения по траектории, то, следовательно, понятие скорости для электронов (микрочастиц) нельзя определять так же, как мы это делаем для обычных частиц.

Истолкование волн де Бройля. Опыты показывают, что волны де Бройля реальны, объективны. Какой же физический смысл они должны иметь?

1. Элементарные частицы — волновые пакеты. Однако волновые пакеты обладают дисперсией даже в вакууме, так как фазовая скорость зависит от частоты: $u = \frac{\hbar k}{2m}$, что ведет к размазыванию, расплыванию волнового пакета в пространстве. Но элементарные частицы очень устойчивые образования, следовательно, они не могут моделироваться волновыми пакетами, группой волн.

2. Трактовка Борна. Пустим на экран один, два, три и т. д. электрона. Получим ли мы на экране электронографа полную, но слабую картину дифракции? Нет, на экране мы получим отдельные точки дифракционной картины. Пуская электрон один за другим, мы увидим, что чаще всего они попадают в те точки экрана, на которые приходится максимум интенсивности волн де Бройля. Сравним это со светом.

Интенсивность интерференционной картины мы получаем только на основе волновой теории света, она пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического вектора световой волны. Но с точки зрения фотонной теории — интенсивность определяется числом фотонов, попадающих в данное место интерференционной картины. Следовательно, число фотонов в данном месте определяется квадратом амплитуды световой волны, но для одного фотона квадрат амплитуды определит вероятность попадания фотона в ту или другую точку интерференционной картины. Аналогично, вероятность нахождения микрочастицы в элементе объема dV, взятого вокруг данной точки,

$$dw = |\psi|^2 dV = \psi\psi^* \, dV,$$

т. е. квадрат модуля $|\psi|^2$ есть плотность вероятности распределения электронов по пространству: $\frac{dw}{dV} = |\psi|^2$. Запись $w = |\psi|^2 = \psi\psi^*$ вместо ψ^2 вытекает из того, что ψ может оказаться комплексной величиной, и тогда ψ^2 будет также комплексной, но вероятность есть вещественная положительная величина.

Условие нормировки. Очевидно, что положение частицы необходимо рассматривать во всем пространстве. В таком случае, то что, частица где-то находится, является достоверным событием, но вероятность этого события равна единице. Следовательно, $\int \psi^* \psi \, dV = 1$ — вероятность достоверного события.

> Замечание. В данном случае, как и ниже, пределы интегрирования опускаются. Под ними понимаются границы области существования переменной интегрирования.

Равенство интеграла единице носит название «условие нормировки», поскольку этим самым накладывается определенное условие на выбор постоянных коэффициентов, которые могут входить в волновую функцию ψ. Так как $\psi = \psi(x, y, z, t)$, то условие нормировки должно выполняться для любого момента времени — в противном случае оно не имеет смысла.

Это условие всегда может быть выполнено, если волновая функция имеет вид волнового пакета. Но в частном случае плоских волн оно не может быть выполнено.

Действительно, если

$$\psi = Ae^{-i(\omega t - kx)}, \quad \psi^* = A^* e^{i(\omega t - kx)},$$

то $\psi^* \psi = A^* A = |A|^2$,
тогда

$$\int \psi^* \psi dV = |A|^2 \int dV = \infty.$$

В этом случае условие нормировки должно быть сформулировано по-другому (см. нормировка функций с непрерывным спектром).

Таким образом, знание $\psi(x, y, z, t)$ позволяет определить лишь вероятность того или иного значения координаты микрочастицы. Следовательно, квантовая механика, позволяя вычислять лишь вероятности, является теорией статистической. Для проверки ее выводов необходимо иметь дело с очень большим числом тождественных систем, так называемых квантовых ансамблей.

Нельзя делать выводы из сказанного, что волновыми свойствами должны обладать лишь совокупности частиц. Волновыми свойствами обладает каждая частица, что проверялось экспериментально Фабрикантом, Биберманом, Сушкиным.

§ 2. Уравнение Шредингера

Необходимо найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют волны де Бройля во всех случаях с тем, чтобы можно было решать различные практические задачи.

Уравнение для плоских волн де Бройля. Чтобы получить уравнение для плоских волн де Бройля: $\psi = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{pr})}$ необходимо продифференцировать ψ один раз по времени и дважды по пространственным координатам, в результате чего получим:

$$\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\psi = \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi\right).$$

Но так как $E = \frac{p^2}{2m}$,

$$\text{то } i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Уравнение Шредингера. Предположим теперь что частица находится в некотором поле, которое имеет потенциал $U(x, y, z)$. Тогда полная энергия частицы будет складываться из кинетической $T = \frac{p^2}{2m}$ и потенциальной $U(x, y, z)$;

$$E = T + U = \frac{p^2}{2m} + U(x, y, z).$$

Австрийский физик Эрвин Шредингер предположил, что для частицы в поле U надо «подставить» в уравнение волны $\psi \approx e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{pr})}$ выражение полной энергии. В таком случае $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E$, или $E = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$, а $\frac{p^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$.

Но $E = \frac{p^2}{2m} + U$

должно было бы быть:

$$E\psi = \left(\frac{p^2}{2m} + U\right)\psi,$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right)\psi.$$

Это выражение носит название уравнения Шредингера.

Условия, налагаемые на функцию ψ. Для того, чтобы решение уравнения Шредингера имело смысл, необходимо наложить на волновую функцию ψ следующие условия.

1. *Однозначность* Состояние движения определяется функцией ψ.

По смыслу ψ есть амплитуда вероятности, следовательно, $\psi^*\psi$ — плотность вероятности. а $\psi^*\psi dV$ — вероятность найти частицу в объеме dV около точки x, y, z, в момент времени t. Эта вероятность вполне определенная величина, следовательно ψ должна быть однозначной функцией координат и времени, в противном случае мы получим, что для одной и той же точки r имеется две или больше вероятности, что лишено всякого физического смысла.

Примечание. ψ определена с точностью до $e^{i\alpha}$, где α — любая вещественная величина.

2. *Конечность.* Чтобы вероятность была конечной, необходимо, чтобы функция ψ была всюду конечной, и вместе со своей первой производной должна обращаться в ноль на бесконечности.

3. *Непрерывность.* Состояние микрочастиц описывается волновой функцией ψ — это аналог траектории в классической физике. Состояние квантовой системы в пространстве и времени должно меняться непрерывно. А это означает, что ψ должна быть функцией непрерывной. Вместе с непрерывностью волновой функции ψ должна быть непрерывной и ее первая производная. С точки зрения математики это является естественным требованием, поскольку уравнение Шредингера является уравнением второго порядка по пространственным координатам, и для того, чтобы оно имело смысл всюду, необходимо, чтобы и ψ и $\nabla\psi$ были всюду непрерывны.

Вектор плотности тока вероятности. Условие нормировки не зависит от времени. Если в некоторый момент t

$$\int \psi^*(x, y, z; t)\,\psi(x, y, z, t)\,dxdydz = 1,$$

то это равенство сохраняется во все моменты времени. Действительно, полагая $\int \psi^*\psi dv = f(t)$,

$$\frac{df}{dt} = \int \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi dV + \int \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}dV.$$

Подставляя вместо $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$ их выражение из уравнения Шредингера после сокращения получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{i\hbar}{2m}\int div\,[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*]\,dV = \frac{i\hbar}{2m}\int [\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*]_n\,ds.$$

Но так как на бесконечности ψ и $\nabla\psi$ обращаются в нуль, то $\frac{df}{dt} = 0$ и, следовательно, $f(t) = \text{const} = 1$. Из предыдущего равенства можно записать для произвольного объема v:

$$\int\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \text{div}\left[\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)\right]\right\}dV = 0.$$

Уравнение совпадает по форме с уравнением неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ в гидродинамике и теории электричества. Так как $\psi^*\psi = w$ есть плотность вероятности, то вектор $\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$ называется **вектором плотности тока вероятности.**

Замечание. Если система описывается вещественной волновой функцией $\psi^* = \psi$, то $\mathbf{j} = 0$.

Плотность заряда и плотность тока. Если известна волновая функция, то тем самым известно распределение плотности вероятности $w = \psi^*\psi$ для частицы. Величина $ew = e|\psi|^2$ дает плотность электрического заряда облака, создаваемого частицей, а $e\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $m\psi^*\psi$ — плотность вещества, $m\mathbf{j}$—плотность потока вещества.

Среднее значение координаты и функции от координаты. Если известна вероятность того или иного значения координаты, например, для $x - w(x) = \psi^*(x)\psi(x)$, то ее среднее значение определяется обычным способом:

$$\langle x \rangle = \int w(x)\, x dx = \int \psi^*(x)\, x \psi(x)\, dx.$$

Пусть задана произвольная функция $F(x)$.

Вероятность того, что координата частицы принимает значение в единичном интервале вокруг точки x_1 есть $\psi^*(x_1)\cdot\psi(x_1)$, а тем самым, это есть вероятность того, что $F(x) = F(x_1)$, но в таком случае:

$\int w(x) F(x)\, dx = \int \psi^*(x) F(x) \psi(x)\, dx = \langle F \rangle$ есть среднее значение функции $F(x)$.

§ 3. Операторы

Понятие оператора. В квантовой механике огромную роль играют операторы.

Оператор есть символическая запись тех действий, которые необходимо проделать над произвольной функцией u для получения некоторой другой функции v. Таким образом, оператор — это рецепт, по которому одной функции сопоставляется другая функция. Из определения следует, что понятие оператора является обобщением понятия функции, т. е. закона, рецепта, согласно которому одной величине (x) сопоставляется другая (y): $y = f(x)$. Операторы обозначаются часто таким образом: $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{A}$ ... Тогда $\hat{L}u = v$; $v(x) = \hat{L}u(x)$.

Примеры операторов. 1. Оператор дифференцирования $\hat{L} = \frac{d}{dx}$. Любой функции $u(x)$ он сопоставляет определенную функцию:

$$v = \hat{L}u(x) = \frac{du}{dx}.$$

2. Оператор интегрирования $\hat{L} = \int \dots dx$:

$$v(x) = \hat{L}u(x) = \int u(x)\, dx.$$

3. Оператор возведения в степень $\hat{L} = (\dots)^n$.

$$v = \hat{L}u = (u)^n = u^n.$$

4. Оператор извлечения корня $\hat{L} = \sqrt[n]{\ldots}$:

$$v(x) = \hat{L}u = \sqrt[n]{u(x)}$$

и т. д.

Понятие линейного оператора. Оператор называется линейным, если он удовлетворяет следующему условию:

$$\hat{L}\,[au(x) + bv(x)] = \hat{L}\,(au(x)) + \hat{L}\,(bv(x)) =$$

$$= a\hat{L}u(x) + b\hat{L}\,v(x),$$

где a и b — постоянные величины.

Примеры линейных операторов — оператор дифференцирования, интегрирования, умножения. Операторы $(\ )^n$, $\sqrt[n]{\ }$ — нелинейны.

Единичный оператор. Оператор называется единичным, если он оставляет произвольную функцию $u(x)$ неизменной:

$$\hat{L}u = u = \hat{1}\,u = \hat{E}u.$$

Сложение операторов. Суммой операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется такой оператор, результат действия которого равен сумме результатов действия слагаемых, т. е.

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}, \text{ если } \hat{C}u = \hat{A}u + \hat{B}u.$$

Умножение операторов. Оператор $\hat{C}$ будет называться произведением операторов $\hat{A}$ на $\hat{B}$ слева: $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, если $\hat{C}u = \hat{A}\,(\hat{B}u)$. Произведение операторов зависит от порядка сомножителей $\hat{C}' = \hat{B}\hat{A}$.

Если $\hat{C}' = \hat{C}$, то операторы называются коммутирующими, или перестановочными.

Для коммутирующих: $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ или $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$. Если $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, т. е. $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$, то операторы называются некоммутирующими.

Примеры. Рассмотрим операторы координаты $\hat{x}$ и $\frac{\hat{d}}{dx}$.

Тогда

$$\hat{x}\,\frac{\hat{d}}{dx} \neq \frac{\hat{d}}{dx}\,\hat{x}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{\hat{d}}{dx}\hat{x}\right)u = \frac{\hat{d}}{dx}(\hat{x}u) = \frac{\hat{d}}{dx}(xu) = \frac{dx}{dx}u + x\frac{du}{dx} =$$

$$= u + x\frac{du}{dx} = \hat{1}u + \hat{x}\,\frac{\hat{d}}{dx}\,u.$$

Отсюда

$$\frac{\hat{d}}{dx}\,\hat{x} - \hat{x}\,\frac{\hat{d}}{dx} = \hat{1}.$$

Но

$$\hat{x}\,\frac{\hat{d}}{dy} = \frac{\hat{d}}{dy}\,\hat{x},$$

Оператор обратный к данному. Это такой оператор, который из функции $v = \hat{L}u$ получает функцию u, т. е. оператор $\hat{L}^{-1}$ будет называться обратным к оператору $\hat{L}$, если

$$v = \hat{L}u, \text{ а } \hat{L}^{-1}\; v = u.$$

Тогда очевидно, что

$$\hat{L}^{-1}\hat{L} = \hat{L}\hat{L}^{-1} = \hat{1}.$$

Оператор комплексно-сопряженный к данному. Такой оператор $\hat{L}^*$ — получается из данного $\hat{L}$ заменой всех знаков перед мнимой единицей.

Возведение операторов в степень.

$$\hat{L}^n = \underbrace{\hat{L}\hat{L}\ldots\hat{L}}_{n}.$$

В таком случае от оператора $\hat{L}$ можно определить произвольную функцию, обоснованием чему является возможность разложить данную функцию в ряд Тейлора с заменой переменной на степень оператора; например:

$$e^{\hat{L}} = \left\{1 + \hat{L} + \frac{1}{2}\hat{L}^2 + \ldots\right\}.$$

Собственные функции и собственные значения операторов. Функции, которые при действии на них оператора $\hat{L}$ переходят сами в себя с умножением на постоянную величину, носят название собственных функций данного оператора, т. е. если $\hat{L}u = Lu$, то u — собственная функция данного оператора; а L — называется собственным значением оператора. Собственным функциям u_1, u_2, u_3, ... будут соответствовать собственные значения L_1, L_2, L_3 ... . Набор собственных значений L_i оператора $\hat{L}$ называется его спектром.

Понятие самосопряженного, или эрмитова, оператора. Оператор называется самосопряженным, или эрмитовым, если он удовлетворяет условию:

$$\int v^*\,\hat{L}\,u dx = \int u\hat{L}^* v^* dx$$

(операция самосопряжения сводится к перестановке местами функции u и v^* и замены $\hat{L}$ на $\hat{L}^*$).

Пример.

$$\hat{L} = i\frac{d}{dx}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^*\hat{L}u dx = \int_{-\infty}^{\infty} v^* i\frac{d}{dx}u dx = iv^*u\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\int_{-}^{\infty} u\frac{dv^*}{dx}dx = + \int_{-\infty}^{\infty} u\hat{L}^*v^* dx.$$

Следовательно, $\hat{L} = i\frac{d}{dx}$ — эрмитов оператор, а $\hat{L} = \frac{d}{dx}$ — не эрмитов.

Произведение двух эрмитовых операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$. Его можно представить в виде:

$$\hat{L}\hat{M} = \frac{1}{2}(\hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L}) + \frac{1}{2}(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}),$$

где первая полусумма является эрмитовым, а вторая — антиэрмитовым оператором.

Антиэрмитов оператор удовлетворяет соотношению:

$$\int v^* \hat{L} u dx = -\int u \hat{L}^* v^* dx.$$

Следовательно, любой эрмитов оператор может быть превращен в антиэрмитов умножением на мнимую единицу.

Вещественность собственных значений эрмитова оператора. Собственные значения самосопряженного оператора вещественны, что доказывается следующим образом:

$$\hat{L}\psi_m = L_m \psi_m; \quad \hat{L}^* \psi_m^* = L_m^* \psi_m^*;$$

$$L_m = \int \psi_m^* \hat{L} \psi_m \, dx = \int \psi_m \hat{L}^* \psi_m^* \, dx = L_m^*.$$

При этом использовано условие эрмитовости и нормировки функций.

Ортогональность собственных функций операторов. Функции $v(x)$ и $u(x)$ называются ортогональными, если

$$\int v^*(x) u(x) \, dx = \int u^*(x) v(x) \, dx = 0.$$

Теорема. Собственные функции оператора ортогональны.

Доказательство. (Дискретный спектр):

$$\hat{L} \psi_m = L_m \psi_m,$$

$$\hat{L}^* \psi_n^* = L_n^* \psi_n^* = L_n \psi_n^*.$$

Умножим эти равенства слева на ψ_n^* и ψ_m соответственно, проинтегрируем и вычтем одно из другого; тогда левая часть дает нуль:

$$\int \psi_n^* \hat{L}\psi_m \, dx - \int \psi_m \hat{L}^* \psi_n^* dx = \int \psi_m \hat{L}^* \psi_n^* \, dx - \int \psi_m \hat{L}^* \psi_n^* \, dx = 0.$$

Следовательно,

$$(L_m - L_n) \int \psi_n^* \psi_m \, dx = 0.$$

Если

$$L_m \neq L_n, \quad \text{то} \quad \int \psi_n^* \psi_m \, dx = 0.$$

Условие ортонормировки. Каждая собственная функция должна быть нормирована к единице:

$$\int \psi_m^* \psi_m \, dx = 1.$$

Объединяя условие нормировки и свойство ортогональности, кратко записывают:

$$\int \psi_m^* \psi_n \, dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ при } m = n; \\ 0 \text{ при } m \neq n. \end{cases}$$

Полнота собственных функций оператора. Собственные функции образуют полную систему в том смысле, что любую функцию того же класса можно разложить по ним, т. е. представить в виде их линейной комбинации:

$$u(x) = \sum_m C_m \psi_m(x).$$

Коэффициенты разложения C_n определяются условием:

$$\int \psi_n^*(x)\, u(x)\, dx = \int \psi_n^* \sum C_m \psi_m\, dx = \sum_m C_m \delta_{mn} = C_n.$$

Ортонормировка собственных функций для непрерывного спектра. Если собственные значения изменяются непрерывно, то собственные функции зависят параметрически от собственных значений, так что их записывают в виде $\psi(x, L)$, или $\psi_L(x)$

$$\hat{L}\psi_L(x) = L\psi_L(x).$$

В этом случае собственные функции нормируются к так называемой δ-функции:

$$\int \psi_{L'}^*(x)\, \psi_L(x)\, dx = \delta(L' - L) = \begin{cases} \infty & \text{при } L' = L; \\ 0 & \text{при } L' \neq L. \end{cases}$$

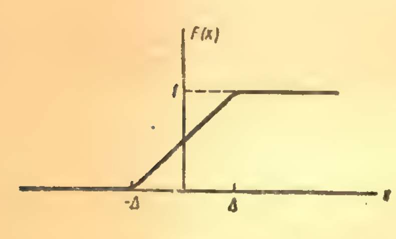


Рис. 245

Свойства δ-функции:

а) $\delta(x)$ можно определить как предел производной от $F(x)$, имеющей вид (рис. 245):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\Delta; \\ 1 & \text{при } x > \Delta; \\ 0{,}5 + \frac{1}{2\Delta} x & \text{при } |x| < \Delta. \end{cases}$$

Тогда $\delta(x) = \lim\limits_{\Delta \to 0} F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0; \\ \infty & \text{при } x = 0; \end{cases}$

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1;$

в) $\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq a; \\ \infty & \text{при } x = a; \end{cases}$

г) $\int\limits_c^d f(x)\, \delta(x - a)\, dx = \begin{cases} f(a), & \text{если } c < a < d; \\ 0, & \text{если } a < c \text{ или } a > d. \end{cases}$

Разложение по собственным функциям непрерывного спектра. Произвольную функцию $\psi(x)$ можно представить в виде:

$$\psi(x) = \int c(L)\, \psi_L(x)\, dL,$$

где

$$c(L) = \int \psi_L^*(x) \psi(x)\, dx,$$

что вытекает из условия ортонормировки.

§ 4. Постулаты квантовой механики

1. Если квантовая система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями ψ_1 и ψ_2, то она может находиться и в состоянии $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$, где a и b произвольные числа (принцип суперпозиции (наложения) состояний),

2. Каждой механической величине L в квантовой механике сопоставляется линейный самосопряженный оператор $\hat{L}$, действующий на волновую функцию ψ:

$$L \to \hat{L}.$$

При этом между операторами должны быть такие же соотношения, как и между соответствующими классическими величинами.

3. Среднее значение любой динамической (физической) величины в состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x)$, определяется соотношением

$$<L> = \int \psi^* (x, y, z, t) \hat{L} \psi (x, y, z, t) dv = \int \psi \hat{L}^* \psi^* dv.$$

4. Динамическая переменная (физическая величина) может иметь только такие значения, которые содержатся в спектре собственных значений ее оператора.

5. Значение волновой функции в момент времени $t + dt$ определяется через значение волновой функции в данный момент времени t уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} (x, y, z, t) = \hat{H} \psi (x, y, z, t),$$

где $\hat{H}$ — оператор Гамильтона.

Замечания к постулатам квантовой механики. Принцип суперпозиции, так же как и остальные постулаты, не может быть непосредственно проверен хотя бы потому, что волновая функция не может быть экспериментально измерена. Измерить можно лишь квадрат ее модуля $\psi\psi^*$.

Соображения, определяющие его введение: волновая функция в квантовой механике играет ту же роль для описания состояния частицы, как и временное уравнение траектории в классической механике, где существует принцип суперпозиции перемещений, движения. Принцип суперпозиции отражает факт независимости одного состояния от другого (ср. принцип суперпозиции сил, световых пучков и т. д.). Этот принцип позволяет разложить любое состояние по собственным функциям любого оператора. Для получения какой-либо физической величины по волновой функции над ней необходимо проделать те или иные операции, рецепт которых символически записывается в виде ее оператора. При этом основную ценность имеет не столько сам оператор, сколько некоторые результаты его действия на волновую функцию, в первую очередь его собственные значения. Для того, чтобы найти квантово-механические операторы, необходимо исходить из классической механики. Это и дает возможность найти все операторы, установив каким-либо образом вид одного-двух операторов. Линейность операторов следует из принципа суперпозиции; эрмитовость — из вещественности физических величин.

Третий постулат является обобщением выражения для среднего значения координаты $< x > = \int \psi^* x \psi dx$. Однако это выражение можно было бы записать и в таком виде:

$$< x > = \int \psi^* \psi x \, dx = \int x \psi^* \psi \, dx.$$

Очевидно, что для произвольного оператора подобная цепь равенств не может иметь место и, следовательно, необходимо выбрать выражение для среднего из комбинаций:

$$\int \psi^* \hat{L} \psi \, dx; \quad \int \hat{L} \psi^* \psi \, dx; \quad \int \psi^* \psi \hat{L} \, dx.$$

Последнее соотношение можно отбросить сразу — оператор должен действовать на волновую функцию, стоящую от него справа. Выбор между пер-

вой и второй диктуется следующим соображением: если мы имеем состояние, описываемое собственной функцией ψ_m, то $<L> = L_m$. Но это можно получить для произвольного оператора только из первого выражения:

$$<L> = \int \psi_m^* \hat{L} \psi_m \, dx = L_m \int \psi_m^* \psi_m \, dx = L_m,$$

тогда как второе выражение в общем случае этого не дает. Третий постулат также используется для установления вида операторов.

Четвертый постулат устанавливает связь между результатами измерений и вычислений, подчеркивая их идентичность.

Некоторым логическим обоснованием для пятого постулата является случай свободного движения частицы — случай плоской волны де Бройля. Для произвольного поля U уравнение Шредингера не может быть «выведено» с помощью каких-либо математических равенств, так же, как и все другие основные законы физики (сравните с законами Ньютона, они ниоткуда не «выводятся»).

Пятый постулат отводит оператору Гамильтона — гамильтониану (подобно тому, как функции Гамильтона в классической механике), особую роль.

Общий метод вычисления вероятностей результатов измерения. Пусть мы имеем некоторое состояние $\psi(x)$ и хотим измерять L. Что мы получим? Квантовая механика утверждает, что будут получаться различные значения L с различной вероятностью.

Если $\psi(x) = \sum_n C_n \psi_n(x)$, или $\psi^*(x) = \sum_m C_m^* \psi_m^*(x)$,

то можно выразить среднее значение через коэффициенты C_n:

$$<L> = \int \psi^* \hat{L} \psi \, dx.$$

Подставив сюда разложения для ψ и ψ^* и учитывая условия ортонормировки, получим:

$$<L> = \sum_n C_n^* C_n L_n = \sum |C_n|^2 L_n = \sum w(L_n) L_n,$$

т. е. $w(L_n) = C_n^* C_n = |C_n|^2$ есть вероятность того, что в процессе измерения величины L в данном состоянии ψ мы обнаружим $L = L_n$ [если $\sum |C_n|^2 = 1$].

Коммутация операторов и измерение. Если имеется некоторое состояние ψ, то две (или более) физические величины могут быть одновременно измерены, если их операторы коммутируют. Измеримость величины L и M в состоянии ψ означает, что ψ является собственной функцией как $\hat{L}$, так и $\hat{M}$:

$$\hat{L}\psi = L\psi; \quad \hat{M}\psi = M\psi.$$

Но тогда

$$(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L})\psi = \hat{M}(\hat{L}\psi) - \hat{L}(\hat{M}\psi) = 0.$$

Соотношение неопределенностей. Если два оператора не коммутируют, то соответствующие физические величины не могут быть измерены одновременно (и тем самым, они не имеют одновременно точных значений). Это вытекает из того, что если ψ не является собственным состоянием $\hat{L}$, то при измерении L происходит разложение ψ по собственным состояниям $\hat{L}$, но в таком случае результат измерения меняет состояние, вследствие чего измерить $\hat{M}$ оказывается невозможным, и наоборот.

Между результатами измерений (и значений) двух величин с некоммутирующими операторами существует определенная связь. Если $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hat{C}$, то среднеквадратичные отклонения этих величин связаны между собой:

$$< \Delta A^2 > \cdot < \Delta B^2 > = \frac{< C >^2}{4},$$

где, например,

$$< \Delta A^2 > = \int \psi^* (\hat{A} - < A >)^2 \psi \, dx,$$

$$\text{а} \quad < \hat{A} > \equiv < A > = \int \psi^* \hat{A} \psi \, dx.$$

Изменение механической величины во времени. Изменение механической величины во времени должно описываться некоторым оператором, вид которого можно установить, исходя из определения среднего значения величины:

$$< L > = \int \psi^* \hat{L} \psi \, dx.$$

Естественно определить

$$\frac{d < L >}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{< L(t + \Delta t) > - < L(t) >}{\Delta t}.$$

Но

$$\frac{d}{dt} < L > = \int \psi^* \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} \psi dx + \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{L} \psi \, dx + \int \psi^* \hat{L} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx =$$

$$= \int \psi^* \left\{ \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} (\hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L}) \right\} \psi dx,$$

если учесть пятый постулат.

Таким образом, производная от среднего по времени равна среднему от некоторого оператора

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} (\hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L}),$$

который естественно назвать оператором производной по времени:

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} (\hat{L}\hat{H} - \hat{H}L).$$

Тогда можно сказать, что производная по времени от среднего значения равна среднему значению от производной

$$\frac{d}{dt} < L > = < \frac{dL}{dt} > = \int \psi^* \frac{d\hat{L}}{dt} \psi \, dx.$$

Величина $\frac{1}{i\hbar}(\hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L}) = [\hat{H}, \hat{L}]$ называется квантовой скобкой Пуассона, по аналогии с классической скобкой Пуассона.

Интегралы движения. Если оператор $\hat{L}$ явно не зависит от времени и коммутирует с гамильтонианом, то величина L сохраняется во времени, т. е. является интегралом движения.

В квантовой механике имеются те же интегралы движения, что и в классической физике:

а) полная энергия E, если $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$;

б) импульс для свободного движения,
в) момент импульса в полях с центром симметрии.

Оператор координаты. Оператор $\hat{x}$ должен быть определен как операция умножения на x: $\hat{x}\psi = x\psi$, или $\hat{x} \equiv x$. В общем случае $\hat{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}, t)$, или $\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}$. Собственная функция оператора x, соответствующая собственному значению a, удовлетворяет равенству:

$$\hat{x}\psi_a(x) = x\psi_a(x) = a\psi_a(x).$$

Так как x — переменная величина, a — произвольная фиксированная величина, то равенство сохранится только в том случае, если при $x \neq a$, $\psi_a(x) = 0$, т. е. $\psi_a(x) = \delta(x - a)$.

Соответственно для $\mathbf{r}$

$$\psi_{\mathbf{r}_0}(r) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0).$$

Классические скобки Пуассона. Оператор импульса является одним из важнейших квантово-механических операторов. Вид его устанавливается на основании второго постулата.

Полная производная по времени некоторой функции $F(q, p, t)$, зависящей от координат q, импульсов p и времени t, в классической физике имеет вид:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right).$$

Используя канонические уравнения (уравнения Гамильтона),

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где $H = H(p, q)$ — функция Гамильтона (полная энергия), выраженная через импульс и координаты, можно записать:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial t} + (H, F);$$

через (H, F) обозначена сумма, называемая классической скобкой Пуассона.

Скобку Пуассона можно определить для любой пары функций $u(q, p)$; $v(q, p)$, зависящих от координат и импульсов, соотношением:

$$(u, v) = \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial u}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}\right).$$

Она называется также перестановочным соотношением для u и v. Тогда

$$(p_j, q_k) = \sum_i \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial q_k}{\partial p_i}\right) = \delta_{jk},$$

$$(q_j, q_k) = \sum_i \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_k}{\partial p_i}\right) = 0,$$

$$(p_j, p_k) = 0.$$

Оператор импульса $\hat{p}$. Потребуем, чтобы для операторов $\hat{p}$ и $\hat{r}$ были аналогичные перестановочные соотношения.

Тогда

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{1}{\hat{h} i}(\hat{x}\,\hat{p}_x - \hat{p}_x\,\hat{x}) = 1,$$

или

$$x\frac{\hat{p}_x}{i\hat{h}} - \frac{\hat{p}_x}{i\hat{h}}\,x = 1,$$

но

$$1 = \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = x\left(-\frac{d}{dx}\right) - \left(-\frac{d}{dx}\right)x.$$

Сравнивая эти соотношения, мы приходим к выводу:

$$\frac{\hat{p}_x}{i\hat{h}} = -\frac{d}{dx}, \quad \text{или} \quad \hat{p}_x = -i\hat{h}\frac{d}{dx}.$$

В общем случае

$$\hat{p} = -i\hat{h}\,\nabla; \quad \hat{p}_x = -i\hat{h}\frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{p}_y = -i\hat{h}\frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat{p}_z = -i\hat{h}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Соотношения:

$$\hat{x}\,\hat{p}_x - \hat{p}_x\,\hat{x} = i\hat{h},$$
$$y\hat{p}_y - \hat{p}_y\,\hat{y} = i\hat{h},$$
$$z\hat{p}_z - \hat{p}_z\,z = i\hat{h}$$

были впервые установлены Гейзенбергом и называются перестановочными соотношениями Гейзенберга.

Собственные функции найдутся из уравнения для них:

$$\hat{p}_x\,\psi_{p_x}(x) = -i\hat{h}\frac{d}{dx}\psi_{p_x}(x) = p_x\,\psi_{p_x}(x).$$

Откуда $\psi_{p_x}(x) = Ae^{\frac{ip_x x}{h}}$ — плоская волна. Нормированные функции для трехмерного случая имеют вид:

$$\psi_p(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi\hat{h})^{3/2}}\,e^{\frac{i}{\hat{h}}(\mathbf{pr})}.$$

Оператор кинетической энергии:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hat{h}^2}{2m}\Delta.$$

Его собственные функции совпадают с собственными функциями оператора импульса (они коммутируют):

$$\psi_T(x) = \psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{3/2}}\,e^{\frac{i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)}$$

собственные значения $T = \frac{p^2}{2m}$.

Оператор потенциальной энергии $\hat{U} \equiv U(\mathbf{r})$ — есть операция умножения на функцию $U(\mathbf{r})$.

Собственная функция — δ - функция.

Гамильтониан. Оператор Гамильтона определяется как сумма операторов кинетической $\hat{T}$ и потенциальной U энергий, выраженных через импульс и координаты:

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{\mathbf{r}}) = \hat{T} + \hat{U}(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x, y, z).$$

Функция сохраняет свою роль и в том случае, если

$$U = U(x, y, z, t).$$

Несмотря на то, что гамильтониан определяется как сумма операторов кинетической и потенциальной энергии, его необходимо рассматривать как один оператор, так как $\hat{T}$ и $\hat{U}$ не коммутируют и, следовательно, не имеют одновременно точных значений. Собственное значение гамильтониана нельзя рассматривать как сумму собственных значений $\hat{T}$ и $\hat{U}$. Собственные значения $\hat{H}$ обозначаются обычно через E. Уравнение для них.

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

Оператор скорости. Так как $\hat{\mathbf{r}}$ явно от времени не зависит, то оператор скорости

$$\hat{\mathbf{v}} = [\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}]; \text{ но } [\hat{H}, \hat{r}] = \frac{\hat{p}}{m} = -\frac{i\hbar}{m}\nabla.$$

Следовательно,

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\hat{p}}{m}.$$

Связь между $\mathbf{j}$ и $\hat{\mathbf{v}}$:

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}(\psi^* \hat{\mathbf{v}}\psi - \psi\hat{\mathbf{v}}\psi^*) = \frac{1}{2m}(\psi^* \hat{p}\psi - \psi\hat{p}\psi^*).$$

Оператор силы

$$\frac{d\hat{p}_x}{dt} = [\hat{H}, \hat{p}_x] = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \hat{F}_x; \quad F = -\nabla U.$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для координат импульса. Так как $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$, то

$$< \Delta x^2 > \cdot < \Delta p_x^2 > \geqslant \frac{\hbar^2}{4}.$$

Это означает, что частица не имеет одновременно точных значений координаты и импульса, и тем самым не имеет траектории.

§ 5. Теория представлений

Так как волновую функцию непосредственно измерить нельзя, а измеряются механические величины, то их определенный набор может характеризовать состояние столь же хорошо, как и волновая функция. В силу соотношения неопределенностей, квантовомеханический набор в два раза беднее классического набора.

Если в качестве величины, определяющей состояние частицы, взята величина L (например p), то в таком случае говорят, что волновая функция и операторы взяты в L-представлении.

Волновая функция в L-представлении. Пусть волновая функция $\psi(x, y, z)$ задана в координатном или x ($x \equiv x, y, z$)-представлении. Кроме того, известен оператор $\hat{L} = \hat{L}(-i\hbar\nabla, \hat{\mathbf{r}})$ в x-представлении и его собственные функции $\psi(x, L)$.

Тогда

$$\psi(x) = \int C(L)\,\psi(x, L)\,dL,$$

где

$$C(L) = \int \psi^*(x, L)\,\psi(x)\,dx$$

взаимно однозначным образом связано с $\psi(x)$; одно определяет другое, поэтому величину $C(L)$ можно считать волновой функцией в L-представлении

Величина $C(L)$ есть амплитуда вероятности того, что величина L лежит в единичном интервале вокруг $L: w(L)\,dL = |C(L)|^2\,dL$ совершенно аналогично смыслу $\psi(x, y, z)$ в x-представлении.

Собственная функция $\psi(x, L)$ в L-представлении есть δ-функция: так как

$$\psi(x, L) = \int C(L, L')\,\psi(x, L')\,dL',$$

то

$$C(L, L') = \int \psi^*(x, L')\,\psi(x, L)\,dx = \delta(L - L').$$

Следовательно, оператор $\hat{L}$ в его собственном представлении есть умножение на L:

$$\hat{L}(L) \equiv L,$$

или

$$\hat{L}\,C(L) = LC(L).$$

Чтобы применять аппарат квантовой механики, нужно уметь любой оператор $\hat{M}$ перевести в L-представление.

Пример. В импульсном представлении:

$$\hat{p} \equiv p; \quad \psi_{p'}(p) = \delta(p - p');$$

но

$$\hat{x}(p) = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}; \quad \psi_x(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}e^{-\frac{ip_x x}{\hbar}} = (\psi_p^*(x)).$$

Таким образом, для перехода от x-представления к L-представлению необходимо знать:

а) вид $\hat{L}(x)$;

б) его собственные функции $\psi_L(x)$;

в) для нахождения вида $\hat{M}$ в L-представлении нужно знать $\psi_M(x)$ и $\hat{M}(x)$. Преобразуя $\psi_M(x)$ в $\psi_M(L)$ и используя условия $\hat{M}(L)\,\psi_M(L) = M\psi_M(L)$, можно найти $\hat{M}(L)$. В случае непрерывного спектра оператора $\hat{L}$ $\hat{M}(L)$ будет иметь вид «матрицы»:

$$\hat{M}(L', L) = \int \psi^*(x, L')\,\hat{M}(x)\,\psi(x, L)\,dx.$$

Волновая функция в E-представлении. Энергетическое, или E-представление, наиболее употребительно. Пусть $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ — собственные функции, а $E_1, E_2, F_3, \ldots$ собственные значения оператора Гамильтона. Тогда произвольная функция $\psi(x)$ может быть представлена в виде:

$$\psi(x) = \sum_n C_n\,\psi_n(x).$$

Набор коэффициентов $C_n = \int \psi_n^*(x)\,\psi(x)\,dx$ полностью определяет волновую функцию $\psi(x)$, поэтому $\{C_n\}$ есть волновая функция в E-представлении.

Вид оператора в E-представлении. Пусть

$$\varphi(x) = \hat{L}(x)\,\psi(x).$$

Тогда

$$\psi(x) = \sum_m a_m\,\psi_m(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \sum_n b_n\,\psi_n(x);$$

$$\sum_n b_n\,\psi_n(x) = \sum a_m\,\hat{L}\,\psi_m.$$

Умножая слева на $\psi_k^*(x)$ и интегрируя, получим

$$b_k = \sum_m L_{km}\,a_m, \quad \text{где} \quad L_{km} = \int \psi_k^*(x)\,\hat{L}\,\psi_m(x)\,dx.$$

Величины L_{km} образуют таблицу-матрицу, первый индекс обозначает номер строчки, второй — столбца:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \hat{L}(E),$$

так как $\{b_n\}$ есть $\varphi(E)$, а $\{a_m\} = \psi(E)$.

Матрицы. Действие с ними: 1. *Сложение матриц.* Пусть имеем две матрицы $\{a_{mn}\}$ и $\{b_{mn}\}$, они соответствуют операторам $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Тогда, если $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}$, то

$$c_{mn} = \int \psi_m^*\,\hat{C}\,\psi_n\,dx = \int \psi_m^*(\hat{A} + \hat{B})\,\psi_n\,dx = a_{mn} + b_{mn},$$

где

$$a_{mn} = \int \psi_m^*\,\hat{A}\,\psi_n\,dx; \quad b_{mn} = \int \psi_m^*\,\hat{B}\,\psi_n\,dx.$$

2. *Умножение матриц.* Матрица $\{c_{mn}\}$ будет равна произведению матриц $\{a_{mn}\}\cdot\{b_{mn}\}$, если матричный элемент $c_{mn} = \sum_l a_{ml}\,b_{ln}$, т. е. элемент m-строки и n-столбца получается путем сложения произведений каждого элемента m-строки $\hat{A}$ на каждый элемент n-столбца $\hat{B}$ (правило «строка на столбец»).

3. *Матрица оператора в его собственном представлении.* Так как $\hat{H}\,\psi_n = E_n\,\psi_n$, то

$$H_{mn} = \int \psi_m^*\,\hat{H}\,\psi_n\,dx = \int \psi_m\,E_n\,\psi_n\,dx = E_n\,\delta_{mn}.$$

Такая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & H_{22} & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & H_{33} & 0\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & E_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и называется диагональной. Если оператор коммутирует с $\hat{H}$, то он имеет также диагональную матрицу.

4. *Транспонированная матрица.* Матрица $\tilde{A}$ называется транспонированной по отношению к A, если она получается поворотом A вокруг диагонали, в результате чего строки становятся столбцами, а столбцы — строками, т. е.

$$\tilde{A} = \{\tilde{a}_{mn}\} = \{a_{nm}\}.$$

5. *Комплексносопряженная матрица.* $A^* = \{a^*_{mn}\}$ — если все ее члены получены из $\{a_{mn}\}$ заменой на комплексносопряженные $a_{mn} \to a^*_{mn}$.

6. *Самосопряженная матрица.* Матрица A называется самосопряженной, если комплексносопряженная для транспонированной совпадает с исходной:

$$A^+ = (\tilde{A})^* = A,$$

т. е.

$$a^*_{nm} = a_{mn}.$$

Самосопряженная матрица соответствует эрмитову оператору. Действительно,

$$a_{mn} = \int \psi^*_m \hat{A}\, \psi_n\, dx = \int \psi_n\, \hat{A}^*\, \psi^*_m\, dx = \left(\int \psi^*_n\, \hat{A}\, \psi_m\, dx\right)^* = a^*_{nm}$$

7. *Волновая функция в виде матрицы.* Представим ψ в виде матрицы:

$$\psi(E) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Тогда определим

$$\psi^*(E) = (C^*_1\, C^*_2\, C^*_3 \ldots) = \begin{pmatrix} C^*_1 & C^*_2 & C^*_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. *Выражение для среднего.* Пусть

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ . & . & . \; . \end{pmatrix},$$

тогда

$$< L > = \int \psi^*(x)\, \hat{L}(x)\, \psi(x)\, dx,$$

разложив ψ и ψ^*, получим:

$$< L > = \sum_m \sum_n C^*_m L_{mn} C_n.$$

Если учесть правила произведения матриц, то полученный результат можно записать в виде:

$$< L > = \psi^* \hat{L} \psi.$$

Уравнение Шредингера в матричной форме. Так как

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad \text{а} \quad \psi(x, t) = \sum_n C_n(t)\, \psi_n(x),$$

то

$$i\hbar \frac{dC_m(t)}{dt} = \sum_n H_{mn} C_n; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Если взять в качестве ψ_n собственные функции оператора $\hat{H}$, то $H_{mn} = E_n \delta_{mn}$, и тогда

$$i\hbar \frac{dC_m}{dt} = E_m C_m; \qquad C_m(t) = C_m(0) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}}.$$

Уравнения движения в матричной форме:

$$< L > = \sum_{m, n} C_m^* L_{mn} C_n, \quad \left(\frac{d\hat{L}}{dt}\right)_{mn} = \frac{\partial \hat{L}_{mn}}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{L}]_{mn}.$$

Пусть

$$H_{mn} = E_n \delta_{mn} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L_{mn}}{\partial t} = 0,$$

тогда

$$[\hat{H}, \hat{L}]_{mn} = \frac{1}{i\hbar} [(\hat{L}\hat{H})_{mn} - (\hat{H}\hat{L})_{mn}] = \frac{1}{i\hbar} \sum_k (L_{mk} E_k \delta_{kn} - E_m \delta_{mk} L_{kn}) =$$

$$= \frac{1}{i\hbar} (L_{mn} E_n - L_{mn} E_m) = \frac{E_n - E_m}{i\hbar} L_{mn} = i\omega_{mn} L_{mn}.$$

Например,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{mn} = i\omega_{mn} x_{mn}.$$

§ 6. Стационарные состояния

Состояния, для которых гамильтониан не зависит явно от времени, называются стационарными. В этом случае уравнение Шредингера упрощается, так как пространственные и временные переменные разделяются

Если положить $\psi(x, t) = \psi(x) f(t)$, то подставляя в уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}(x) \psi(x, t),$$

получим

$$\frac{i\hbar}{f} \frac{df}{dt} = \frac{H(x)\psi(x)}{\psi_x}.$$

Так как левая часть зависит только от времени и правая только от координат, то равенства при любых t и x возможны только при условии, что каждое выражение есть постоянная. Обозначим ее через E. Тогда

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x); \quad \frac{df}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} f(t)$$

Но первое уравнение есть уравнение на собственные функции и значения энергии E, а второе—решается сразу:

$$f(t) = Ce^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Общее решение

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

Если $E = E_n$ — собственное значение энергии, а $\psi_n(x)$ соответствующая собственная функция, то

$$\psi(x, t) = \sum_n C_n \psi_n(x) e^{\frac{iE_n t}{\hbar}}.$$

Но $w_n(x, t) = \psi_n \psi_n^*$ — не зависит от времени.

Поскольку при вычислении любой механической величины необходимо построить комбинацию, в которую будут входить как ψ, так и ψ^*, то мы приходим к выводу: в стационарных состояниях вероятности любого значения любой механической величины не зависят от времени.

В большинстве случаев задачи сводятся к нахождению именно стационарных состояний. Уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид:

$$\Delta\psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x, y, z)]\psi(x, y, z) = 0,$$

или

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

§ 7. Квантово-механическое решение некоторых задач

Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме. На рис. 246, *а* задано распределение потенциальной энергии:

$$U = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0; \\ 0 & \text{при } 0 < x < a; \\ \infty & \text{при } x > a. \end{cases}$$

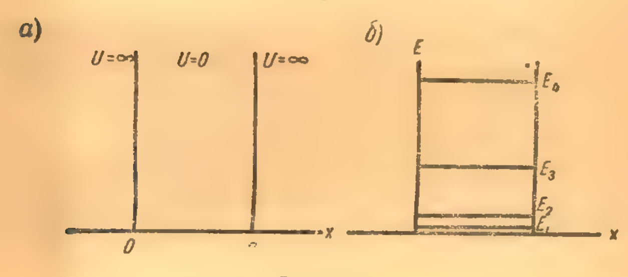


Рис. 246

1. *Классическое рассмотрение.* Частица может быть только внутри ямы, с вероятностью, не зависящей от x, с произвольным значением энергии:

$$E = T = \frac{p^2}{2m}.$$

2. *Квантовомеханическое рассмотрение.* Уравнение Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(x) = 0.$$

В области $U=\infty$ $\psi(x)\equiv 0$.

Внутри ямы уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\varkappa^2\psi(x)=0, \quad \text{где} \quad \varkappa^2=\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Решение

$$\psi(x)=A\sin\varkappa x+B\cos\varkappa x.$$

Условие непрерывности $\psi(0)=0$ дает $B=0$, а $\psi(a)=0$ дает $\varkappa a=\pm n\pi$, где n — целое число. Отсюда

$$E=\frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}n^2=E_n,$$

т. е. энергия квантована! (см. рис. 249, *б*).

Собственные функции имеют вид:

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Найдем длины волн де Бройля, соответствующие данным состояниям:

$$\lambda=\frac{2\pi}{\varkappa}=\frac{2a}{n}$$

условие аналогичное условию для стоячих волн в оптике и колебаниях струны.

Потенциальный барьер конечной высоты. Пусть

$$U=\begin{cases}0 & \text{при } x<0 \text{ (I область);}\\ U & \text{при } x>0 \text{ (II область).}\end{cases}$$

1. *Классическое описание*. Если $E>U$, частица будет двигаться свободно как слева направо, так и справа налево. Если $E<U$, то переход из I области во вторую невозможен — будет наблюдаться полное отражение.

2. *Квантовомеханическое описание*. Уравнение Шредингера: для I области:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k_1^2\psi_1=0; \quad k_1^2=\frac{2mE}{\hbar^2};$$

для II области

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+k_2^2\psi_2=0; \quad k_2^2=\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Решение уравнений:

$$\psi_1=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x};$$
$$\psi_2=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}.$$

Если частица движется слева, то $D=0$, так как e^{-ik_2x} соответствует волне, идущей справа налево. Условие непрерывности ψ, ψ' в точке $x=0$ позволяет найти связь между коэффициентами, тогда

$$\psi_1=A\left(e^{ik_1x}+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{-ik_1x}\right); \qquad \psi_2=A\frac{2k_1}{k_1+k_2}e^{ik_2x}.$$

Вектор плотности тока $j_1=\frac{\hbar k_1}{m}A^*A-\frac{\hbar k_1}{m}B^*B=j_0-j_r$.

Коэффициент отражения

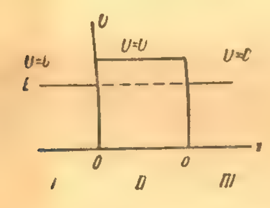
$$R = \frac{I_r}{I_0} = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{E - U}{E}}}{1 + \sqrt{\frac{E - U}{E}}} \right|^2$$

Коэффициент прохождения

$$D = \frac{I_d}{I_0} = \frac{C^* C k^2}{A^* A} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)} .$$

Сумма $R + D = 1$ — сумма интенсивностей отраженного и прошедшего потоков равна интенсивности падающего. Если $E < U$, то $R = 1$; D — мнимая величина, но и $k_2 = i\varkappa$ — мнимая величина. Следовательно,

$$w_2(x) = \psi_2^* \psi_2 = w(0)\, e^{-\frac{4m}{\hbar}\sqrt{\frac{U-E}{E}}\, x}$$



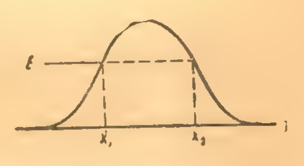


Рис. 247

вероятность найти частицу справа от $x = 0$ отлична от нуля, но она экспоненциально падает. Она падает тем быстрее, чем больше $U - E$ и чем больше масса частицы.

Прохождение частицы через потенциальный барьер конечной ширины. Пусть U имеет вид, представленный на рис. 247. Тогда, записав уравнение для I, II и III области, можно найти решения в виде плоских волн. Из условия непрерывности находятся соотношения между коэффициентами. Анализ показывает, что:

а) при $E > U$ будет наблюдаться отражение (в классической физике частица проходит свободно);

б) при $E < U$ существует вероятность пройти частице сквозь барьер. Коэффициент прозрачности барьера определяется величиной

$$D = \frac{I_d}{I_0} = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + \varkappa^2} e^{-2\varkappa a} \approx D_0\, e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\, a} \qquad (D_0 \approx 1).$$

Если барьер имеет произвольную форму, то прозрачность барьера определяется соотношением:

$$D \approx D_0\, e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m\,[U(x) - E]}\, dx}.$$

Переход из I области в III происходит через II, где полная энергия E меньше потенциальной, что с точки зрения классической физики невозможно, ибо это означает, что кинетическая энергия отрицательна и скорость мнимая. Но вместе с тем частица и не «поднимается» над потенциальным барьером,

ибо это противоречит закону сохранения энергии. Частица проходит сквозь барьер «туннельным» переходом («туннельный эффект»).

Туннельный эффект играет большую роль в таких явлениях, как α-распад, движение электронов в кристаллах, автоэлектронная (холодная) эмиссия, туннельные диоды.

Гармонический осциллятор. В классической механике для частицы, на которую действует упругая сила $F = -kx$, пропорциональная смещению и направленная к положению равновесия функция Гамильтона имеет вид:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2.$$

Целый ряд реальных процессов может быть приближенно сведен к гармоническому осциллятору, например, колебания атомов в кристалле относительно положения равновесия.

Оператор Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2;$$

уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi = E\psi.$$

Это уравнение сводится к известному в математике уравнению Чебышева—Эрмита путем подстановки:

$$\psi\left(\frac{x}{x_0}\right) = e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Для $H\left(\frac{x}{x_0}\right)$ решение ищется в виде ряда, и оно должно иметь вид полинома, в противном случае $\psi(x)$ не обращается в ноль на бесконечности. Требование обрыва ряда на некотором числе накладывает ограничения на возможные значения энергии, а именно:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega; \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Собственные функции имеют вид:

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

где $H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)$ — полиномы Чебышева—Эрмита, определяемые уравнением:

$$H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}\, x_0}} e^{+\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \frac{d^n}{d\left(\frac{x}{x_0}\right)^n} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}.$$

Вид некоторых собственных функций:

$$n = 0; \quad \psi_0(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}}; \quad \bar{w}_0(x) = w_0(0)\, e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2};$$

$$n = 1: \quad \psi_1 = \frac{-2\frac{x}{x_0}}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}}\, e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2},$$

На рис. 248 приведено распределение вероятности для некоторых n. Пунктиром обозначено классическое распределение вероятностей. Приведем выражения для некоторых полиномов Чебышева—Эрмита $H(\xi)$:

$$H_0(\xi) = 1,$$

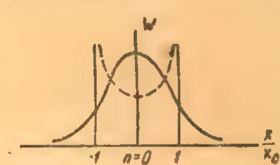
$$H_1(\xi) = 2\xi,$$

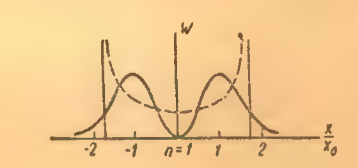
$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2,$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi,$$

где

$$\xi = \frac{x}{x_0}.$$





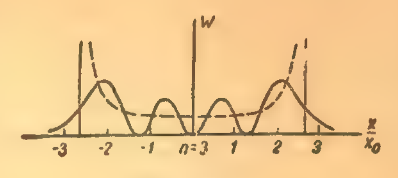


Рис. 248

§ 8. Движение в центрально-симметричном поле

Если потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой точки называемой центром, то поле называется центрально-симметричным.

Оператор момента количества движения. Момент количества движения определяется выражением $M = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$. Естественно обозначить оператор $\hat{M} = [\hat{r}\hat{p}]$ и назвать его оператором момента количества движения:

$$\hat{M} = -i\hbar[\hat{r}\hat{\nabla}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}.$$

Из определения следует, что момент количества движения удовлетворяет перестановочным соотношениям:

$$\{\hat{M}_x, \hat{M}_y\} = \hat{M}_x\hat{M}_y - \hat{M}_y\hat{M}_x = i\hbar\hat{M}_z;$$

$$\{\hat{M}_y, \hat{M}_z\} = \hat{M}_y\hat{M}_z - \hat{M}_z\hat{M}_y = i\hbar\hat{M}_x;$$

$$\{\hat{M}_z, \hat{M}_x\} = \hat{M}_z\hat{M}_x - \hat{M}_x\hat{M}_z = i\hbar\hat{M}_y;$$

$$\{\hat{M}_i, \hat{M}^2\} = 0, \quad (i \equiv x, y, z);$$

где $\hat{M}^2 = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + \hat{M}_z^2$,

т. е. одновременно можно измерить полный момент количества движения и одну из его компонент.

Оператор момента количества движения в сферической системе координат имеет вид:

$$\hat{M}_x = -i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right);$$

$$M_y = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right);$$

$$M_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

$$\hat{M}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi} = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Собственные функции и собственные значения проекции момента количества движения $\hat{M}_z$:

$$\hat{M}_z\psi = M_z\psi; \quad \text{но} \quad \hat{M}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

следовательно,

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = M_z\psi,$$

откуда

$$\psi(\varphi) = Ce^{\frac{iM_z\varphi}{\hbar}} = Ce^{im\varphi}.$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ (из условия нормировки).}$$

Для того, чтобы $\psi(\varphi)$ было однозначной,

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}e^{im2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} = \psi(\varphi),$$

необходимо, чтобы m было целым числом: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Таким образом, собственные значения проекции момента равны:

$$M_z = m\hbar.$$

Уравнение для собственных функций и собственных значений $\hat{M}^2$:

$$\hat{M}^2\psi(\theta,\varphi) = M^2\psi(\theta,\varphi); \quad -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}\psi = M^2\psi(\theta,\varphi) = \hbar^2\lambda\psi(\theta,\varphi).$$

Если положить $\lambda = \frac{M^2}{\hbar^2}$, то

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \lambda\psi = 0.$$

Однозначное, конечное и непрерывное решение имеется при условии, что $\lambda = l(l+1)$, где l — целое положительное число, $l = 0, 1, 2, \ldots$ При каждом l существует $2l+1$ решений в виде так называемых сферических функций;

$$\psi(\theta,\varphi) = Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!\,(2l+1)}{(l+|m|)!\,4\pi}}\,P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi},$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$ (всего $2l+1$ значений).

Функции

$$P_l^{|m|}(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}}P_l(\xi),$$

где $\xi = \cos\theta$, причем

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l\,l!}\frac{d^l}{d\xi^l}[(\xi^2-1)^l] \text{ — полиномы Лежандра.}$$

Величина l носит название орбитального квантового числа. Оно определяет величину орбитального момента количества движения. Таким образом, $M = \sqrt{l(l+1)}\ \hbar$; $M_z = m\hbar$—всего $(2l+1)$ проекций. Обращает на себя внимание то, что $M_z = M\cos\theta$, и, следовательно,

$$\cos\theta = \frac{M_z}{M} = \frac{m\hbar}{\sqrt{l(l+1)}\,\hbar},$$

всего $2l+1$ углов. Экстремальный угол

$$\cos\theta_{\text{экстр}} = \frac{\pm l}{\sqrt{l(l+1)}} = \pm\sqrt{\frac{l}{l+1}},$$

т. е. $\theta \neq 0°$ и $180°$.

Рассмотрим выражение для собственных функций и распределение вероятностей по направлениям:

$$l = 0; \quad m = 0; \quad Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \qquad w_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}.$$

все направления равновероятны — это естественно, ибо момент равен нулю и какого-либо выделенного направления в пространстве нет;

$$l = 1; \; m = 1, \; 0, \; -1;$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta; \qquad w_{10}(\theta, \varphi) = \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta;$$

$$Y_{1,\,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}; \quad w_{1,\,\pm 1}(\theta, \varphi) = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta.$$

Если отложить в направлении θ, φ отрезок, пропорциональный $w(\theta, \varphi)$, то получающаяся полярная диаграмма имеет для простейших случаев вид, представленный на рис. 249.

Оператор Гамильтона в сферической системе координат. Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_{\theta\varphi}}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \Delta_{\theta,\,\varphi}\right].$$

Следовательно,

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2\Delta_{\theta,\,\varphi}}{2mr^2} + U(\mathbf{r}) = \hat{T}_r + \frac{\hat{M}^2}{2mr^2} + U(\mathbf{r}),$$

где $\hat{T}_r = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$ — оператор кинетической энергии радиального движения; $\hat{M}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\,\varphi}$ — оператор момента количества движения, $U(\mathbf{r})$ — потенциальной энергии.

Закон сохранения момента количества движения. Если $U(\mathbf{r}) \equiv U(r)$, т. е. от направления не зависит, то $\{\hat{M}^2, \hat{H}\} = 0$. $\hat{M}^2$ коммутирует сам с собой, $\hat{T}_r$, и $U(r)$, так как они не зависят от направления, и $\hat{M}^2$ — от расстояния. В таком случае $\frac{d}{dt}\hat{M}^2 = [\hat{H}\hat{M}] = 0$; следовательно, момент количества движения в центрально-симметричном поле сохраняется и является интегралом движения.

Атом водорода. Потенциальная энергия для одноэлектронного атома с зарядом ядра Ze равна $U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$, если $U(\infty) = 0$. Уравнение Шредингера для атома водорода имеет вид:

$$\hat{H}\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi) \quad \text{(стационарные состояния)},$$

где

$$\hat{H} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right).$$

Так как угловая зависимость в гамильтониане содержится только в члене с $\hat{M}^2$, а $\hat{M}^2$ и $\hat{H}$ коммутируют, то Y_{lm} будет собственной функцией $\hat{H}$. В таком случае уравнение

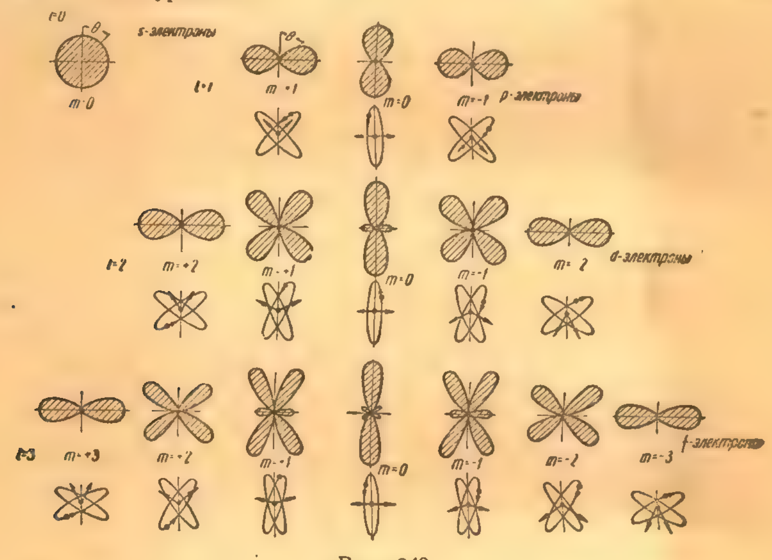


Рис. 249

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{M}^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}\right]\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi)$$

распадается на два уравнения, если подставить

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\,Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

так как

$$\hat{M}^2\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\,Y_{lm}(\theta, \varphi)\,\hbar^2 l(l+1),$$

то уравнение для радиальной функции $R(r)$ приобретает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)R(r) + \left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r} - E\right)R(r) = 0.$$

Уравнение решается обычно следующим образом. Если положить $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, то для $u(r)$ получается более простое уравнение:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2}+\left(E+\frac{Ze^2}{r}-\frac{\hbar^2(l+1)\,l}{2mr^2}\right)u=0.$$

Уравнение переводится к безразмерным переменным с помощью подстановок новых единиц:

$$a=\frac{\hbar^2}{me^2}\ (a=0{,}529172\pm0{,}00002)\ 10^{-8}\ см,$$

$$E_1=\frac{\hbar^2}{2ma^2}=\frac{e^2}{2a}\ (E_1=13{,}52\ эв);$$

$$E=\varepsilon E_1;\quad \rho=\frac{r}{a},$$

после чего уравнение приобретает вид:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2}+\left(\varepsilon+\frac{2Z}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)u=0.$$

Находится асимптотическое решение: при $\rho\to\infty$ уравнение упрощается:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2}+\varepsilon u=0,$$

его решение:

$$u(\rho)=Ae^{\alpha\rho}+Be^{-\alpha\rho},$$

где $\alpha=\sqrt{-\varepsilon}$.

Если $\varepsilon>0$, то α — мнимая величина, решение для $R(r)$ будет иметь вид: $R\sim\frac{\sin kr}{r}$, $(k=\sqrt{2mE})$, т. е. частица может иметь любые значения энергии, что соответствует состоянию ионизации атома. Важно, что при $E>0$ энергия не квантована, имеет непрерывный спектр.

Если $\varepsilon<0$ $(E<0)$, то $A=0$ (условие конечности всюду). Общее решение для $U(\rho)$ ищется в виде

$$u(\rho)=e^{-\alpha\rho}f(\rho).$$

После подстановки получается уравнение для $f(\rho)$:

$$f''-2\alpha f'+\left(\frac{2Z}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)f=0.$$

Решение для $f(\rho)$ ищется в виде ряда

$$f(\rho)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\rho^{\nu+\gamma}.$$

Подстановка в уравнение позволяет найти γ и рекуррентную формулу для коэффициентов:

$$a_{\nu+1}=a_\nu\frac{2\alpha(l+1+\nu)+2Z}{(l+\nu+2)(l+\nu+1)-l(l+1)},\quad \gamma=l+1.$$

Рекуррентная формула показывает, что ряд ведет себя как $e^{\alpha\rho}$, и следовательно, u не обращается в ноль на бесконечности, поэтому необходимо, чтобы ряд обрывался на каком-то члене. Например, начиная с некоторого a_{n_r+1}, все $a_\nu=0$.

Тогда $2\alpha(l+1+n_r)+2Z=0$.

Величина $n_r+1+l=n=0,\ 1,\ 2\ldots$ носит название главного квантового числа.

Тогда $\alpha=-\frac{Z}{n}$, и энергия квантуется:

$$\varepsilon = -\alpha^2 = -\frac{Z^2}{n^2},$$

или

$$E_n = -\frac{E_1 Z^2}{n^2} = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, квантовая механика приводит к тому же выражению для энергии атома водорода, что и простая теория Бора.

Из определения главного квантового числа следует, что максимальное значение орбитального квантового числа $l = n - 1$, всего оно принимает n значений: 0, 1, 2,..., $n - 1$.

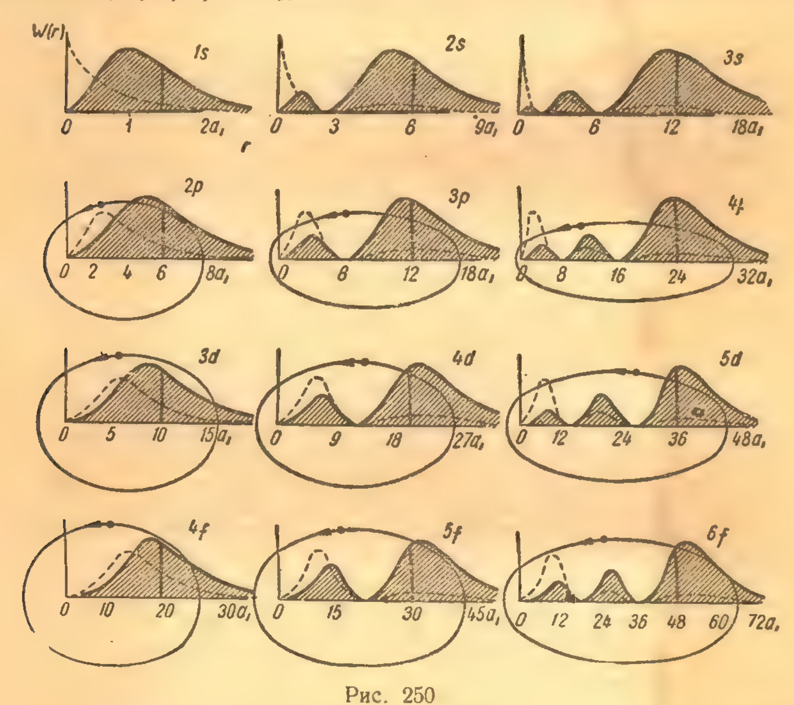


Рис. 250

Собственные функции атома водорода. Выражение для радиальной функции электрона можно получить с помощью рекуррентной формулы, или с помощью производящей функции можно получить выражение для полинома.

Это выражение имеет вид:

$$R_{nl}(\xi) = N_{nl}\, e^{-\frac{\xi}{2}}\, \xi^l L_{n+l}^{2l+1}(\xi),$$

где

$$\xi = \frac{2Z}{n}\rho = \frac{2Z}{na} r;$$

$L_k^s(\xi) = \dfrac{d^s}{d\xi^s} L_k(\xi)$ — полиномы Лагерра;

$L_k(\xi) = e^{\xi} \frac{d^k}{d\xi^k}(e^{-\xi}\xi^k)$ — производящая функция полиномов Лагерра;

N_{nl} — нормировочный коэффициент.

В обычных единицах собственные функции имеют вид:

$$R_{nl} = \frac{2Z^{3/2}}{n^2 a^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2Z}{na} r\right)^l e^{-\frac{Zr}{na}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na}\right).$$

Явный вид для некоторых радиальных функций для водорода ($Z = 1$):

$$R_{10} = 2a^{-3/2} e^{-\frac{r}{a}}; \quad R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2a^3}} e^{-\frac{r}{2a}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right); \quad R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6a^3}} e^{-\frac{r}{2a}} \cdot \frac{r}{a};$$

$$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3a^3}} e^{-\frac{r}{3a}} \left(1 - \frac{2r}{3a} + \frac{2r^2}{27a^2}\right); \quad R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6a^3}} e^{-\frac{r}{3a}} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{r}{6a}\right);$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30a^3}} e^{-\frac{r}{3a}} \frac{r^2}{a^2}; \quad R_{40} = \frac{1}{4\sqrt{a^3}} e^{-\frac{r}{4a}} \left(1 - \frac{3r}{4a} + \frac{r^2}{8a^2} - \frac{r^3}{192a^3}\right).$$

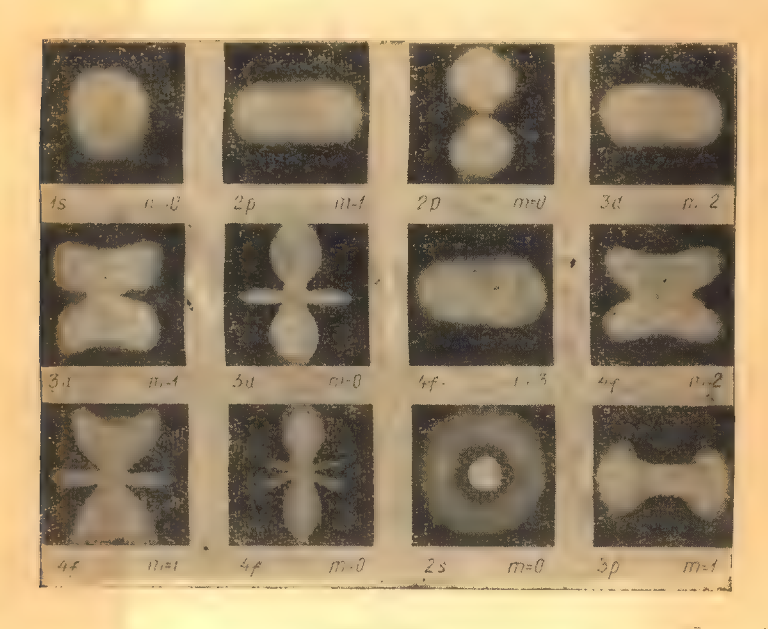


Рис. 251

Физический смысл радиальной функции удобно найти из следующих соображений:

$$w(r, \theta, \varphi)\, d\tau = \psi^*\psi\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

есть вероятность нахождения электрона в элементе объема:

$$d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

около точки с координатами r, θ, φ. Если проинтегрировать вероятность по θ и φ, то получается вероятность нахождения электрона в шаровом слое, объемом $4\pi r^2\, dr$,

$$w(r)\,dr = R_{nl}^2(r)\,r^2\,dr.$$

Следовательно, $R_{nl}^2 r^2 = w(r)$ есть плотность вероятности нахождения электрона в шаровом слое толщиной dr и радиусом r. На рис. 250 представлено распределение $w(r)$ для простейших случаев. Это распределение определяет размер атома. При $n = 1$ максимум распределения совпадает с $r = a$, т. е. с радиусом первой боровской орбиты. Форма атома характеризуется функцией $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

На рис. 251 представлена фотография моделей электронного облака атома водорода.

Вид некоторых сферических функций:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos\theta;$$

$$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin\theta \cdot e^{i\varphi};$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right);$$

$$Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi};$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi};$$

$$Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right);$$

$$Y_{31} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\,e^{i\varphi};$$

$$Y_{32} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2\theta\cos\theta\, e^{2i\varphi};$$

$$Y_{33} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3\theta e^{3i\varphi};$$

$$Y_{40} = \sqrt{\frac{9}{4\pi}}\left(\frac{35}{8}\cos^4\theta - \frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{3}{8}\right);$$

$$Y_{41} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)\,e^{i\varphi};$$

$$Y_{42} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{8\pi}} \sin^2\theta\,(7\cos^2\theta - 1)\,e^{2i\varphi};$$

$$Y_{43} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3\theta\cos\theta\, e^{3i\varphi};$$

$$Y_{44} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{8\pi}} \sin^4\theta\, e^{4i\varphi}.$$

Средние значения для $\langle r^\nu \rangle$ уравнения Шредингера для водорода:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{2Z}\,[3n^2 - l(l+1)] \cdot a;$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{n^2}{2Z^2}\,[5n^2 + 1 - 3l(l+1)] \cdot a^2;$$

$$\langle r^3 \rangle = \frac{n^2}{8Z^3}\left[35\, n^2 (n^2 - 1) - 30\, n^2 (l + 2)(l - 1) + 3(l + 2)(l + 1)\, l\,(l - 1)\right]\cdot a^3;$$

$$\langle r^4 \rangle = \frac{n^4}{8Z^4}\left[63\, n^4 - 35\, n^2 (2l^2 + 2l - 3) + 5l(l + 1)(3l^2 + 3l - 10) + 12\right]\cdot a^4;$$

$$\langle r^{-1} \rangle = \frac{Z}{n^2 a};$$

$$\langle r^{-2} \rangle = \frac{Z^2}{n^3\left(l + \frac{1}{2}\right)a^2};$$

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{Z^3}{n^3 (l + 1)\left(l + \frac{1}{2}\right) l a^3};$$

$$\langle r^{-4} \rangle = \frac{Z^4\left[3n^2 - l(l + 1)\right]}{2n^5\left(l + \frac{3}{2}\right)(l + 1)\left(l + \frac{1}{2}\right) l \left(l - \frac{1}{2}\right) a^4}.$$

§ 9. Теория возмущений

Содержание теории возмущений. Точное решение существует лишь для очень простых задач, например, гармонический осциллятор, атом водорода. Но и они требуют очень сложных математических методов вычисления.

Решение более сложных задач оказывается практически невозможным. Однако во многих случаях эти задачи можно решать приближенно — путем сведения их к более простым задачам, допускающим строгое, точное решение, находя при этом соответствующие поправки. Разработка методов приближенных решений задач путем сведения их к соответствующим, более простым, с вычислением необходимых поправок и является содержанием теории возмущений.

Оператор возмущения. Имеется некоторое уравнение $\hat{H}\psi = E\psi$, точное решение которого, однако, невозможно. Тогда необходимо из гамильтониана $\hat{H}$ выделить члены $\hat{H}^0$, для которых существует точное решение, так что уравнение $\hat{H}^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$ решается: известны ψ^0 и E^0. В таком случае это решение можно принять в качестве нулевого приближения для исходной задачи, гамильтониан которой можно представить в виде суммы двух членов:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{W},$$

где $\hat{W} = \hat{H} - \hat{H}^0$ носит название оператора возмущения. Если предположить, что возмущение мало, то можно искать приближенное решение в виде ряда по степеням этого возмущения.

Понятие вырождения. Если какому-либо собственному значению энергии E_n (или другой величины) соответствуют f различных собственных функций $\psi_{n1}, \psi_{n2}, \ldots, \psi_{nf}$, то состояние с энергией E_n называется вырожденным, а f — кратностью вырождения.

Пример. В атоме водорода энергия зависит только от главного квантового числа и не зависит от l и m, тогда как волновые функции зависят от n, l, m. При одном и том же n и E_n существует n различных l, а при каж-

дом l существует $(2l+1)$ различных m, так что существует $\sum_{l=1}^{l=n}(2l+1)=n^2$ различных собственных функций, и состояние E_n $f=n^2$ раз вырождено

Невырожденные состояния. Решение уравнения $(\hat{H}^\circ+\hat{W})\psi=E\psi$ при известном $H^\circ\psi^\circ=E^\circ\psi^\circ$ проводится путем разложения искомой функции ψ в ряд по собственным функциям невозмущенной задачи:

$$\psi(x)=\sum_m C_m\overset{\circ}{\psi}_m(x),$$

тогда

$$\hat{H}\psi=\sum_m(\hat{H}^\circ+\hat{w})C_m\overset{\circ}{\psi}_m=\sum_m\left(\overset{\circ}{E}_m+\hat{w}\right)\overset{\circ}{\psi}_m=E\sum C_m\overset{\circ}{\psi}_m.$$

Умножая на $\overset{\circ *}{\psi}_n$ и интегрируя по пространству (x, y, z), можно получить связь между коэффициентами в виде:

$$\left(\overset{\circ}{E}_n+w_{nn}-E\right)C_n+\sum_{n\neq m}w_{nm}C_m=0,$$

где $w_{nm}=\int\overset{\circ *}{\psi}_n\hat{w}\overset{\circ}{\psi}_m d\tau$ — матричный элемент оператора возмущения. Приближенное решение приводит к следующему результату:

$$E_n=\overset{\circ}{E}_n+w_{nn}+\sum_{m\neq n}\frac{|w_{mn}|^2}{\overset{\circ}{E}_n-\overset{\circ}{E}_m}+\ldots,\quad \psi_n=\overset{\circ}{\psi}_n+\sum_m\frac{w_{nm}}{\overset{\circ}{E}_m-\overset{\circ}{E}_n}\overset{\circ}{\psi}_m+\ldots$$

Условие применимости теории возмущений. Результаты теории возмущений будут справедливы тогда, когда поправка мала, следовательно, для этого необходимо, чтобы

$$|w_{mn}|\ll\left|\overset{\circ}{E}_n-\overset{\circ}{E}_m\right|.$$

Теория возмущения для вырожденных состояний. Пусть $\overset{\circ}{E}_n$ соответствует $\psi_{n1}, \psi_{n2}, \ldots, \psi_{nf_n}$ собственных ортонормированных функций. Тогда $\psi=\sum_{m\alpha}\overset{\circ}{\psi}_{m\alpha}C_{m\alpha}$ и уравнение $(\hat{H}^\circ+\hat{w})\psi=E\psi$, после подстановки разложения дает:

$$(\hat{H}^\circ+\hat{w})\sum_{m,\alpha}C_{m\alpha}\overset{\circ}{\psi}_{m\alpha}=\sum_{m,\alpha}\left(C_{m\alpha}\overset{\circ}{E}_m+C_{m\alpha}\hat{W}\right)\overset{\circ}{\psi}_{m\alpha}=\sum_{m\alpha}EC_{m\alpha}\overset{\circ}{\psi}_{m\alpha}.$$

После умножения на $\overset{\circ *}{\psi}_{n\beta}$ и интегрирования получим:

$$\left[\overset{\circ}{E}_n+w_{n\beta,\,m\alpha}-E\right]C_{n\beta}+\sum_{n\neq m;\ \beta\neq\alpha}w_{n\beta,\,m\alpha}C_{m\alpha}=0,$$

$$W_{n\beta,\,m\alpha}=\int\overset{\circ *}{\psi}_{n\beta}\hat{W}\psi_{m\alpha}\,d\tau.$$

В нулевом приближении для уравнения $E^\circ=\overset{\circ}{E}_k$:

$$C_{k\alpha}=\overset{\circ}{C}_{k\alpha}\ (\neq 1);\quad \alpha=1, 2, \ldots, f_n,$$

$$\overset{\circ}{C}_{n\alpha}=0\quad(n\neq k).$$

Выберем те члены, которые содержат неравные нулю $C_{k\alpha}$. Получим:

$$\left(\overset{\circ}{E}_k+W_{k\beta,\,n\beta}-E\right)\overset{\circ}{C}_{k\beta}+\sum_{\alpha\neq\beta}W_{k\beta,\,k\alpha}\overset{\circ}{C}_{k\alpha}=0.$$

Если эти уравнения разрешить относительно $C^{\circ}_{k\alpha}$, то тем самым решение будет найдено. Но для этого необходимо, чтобы детерминант системы обращался в ноль:

$$\begin{vmatrix} E^{\circ}_k + W_{k1,\,k1} - E & W_{k1,\,k2} & W_{k1,\,k3} & \dots & W_{k1\,kf_k} \\ W_{k2,\,k1} & E^{\circ}_k + W_{k2,\,k2} - E & W_{k2,\,k3}, & \dots, & W_{k2,\,kf_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{kf_k,\,k1} & W_{kf_k\,k2} & W_{kf_k,\,k3} & \dots & E^{\circ}_k + W_{kf_k\,kf_k} - E \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение позволяет найти значение энергии системы. Если все корни уравнения различны, то это означает, что вырождение полностью снимается. Если некоторые корни совпадают, то вырождение снимается частично.

Таким образом, при наложении на систему возмущения происходит расщепление энергетического уровня на ряд подуровней энергии:

$$E^{\circ}_k \to E_{k1}, E_{k2}, E_{k3}, \dots, E_{k,\,f_k}.$$

§ 10. Квантовая механика системы тел

Постановка задачи. Переход от квантовой механики одной частицы к системе тел проводится совершенно аналогично переходу в классической физике. Система N тел рассматривается как тело с $3N$ степенями свободы. Волновая функция определяется в конфигурационном пространстве с $3N$ степенями свободы:

$$\Psi = \Psi\left(x_1, y_1, z_1;\quad x_2, y_2, z_2;\ \dots\ x_N, y_N, z_N;\ t\right).$$

Знание волновой функции позволяет определять движение любой подсистемы путем интегрирования по координатам тех частиц, чье движение в данном вопросе не интересно, т. е., если проинтегрировать по координатам все частицы, кроме k-ой, то тем самым получим вероятность нахождения в данном объеме только k-ой частицы:

$$W(x_k, y_k, z_k; t)\, dx_k\, dy_k\, dz_k =$$

$$= dx_k\, dy_k\, dz_k \int |\Psi(x_1, y_1, z_1 \dots)|^2\, dx, dy, dz, \dots dx_{k-1} \dots dx_{k+1} \dots dz_N.$$

Гамильтониан системы. Оператор Гамильтона системы имеет вид:

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \hat{U}_k(x_k, y_k, z_k; t) + \sum_{k+j=1}^{N} \hat{U}_{kj}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) \right\},$$

где $\frac{\hat{p}_k^2}{2m_k}$ оператор кинетической энергии k-ой частицы, $\hat{U}_k$ — оператор потенциальной энергии во внешнем поле, $\sum_j \hat{U}_{kj}$ — оператор потенциальной энергии, обусловленный взаимодействием k-ой частицы со всеми остальными частицами системы.

Уравнение Шредингера. Изменение состояния системы описывается уравнением Шредингера, имеющим вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi.$$

Система невзаимодействующих частиц. Такая система имеет простое решение. Действительно, если частицы не взаимодействуют,

то все $U_{kj} = 0$. Тогда уравнение для стационарного состояния можно записать в виде:

$$\hat{H}\Psi = \sum_k \left(-\frac{\hbar^2}{2m_k}\Delta_k + U_k\right)\Psi = \left(\sum_k \hat{H}_k\right)\Psi = \sum_k (\hat{H}_k \Psi) = E\Psi.$$

Так как $\hat{H}_k$ действует только на координаты k-ой частицы, то Ψ можно представить в виде произведения собственных функций электронов:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2)\ldots\psi_N(\mathbf{r}_N)$$

$$\hat{H}\Psi = \sum_k \hat{H}_k \Psi = \sum_k \hat{H}_k \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_N = E\Psi;$$

Разделим на Ψ

$$E = \sum_k \frac{\hat{H}_k \psi_k}{\psi_k} = \sum_k E_k;$$

где $\hat{H}_k \psi_k = E_k \psi_k$.

Таким образом, для невзаимодействующих частиц волновая функция системы представляет собой произведение волновых функций частиц, а полная энергия системы равна сумме полных энергий всех частиц.

§ 11. Система из одинаковых частиц

Одинаковые частицы. Их различение. Одинаковыми частицами называются частицы, имеющие одинаковые характеристики — заряд, массу, спин, магнитный момент и другие свойства. Это понятие характерно именно для микрочастиц, поскольку, например, все электроны имеют одинаковый заряд, одинаковые массы и т. д. В таком случае возникает задача, каким образом можно различать их? В классической физике в подобных случаях частицы различаются по их состояниям, т. е. указанием их траектории (координат и скоростей). Однако этот единственный способ в микромире отказывается служить. Например, если два электрона в начальный момент можно различить путем помещения их в два различных потенциальных ящика, то с течением времени благодаря туннельному эффекту электроны могут обменяться своими состояниями, и утверждение, что в первом ящике находится первый электрон, теряет силу. Таким образом, единственный способ различения по состояниям теряет свою силу в квантовой механике систем из одинаковых частиц.

Оператор перестановки. Оператор $\hat{P}_{kj}$ называется оператором перестановки; действуя на $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$, он дает функцию, в которой координаты k-и j-частиц меняются местами:

$$\hat{P}_{kj}\Psi(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_j \ldots \mathbf{r}_N) = \lambda\Psi(\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_j \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_N).$$

Собственные значения λ оператора перестановки равны ± 1:

$$\hat{P}^2_{kj}\Psi(\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_j \ldots \mathbf{r}_N) = \hat{P}_{kj}\lambda\Psi(\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_j \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_N) =$$
$$= \lambda^2\Psi(\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_j \ldots \mathbf{r}_N) = \Psi(\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_j \ldots \mathbf{r}_N), \quad \lambda^2 = 1; \quad \lambda = \pm 1.$$

Функции, которые не меняют свой знак при перестановке, называются симметричными, или четными. Меняющие знак функции называются антисимметричными, или нечетными. Четность

есть интеграл движения, поскольку оператор перестановки коммутирует с гамильтонианом, так как действие $\hat{P}_{kj}$ на $\hat{H}$ сводится к перестановке местами частей суммы:

$$\hat{H}(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_k, \ldots \mathbf{r}_j, \ldots \mathbf{r}_N) = \hat{H}(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_j, \ldots \mathbf{r}_k, \ldots \mathbf{r}_N).$$

Принцип тождественности. Невозможность различить одинаковые частицы в квантовой механике по их состояниям приводит к установлению нового постулата, известного как принцип тождественности.

В системе одинаковых частиц осуществляются только такие состояния, которые не меняются при обмене одинаковыми частицами.

Частицы Бозе и Ферми. Опыт показывает, что свойство симметрии волновой функции связано с природой частиц. Одни частицы имеют симметричные волновые функции ψ_s, они называются частицами Бозе, или бозонами, другие частицы имеют антисимметричные волновые функции, они называются частицами Ферми, или фермионами. Принадлежность частиц к тому или иному классу определяется их спином: фермионы имеют полуцелый спин, бозоны — целочисленный (в $\hbar$).

Принцип Паули. Для фермионов существует принцип исключения, или принцип Паули, который можно сформулировать следующим образом: при измерении любых четырех динамических величин L_1, L_2, L_3, s_Z, характеризующих состояние отдельной частицы, каждое значение полного набора L_1, L_2, L_3, s_Z может быть получено только для одной частицы. Или более простая формулировка: в состоянии, характеризуемом полным набором динамических переменных L_1, L_2, L_3, s_Z, может находиться не более одной частицы.

Этот принцип вытекает из антисимметричности волновой функции фермионов. Действительно, пусть в системе имеются две частицы в одинаковых состояниях — k-ая и j-ая. Тогда на волновую функцию Ψ $(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_k, \ldots \mathbf{r}_j, \ldots \mathbf{r}_N)$ подействуем оператором перестановки $\hat{P}_{kj}$.

Из свойства антисимметрии:

$$\hat{P}_{kj}\Psi_a(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_k, \ldots \mathbf{r}_j, \ldots \mathbf{r}_N) = -\Psi_a(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_j, \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_N).$$

По предположению $\Psi_a(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_k, \ldots \mathbf{r}_j, \ldots \mathbf{r}_N) = +\Psi_a(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_j \ldots \mathbf{r}_k \ldots \mathbf{r}_N)$ следовательно,

$$\Psi_a = -\Psi_a; \quad 2\Psi_a = 0, \quad \Psi_a \equiv 0,$$

т. е. такое состояние в системе фермионов невозможно.

Волновая функция невзаимодействующих частиц. Если ψ_a есть волновая функция системы, то из нее можно получить $(N!-1)$ других функций, которые будут являться решением того же уравнения, поскольку $\hat{P}_{kj}$ коммутирует с $\hat{H}$. Таким образом, система из N частиц $N!$ раз вырождена. Это вырождение называется обменным. Для системы невзаимодействующих фермионов волновую функцию можно представить в виде определителя:

$$\Psi_a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{r}_1)\,\psi_2(\mathbf{r}_1) \ldots \psi_N(\mathbf{r}_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_1(\mathbf{r}_N)\,\psi_2(\mathbf{r}_N) \ldots \psi_N(\mathbf{r}_N) \end{vmatrix}.$$

§ 12. Обменная энергия

Атом гелия. Для системы одинаковых частиц имеет место так называемый обменный эффект, не поддающийся наглядной трактовке и отсутствующий в классической физике.

Лишь благодаря обменному эффекту удается объяснить целый ряд явлений, например, образование гомополярной связи, образование зон в кристаллах и другие факты. Он является следствием тождественности частиц. Его можно рассмотреть на примере атома гелия. Для He гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}},$$

где первые два члена — операторы кинетической энергии электронов, следующие два — энергия взаимодействия двух электронов с ядром и последний член — энергия взаимодействия электронов. Ядро предполагается покоящимся и магнитное взаимодействие не рассматривается. Уравнение можно решить лишь методом теории возмущений. В качестве оператора возмущения берется энергия взаимодействия. Тогда невозмущенная задача имеет точное решение:

$$\Psi_1 = \psi_1(\mathbf{r}_1)\,\psi_2(\mathbf{r}_2),$$

$$E_1^{\circ} = E_1 + E_2.$$

Но кроме Ψ_1 решением является и $\hat{P}_{12}\Psi_1 = \psi_1(\mathbf{r}_2)\,\psi_2(\mathbf{r}_1) = \Psi_2$ — обменное вырождение. Для вырожденных состояний волновая функция должна быть комбинацией отдельных решений, именно:

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2.$$

Матричные элементы оператора возмущения вычисляются обычным способом:

$$W_{11} = \int \Psi_1^* \frac{e^2}{r_{12}} \Psi_1\, d\tau_1\, d\tau_2 = e^2 \int \frac{|\psi_1(\mathbf{r}_1)|^2 \cdot |\psi_2(\mathbf{r}_2)|^2\, d\tau_1\, d\tau_2}{r_{12}} =$$

$$= \int \frac{\rho_1 \rho_2\, d\tau_1\, d\tau_2}{r_{12}} = e^2 \int \frac{|\psi_1(\mathbf{r}_2)|^2 \cdot |\psi_2(\mathbf{r}_1)|^2\, d\tau_1\, d\tau_2}{r_{12}} =$$

$$= \int \Psi_2^* \frac{e^2}{r_{12}} \Psi_2\, d\tau_1\, d\tau_2 = W_{22} = K.$$

Величина K определена как энергия кулоновского взаимодействия двух распределенных зарядов с плотностью

$$\rho_1 = e\,|\psi_1|^2 \quad \text{и} \quad \rho_2 = e\,|\psi_2|^2.$$

Недиагональные матричные элементы

$$W_{12} = \int \Psi_1^* \frac{e^2}{r_{12}} \Psi_2\, d\tau_1\, d\tau_2 = \int \psi_1^*(\mathbf{r}_1)\,\psi_2^*(\mathbf{r}_2)\,\frac{e^2}{r_{12}}\,\psi_1(\mathbf{r}_2)\,\times$$

$$\times\, \psi_2(\mathbf{r}_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 = W_{21} = W_{12}^* = W_{21}^* = A.$$

Поправка к энергии находится из решения уравнения:

$$(E^{\circ} + W_{11} - E)\,C_1 + W_{12}\,C_2 = 0,$$

$$W_{21}\,C_1 + (E^{\circ} + W_{22} - E)\,C_2 = 0.$$

Если

$$E - E^{\circ} = \varepsilon, \quad \text{то} \quad \varepsilon = K \pm A;$$

$$E_1 = E^{\circ} + K + A; \quad E_2 = E^{\circ} + K - A,$$

уровень энергии смещается на величину K и расщепляется на два подуровня с расстоянием $2A$.

Величина A носит название обменной энергии. Ее можно представить в виде, аналогичном K:

$$e\psi_1^*(\mathbf{r}_1)\,\psi_2(\mathbf{r}_1) = \rho_1^*; \quad e\psi_1(\mathbf{r}_2)\,\psi_2^*(\mathbf{r}_2) = \rho_2^*$$

и

$$A = \int \frac{\rho_1^*\,\rho_2^*}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Эта энергия кулоновского взаимодействия обусловлена тем, что каждый электрон может находиться частью в ψ_1, частью в ψ_2. Состояния Ψ_1 и Ψ_2 могут обмениваться электронами. Простой расчет показывает, что для состояния $\Psi = C_1(t)\,\Psi_1 + C_2(t)\,\Psi_2$ величина

$$C_1(t) = e^{-i\frac{E^\circ t}{\hbar}} \cos\frac{At}{\hbar}; \quad C_2(t) = e^{-i\frac{E^\circ t}{\hbar}} \sin\frac{At}{\hbar}.$$

Но $|C_1(t)|^2 = W_1$ есть вероятность найти систему в Ψ_1, а $|C_2(t)|^2 = W_2$ — в Ψ_2.

Но

$$W_1 = \cos^2\frac{A}{\hbar}t, \quad W_2 = \sin^2\frac{At}{\hbar},$$

и, следовательно, происходит непрерывный переход системы из Ψ_1 в Ψ_2 и наоборот с периодом $\tau = \frac{2\pi\hbar}{A}$. Чем больше обменный интеграл, тем чаще происходит обмен состояниями.

Квантовая механика позволяет решать огромное количество различных задач. К их числу можно отнести:

1) Свободное движение частицы; 2) частицы в прямоугольных ямах, прохождение частицы через барьеры; 3) осциллятор; 4) атом водорода. Эти задачи решаются совершенно точно. С помощью теории возмущения практически можно решить любые задачи атомной физики с любой заданной точностью: атом гелия и другие сложные атомы, молекулы, твердые тела. Действие внешних полей на атомные системы (Зееман-эффект, Штарк-эффект). Рассеяние частиц при их движении в силовых полях. Теория излучения — вероятности переходов, рассеяние света, дисперсия и другие явления, связанные с взаимодействием света с веществом. Методами квантовой механики решаются практически все задачи ядерной физики.

Однако квантовая механика не применима к описанию процессов, характеризующихся размерами областей их протекания порядка 10^{-13} *см* и менее.

РАЗДЕЛ ВОСЬМОЙ

Ядерная физика

§ 1. Основные характеристики ядра

Заряд ядра. Если обозначить порядковый номер элемента в таблице Менделеева через Z, то заряд ядра будет равен

$$Ze = Z \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{СГСЭ}_q,$$

где e — заряд электрона по модулю или заряд протона.

Заряд ядра является основной характеристикой, определяющей индивидуальность элемента. Заряд ядер Z (в электронных или протонных единицах) принимает значения от 0 до 102 (в настоящее время); $Z = 0$ имеет нейтрон; $Z = 1$ (протон, дейтон, тритон) — ядро водорода; $Z = 2$ гелий, $Z = 101$ — менделеевий, $Z = 102$ — нобелий. Не все известные в настоящее время элементы встречаются в природе. Многие из них получены искусственно. Например, все элементы с $Z > 92$ и $Z = 0$; 43; 61; 85.

Масса ядра. Второй основной характеристикой ядра является его масса. Масса ядра меньше массы атома $\sim$ на Zm_0, т. е. на массу всех электронов данного атома. Масса электрона много меньше массы ядра. Отношение массы электрона m_0 к массе протона m_p равно

$$\frac{m_0}{m_p} = \frac{1}{1836{,}2}.$$

Массы атомов измеряются с ошибкой $\sim 10^{-4}\%$ и меньше методами масс-спектроскопическими.

Изотопы. В природе встречается около 280 устойчивых (стабильных) изотопов. Вместе с искусственно полученными изотопами их общее число составляет приблизительно 1080. В среднем на каждый элемент приходится по три стабильных изотопа. Отдельные элементы имеют различное число изотопов. Например, водород имеет 2 стабильных изотопа, — отношение масс которых 1 : 2 (водород и дейтерий); бериллий, фтор, фосфор — по 1 изотопу, в то же время ртуть — 7 изотопов, а олово ($Z = 50$) — 10 изотопов.

Массовое число. Таблица масс изотопов показывает, что массы атомов в нем выражаются величинами, близкими к целым числам.

Для многих целей достаточно знать только целое число для массы, поэтому вводится понятие массового числа A. Массовым числом A атома называется ближайшее к массе выраженной в *а. е. м.* целое число. Массовые числа всех известных в настоящее время атомов изменяются от $A = 1$ до $A = 260$.

Атомы, имеющие одинаковые массовые числа, но различный заряд ядра Z, называются *изобарами*.

Условная запись атомов. Для указания индивидуальности атома X или его ядра достаточно указать его массовое число A и заряд ядра Z. Обозначение имеет вид:

$$_ZX^A \quad \text{или} \quad X_Z^A.$$

Но так как символ элемента однозначно связан с Z, то Z может отсутствовать. Например, наиболее легкий изотоп кислорода с массовым числом $A = 16$, может быть записан O^{16} или $_8O^{16}$.

Массы некоторых атомов

в *а.е.м.*	*г*	*Мэв*
Нейтрон $_0n^1 = 1{,}008982$	$1{,}6751 \cdot 10^{-24}$	939,47
Протон $_0p^1 = 1{,}007593$	—	—
Водород $_1H^1 = 1{,}008142$	$1{,}6737 \cdot 10^{-24}$	938,92
Дейтерий, $_1D^2 = 2{,}001473$	—	—
Гелий $_2He^4 = 4{,}003873$	—	—

Радиус ядра. Методы измерения. Размеры (радиус) ядер могут быть определены различными способами, при этом получаются несколько различные коэффициенты в формуле, дающей связь радиуса R с массовым числом A.

1. *Рассеяние нейтронов*. Эффективное сечение рассеяния ядром быстрых нейтронов при определенной энергии нейтронов будет равно площади геометрического сечения ядра. Энергия нейтрона должна быть достаточно велика, чтобы можно было пренебречь волновыми свойствами, т. е. длина волны де Бройля для нейтрона должна быть много меньше радиуса ядра ($\lambda \ll R$). В то же время энергии нейтронов не должны быть слишком велики, для того чтобы взаимодействия нейтрона с ядром было достаточным для его рассеяния. Обычно используются нейтроны с энергией 20 *Мэв*.

2. *α-распад*. Теория α-распада приводит к зависимости периода полураспада от ширины потенциального барьера ядра для α-частицы, поскольку вероятность распада приблизительно равна

$$\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{R}^{R_1}\sqrt{2M\,[U(r)-E]}\right]dr,$$

т. е. пропорциональна прозрачности барьера. В это выражение входит R, определяющий радиус потенциальной ямы (рис. 252).

3. *Ядерные реакции с заряженными частицами*. Вероятность ядерных реакций связана с прохождением потенциального барьера, откуда можно оценить размер ядра.

Эти методы позволяют оценить размеры той области, в которой действуют ядерные силы. Из них вытекает следующая эмпирическая зависимость:

$$R = 1{,}40 \cdot 10^{-13} A^{1/3}\ \text{см}.$$

Из формулы видно, что объем ядра пропорционален его массе.

4. *Энергия связи для изобаров*. Энергия связи изобаров или «зеркальных ядер» таких, как

$$_1H^3 - {}_2He^3, \quad {}_3Li^7 - {}_4Be^7, \quad {}_5B^{11} - {}_6C^{11}, \quad {}_{14}Si^{20} - {}_{15}P^{20}$$

и других, различна. Это можно объяснить тем, что при замене нейтрона протоном возрастает энергия ядра, обусловленная кулоновским расталкиванием. Если предположить, что ядро — шар радиусом R, по которому равномерно распределены протоны, то дополнительная энергия C кулоновского расталкивания $C = \frac{6}{5}\frac{Ze^2}{R}$. Зная разности энергии связи зеркальных ядер, можно

определить радиус ядер. В результате с учетом эффекта квантовомеханического обмена получается:

$$R = 1{,}3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см.}$$

5. *Рассеяние электронов.* При взаимодействии электронов с ядром ядерные силы практически не играют роли, поэтому их рассеяние дает возможность определить радиус электрически заряженной области, эквивалентной размерам ядра.

Опыты приводят к зависимости:

$$R = (1{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см.}$$

6. *Общий ход ядерных кулоновских энергий.* В эмпирические формулы для энергии (массы) ядер входит член, дающий электростатическую энергию равномерно заряженной области радиусом $R: \left(\frac{3}{5}\,\frac{e^2Z^2}{R}\right)$. Это дает для R значение:

$$R = 1{,}23 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см.}$$

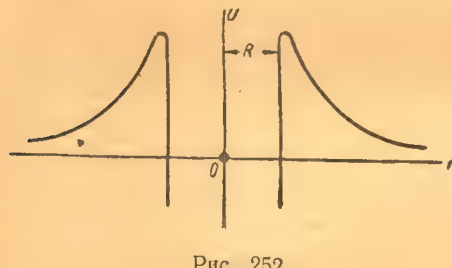


Рис. 252

7. *Общая формула.* Приведенные результаты показывают, что радиус действия ядерных сил несколько больше радиуса шара, в котором распределены протоны. Возможно, что это связано также с тем, что нейтроны распределены по шару большего радиуса. Если принять последнее предположение, т. е. считать, что ядро имеет сердцевину, а на поверхности плотность вещества несколько меньше, то общая формула для размера ядра (по ядерным силам) имеет вид:

$$R = (0{,}7 + A^{1/3})\, 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Примеры. Радиус протона получается из любого выражения, если положить $A = 1$. Следовательно, для него $R = 1{,}23 \cdot 10^{-13}$ *см.* Для ядра урана $R = 7{,}5 \cdot 10^{-13}$ *см.* Радиусы ядер при переходе от водорода к урану меняются всего лишь в 6,5 раз. Зная объем и массу ядра, можно оценить плотность ядерного вещества. Оценка дает: $\rho \sim 10^{14}$ *г/см³*.

Спин ядра. Оптические и ядерные исследования показывают, что ядро имеет собственный механический момент — СПИН. Он измеряется в $\hbar$ и равен $\sqrt{I(I+1)}\ \hbar$, где I — спиновое ядерное квантовое число. Оно может принимать значения: 0; 1/2; 1; 3/2 и другие целые или полуцелые значения.

Ядра с четными A всегда имеют спин целочисленный (0, 1, 2,...), ядра с нечетным A — полуцелый (1/2; 3/2; 5/2,...).

Магнитный момент. Ядра имеют магнитные моменты: дипольный, октупольный и т. д. Природа ядерных магнитных моментов до сих пор не раскрыта. Величина ядерного магнитного момента больше, чем следует ожидать из теоретических представлений. Вместе с тем ядерный магнитный момент имеется и у нейтрона, лишенного электрического заряда, поэтому представление, что магнитный момент возникает в результате вращения заряженного ядра вокруг собственной оси, не объясняет существование ядерных магнитных моментов (нейтрон не имеет электрического заряда). Единицей измерения магнитных моментов ядер служит ядерный магнетон Бора. $\mu_я = \frac{e\hbar}{2M_p c}$, который в 1836,2 раза меньше $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0 c}$.

Электрический квадрупольный момент. Основной величиной, характеризующей распределение заряда по объему ядра, является квадрупольный электрический момент Q. Потенциал, создаваемый зарядом ядра на расстоянии r от центра инерции ядра, можно представить в виде:

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{r} + \frac{d}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{Q}{r^3} + \ldots,$$

где первый член представляет собой потенциал точечного заряда, второй — электрического диполя, третий — квадруполя и т. д. При этом

$$Ze = \int \rho dv; \quad d = \int \rho z \cdot dv; \quad Q = \int \rho\,[3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]\,dv.$$

Если считать плотность заряда ρ одинаковой всюду в ядре, то квадрупольный момент будет определяться только формой ядра. Например, для эллипсоида вращения:

$$Q = \frac{2}{5}\,Ze\,(b^2 - a^2),$$

где b — полуось эллипсоида вдоль направления спина (ось z),
a — полуось в перпендикулярном направлении. Дипольный момент при этом равен нулю.

Если $Q>0$, то $b>a$, и ядро вытянуто вдоль направления спина. Если $Q<0$, то $b<a$, и ядро сплюснуто вдоль оси Z. При $Q = 0$, $b=a$, и ядро обладает сферической симметрией. Это относится к ядрам со спином 0 и 1/2.

§ 2. Протонно-нейтронная структура ядра

Близость масс ядер к целым числам (в *а. е. м.*) наводила физиков и химиков на мысль, что все элементы состоят из водорода (гипотеза Проута).

После опытов Резерфорда казалось, что в ядре Z содержится A протонов и $N=A-Z$ электронов, которые компенсируют заряды протонов. Однако протонно-электронная модель ядра противоречит опытным фактам. В частности это представление не согласуется с экспериментально измеренными величинами моментов ядер.

Рассмотрим ядро дейтерия: $A = 2$, $Z = 1$. Следовательно, в ядре должно быть 2 протона и 1 электрон, т. е. всего три частицы. Но каждая частица имеет спин, равный 1/2 (в$\hbar$).

Следовательно, спин дейтона должен быть равен 1/2 или 3/2. Но опыт показывает, что спин дейтона равен 1.

Если предположить, что электрон находится в ядре, то его энергия как минимум, должна быть $\sim 50 \div 60$ *Мэв* — это вытекает из волновых свойств электрона. Область, в которой волна де Бройля электрона отлична от нуля, должна иметь размеры ядра, так что можно грубо положить $\lambda \sim 2R$ или $p \sim \frac{h}{2R}$.

Это дает для энергии $E \sim pc \sim \frac{hc}{2R} \sim 70$ *Мэв.* Однако это противоречит данным по радиоактивности и энергии связи.

В 1932 г. Чадвик открыл нейтральную частицу с массой, близкой к массе протона. Вслед за этим советский физик Дмитрий Дмитриевич Иваненко и немецкий физик Гейзенберг выдвинули гипотезу, что ядра состоят из протонов и нейтронов. В настоящее время это является твердо установленным фактом. В каждом ядре имеется Z протонов и $N=A-Z$ нейтронов, так что $A = N + Z$. Протоны и нейтроны носят общее название — ядерные частицы или нуклоны. Поэтому мы можем дать теперь другое определение массового числа A: *массовое число A равно числу нуклонов в ядре: Z протонов и N нейтронов.*

Изотопы — это ядра, в которых имеется одинаковое число протонов, но разное число нейтронов.

В нижеследующей таблице приведены примеры

Элемент	Символ	Z — число протонов	N — число нейтронов	A — число нуклонов
Дейтерий	$_1D^2$	1	1	2
Тритий	$_1T^3$	1	2	3
Гелий	$_2He^4$	2	2	4
Литий	$_3Li^6$	3	3	6
Натрий	$_{11}Na^{23}$	11	12	23
Железо	$_{26}Fe^{54}$	26	28	54
Уран	$_{92}U^{235}$	92	143	235
	$_{92}U^{238}$	92	146	238

Легко видеть, что спин ядра хорошо объясняется этой теорией: при четном A-спин целый, при нечетном — полуцелый. Для дейтерия $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Для Гелия $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Для трития $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ и т. д.

Некоторые закономерности строения ядер (связь между числом протонов и нейтронов). Опыт показывает, что в стабильных ядрах может быть лишь вполне определенное соотношение между числом нейтронов и числом протонов. Если построить диаграмму в осях N, Z (рис. 253), то стабильные ядра займут на этой диаграмме узкую полоску. Линия, проходящая через середину этой полоски, носит название линии устойчивости. Ее уравнение имеет вид:

$$Z = \frac{A}{2 + 0{,}0146\, A^{2/3}}.$$

Как из уравнения, так и из рисунка видно, что при малых и средних значениях A число нейтронов и число протонов приблизительно равны, т. е. $A \approx 2Z$ (прямая линия (рис. 257) соответствует $N = Z$).

Однако с ростом Z число N растет быстрее. Это и понятно, так как с ростом Z силы кулоновского расталкивания возрастут пропорционально $Z(Z-1) \approx Z^2$ (попарное взаимодействие протонов), и для компенсации возрастающего расталкивания число нейтронов, играющих роль «ядерного цемента», должно расти быстрее числа протонов.

1. Общее число ядер с четным Z значительно больше общего числа ядер с нечетным Z.

2. Общее число ядер с четным A значительно больше общего числа ядер с нечетным A.

3. Почти все ядра с четным A имеют четное Z (за исключением дейтерия, $_3Li^6$, $_5B^{10}$, $_7N^{14}$).

4. Не встречаются в природе ядра, массовые числа которых удовлетворяли бы формуле $A = 4n + 1$, при $n > 52$.

5. Особенно устойчивы те ядра, для которых (при $Z = N$); $Z = 2$; 8; 20 (дважды «магические» числа) или $Z = 28$; 50; 82 и $N = 50$, 82, 126 («магические» числа).

Дефект массы. Если ядро состоит из протонов и нейтронов, то масса ядра должна быть связанной с массами исходных частиц. Обозначим массу протона m_p, а массу нейтрона m_n, тогда сумма масс Z протонов и N нейтронов будет равна $Zm_p + Nm_n$.

Измерения масс ядер $_Zm_я^A$ показывают, что масса ядра всегда меньше

суммы масс исходных нуклонов. Разность между массой исходных частиц и массой ядра называется дефектом масс Δm:

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - {}_Zm^A_я.$$

Если взять не массу ядра ${}_Zm^A_я$, а массу атома ${}_Zm^A$, и вместо массы протона m_p записать массу атома водорода ${}_1m^1$, то

$$\Delta m = Z\,{}_1m^1 + (A - Z)\,{}_0m^1 - {}_Zm^A.$$

Дефект массы означает, что при образовании ядра часть массы исходных частиц передается в той или иной форме окружающей среды.

Энергия связи ядра. Если часть массы при образовании ядра передается другим телам, то вместе с ней выделяется и энергия ΔE:

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

Чтобы расщепить ядро на составные части, необходимо затратить такое же количество энергии ΔE, которое выделяется при образовании ядра, поэтому величина ΔE характеризует устойчивость ядра, и носит название энергии связи. Чем больше ΔE (или дефект массы Δm), тем устойчивее ядро.

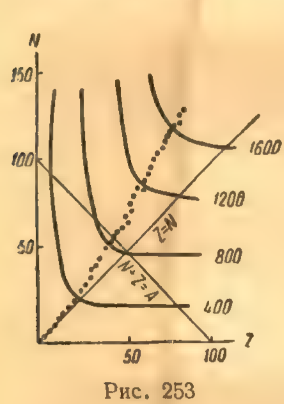


Рис. 253

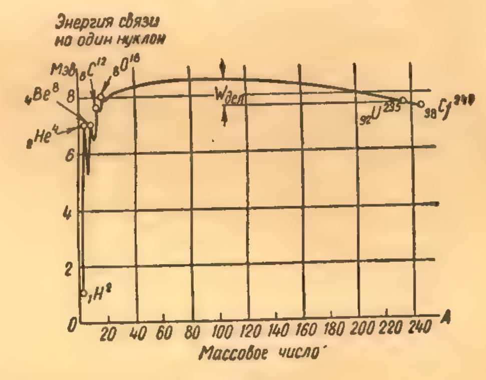


Рис. 254

Подсчитаем энергию связи некоторых ядер:

1. Энергия связи для ядра гелия:

$${}_2m^4 = 4{,}003873; \quad 2\,{}_1m^1 + 2\,{}_0m^1 = 4{,}034248,$$
$$\Delta m = 0{,}030 \text{ а. е. м. или}$$
$$\Delta E = 0{,}030 \cdot 931 \text{ Мэв} = 28{,}0 \text{ Мэв}$$

2. Энергия связи для ядра железа ${}_{26}Fe^{54}$:

$${}_{26}m^{54} = 53{,}956, \; 26\,{}_1m^1 + 28\,{}_0m^1 = 54{,}463 \text{ а. е. м.},$$
$$\Delta m = 0{,}507 \text{ а. е. м. и } \Delta E = 472 \text{ Мэв}.$$

3. Энергия связи для ядра урана ${}_{92}U$:

$${}_{92}m^{238} = 238{,}125, \; \Delta m = 1{,}932 \text{ а. е. м.},$$
$$\Delta E = 1800 \text{ Мэв};$$
$${}_{92}m^{235} = 235{,}117; \quad \Delta m = 1{,}908 \text{ а. е. м.},$$
$$\Delta E = 1741 \text{ Мэв}.$$

Для сравнения необходимо вспомнить, что энергия связи химических соединений имеет величину порядка нескольких электроновольт.

Следовательно, ядерные источники должны давать в миллионы раз больше энергии на единицу массы, чем химические источники.

Энергия связи нуклонов в ядре. Энергия связи ядра ΔE относится ко всем нуклонам ядра. Как показывает рассмотрение величины ΔE, она приблизительно пропорциональна массовому числу A: $\Delta E \approx A$. Следовательно, на каждый нуклон приходится приблизительно одна и та же энергия. Однако более точное рассмотрение показывает, что величина энергии связи одной частицы в ядре $\delta E = \frac{\Delta E}{A}$ различна в различных ядрах. На рис. 254 приведен график зависимости удельной энергии связи от массового числа. Из графика видно, что для легких и тяжелых ядер энергия связи составляет 7—7,5 *Мэв* в то время, как для средних ядер:

$$\delta E \approx 8{,}5 \text{ Мэв}.$$

Физические основы выделения ядерной энергии. Рис. 254 показывает, что наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Это означает, что превращение тяжелых или легких ядер в средние ядра является энергетически выгодным процессом. Но это превращение должно выделить огромную энергию, которую легко подсчитать, зная исходные и конечные продукты.

Кривая удельной энергии показывает, что возможны два в принципе различных способа выделения ядерной энергии: путем деления тяжелых ядер на более легкие и путем синтеза средних ядер из более легких. Оба типа реакций в настоящее время осуществлены практически для самых легких и самых тяжелых ядер (термоядерные реакции и реакции деления). Энергия, выделяемая при этом, будет определяться разностью энергий связи исходных и конечных ядер. Например, для грубой оценки энергии, которая может быть выделена при делении ядра урана, необходимо разность энергии связи нуклонов в средних ядрах и ядрах тяжелых умножить на число нуклонов в $_{92}U$, так как разность энергий связи порядка одного *Мэв*, то при делении одного ядра урана должно выделяться около 200 *Мэв* энергии.

Модели ядер. Для описания характера движения нуклонов в ядре необходимо знание аналитического выражения сил, действующих между нуклонами, общих законов движения и построение моделей ядра.

Общий характер движения нуклонов известен — это квантовые законы. Математического выражения для ядерных сил не получено, поэтому физики вынуждены строить различные модели ядер для объяснения тех или других процессов. Существуют различные модели ядер, хорошо объясняющие отдельные процессы, но пока еще не предложено единой модели.

Масса и энергия ядер. Успех различных моделей прежде всего проверялся в получении выражения для масс ядер (и их энергии). Существуют различные эмпирические выражения для точного вычисления масс ядер. Например,

$$M(A, Z) = 1{,}00898\,A - 0{,}01507\,A - 0{,}00085\,Z +$$

$$+ 0{,}014\,A^{2/3} + 0{,}083\frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + 0{,}000627\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} + \delta(A, Z),$$

где
$$\delta = \begin{cases} -0{,}036\,A^{-3/4} & \text{при } A \text{ четном, } Z \text{ — нечетном;} \\ 0 & \text{при } A \text{ нечетном, } Z \text{ — любом;} \\ +0{,}036\,A^{-3/4} & \text{при } A \text{ четном, } Z \text{ — нечетном.} \end{cases}$$

Формула дала хорошее совпадение с измеренными массами атомов при $A > 15$.

Рассмотрим соображения, которые используются при выборе членов этого выражения. Первый член совершенно очевиден, если учесть, что перед A в качестве коэффициента стоит масса нейтрона.

Второй член с A отражает энергию связи, которая пропорциональна числу нуклонов. Третий член вводит поправку к массе в силу того, что масса протона меньше массы нейтрона. Четвертый член пропорционален площади поверхности ядра $R^2 \sim A^{2/3}$. Его введение обусловлено тем, что нуклоны, лежащие на поверхности ядра, испытывают одностороннее притяжение — вглубь ядра, вследствие чего их энергия связи меньше, поэтому масса ядра должна быть увеличена пропорционально площади поверхности ядра. В модели жидкой капли эту энергию рассматривают как энергию, аналогичную поверхностной энергии капли жидкости, обусловленной тем же односторонним притяжением поверхностных нуклонов.

Пятый член отражает неравенство числа нейтронов и протонов и связан с принципом Паули. Шестой член определяет энергию кулоновского расталкивания протонов. Последний член связан с распространенностью стабильных элементов.

Если построить в координатах N, Z изоэнергетические поверхности, то они имеют вид, представленный на рис. 253. Устойчивые ядра располагаются вдоль «долин» изоэнергетических поверхностей. Ядра, попадающие на склоны, не устойчивы: те, которые попадают ближе к N, испытывают β^--распад, а ближе к Z — β^+ -распад, «скатываясь» тем самым в «долину» устойчивости.

Капельная модель. Согласно капельной модели ядро представляет собой систему, подобную жидкой капле. Это предположение основано на том, что ядерные силы короткодействующие и обладают свойством насыщения — каждый нуклон взаимодействует только с несколькими, ближайшими частицами. Это вытекает из пропорциональности $\delta E \approx A$, а не

$$\frac{A(A-1)}{2} \approx A^2,$$

как было бы, если бы каждый нуклон взаимодействовал со всеми остальными. Кроме того, δE быстро возрастает при увеличении A от 2 до 4, после чего δE меняется слабо. Успех модели жидкой капли связан с объяснением хода $\delta E(A)$ введением поверхностной энергии.

Рассмотрение ядра как капли ядерной жидкости оказывается применяемым только для возбужденных ядер. В этом случае для ядра можно ввести обычные термодинамические величины — температуру, энтропию, свободную энергию. В этом случае вылет нейтрона может ,например, трактоваться как «испарение». Модель жидкой капли хорошо объясняет основные черты ядерных реакций: захват частицы, передача ею всей своей энергии ядру в результате большого числа столкновений с хаотически движущимися нуклонами и последующий распад при флуктуации энергии на одной из частиц (испарение).

Модель оболочек. Однако капельная модель не может объяснять особой устойчивости некоторых ядер, например, таких, как

$${}_{82}Pb^{126}, \quad {}_{50}Sn, \quad {}_{20}Ca^{40}, \quad {}_{2}He^{4}, \quad {}_{8}O^{16}$$

и некоторых других. Кривая энергии связи имеет резкие изломы при числе нуклонов (протонов или нейтронов), при $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$ и $N = 2,8, 20, 126$.

Изотопы, имеющие указанное число нуклонов, имеют наибольшую относительную распространенность в земной коре, атмосфере планет, метеоритах, атмосфере Солнца.

Эти числа были названы магическими, а некоторые (2, 8, 20) — дважды магическими. При числе нуклонов 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 126 образуются наиболее устойчивые ядра. Это можно понять, если предположить, что нуклоны в ядре движутся независимо по своим орбитам. Совокупность определенного числа

нуклонов образует замкнутую оболочку. Ядра с замкнутыми оболочками будут наиболее устойчивыми подобно благородным атомам, имеющим заполненные электронные оболочки. Элементы с магическим числом нуклонов имеют близкий к нулю квадрупольный момент, что говорит о симметричности этих ядер.

Рассмотрение состояний в потенциальной яме приводит к системе уровней, аналогичных уровням атома. Согласно предположению Майер, все уровни с орбитальным моментом l расщепляются на два подуровня вследствие спин-орбитального взаимодействия. В таком случае на уровне $1s$ должно находиться не более 4 нуклонов — двух протонов и двух нейтронов с антипараллельными спинами, вследствие чего ядро $_2He^4$ имеет спин, равный нулю. Подбирая порядок уровней тонкой и грубой структуры, удалось объяснить магические числа, спин и магнитный момент большинства ядер.

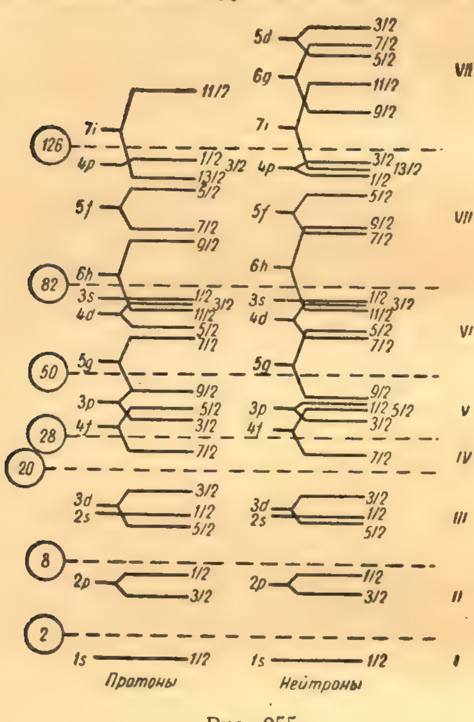


Рис. 255

Это является безусловной заслугой оболочечной модели. На рис. 255 приведены уровни протонов и нейтронов. Наличие оболочек говорит о том, что поле внутри ядра имеет характер центральной симметрии. Однако «оболочечная» модель ядра приводит к тому, что налетающий на ядро нейтрон будет двигаться по своей орбите и не должен захватываться ядром, что противоречит опытным фактам по взаимодействию частиц с ядрами.

Обобщенная (коллективная) модель ядра. Эта модель учитывает положительные черты «оболочечной» модели и капельной. В ней предполагается, что нуклоны движутся в некотором самосогласованном поле, почти не зависящем от положения отдельного нуклона внутри ядра, но резко зависящего от положения нуклона у поверхности ядра. Тем самым в «оболочечную» модель вводится состояние поверхности ядра как динамической переменной, что характерно для модели жидкой капли, поскольку деформация поверхности есть проявление коллективной формы движения. В обобщенной модели непосредственное взаимодействие нуклонов считается малым по сравнению с их взаимодействием, осуществляемым через деформацию поверхности.

Оптическая модель ядра. Недостатком обобщенной модели является то, что она приводит к монотонному изменению эффективного сечения взаимодействия нейтрона с ядром с ростом его энергии, что противоречит опытным фактам, поскольку $\sigma(E)$ зависит от A. Для объяснения этого факта вводится комплексный потенциал области ядра, что равносильно «поглощению» нейтрона ядром.

«Поглощение» означает, что налетающий на ядро нейтрон не вечно будет

двигаться по своей орбите, а в силу соударения с другими нуклонами может перейти на другую орбиту, целиком лежащую в ядре, т. е. захватывается, поглощается ядром. Так как этот процесс рассматривается наподобие поглощения света, то модель называется оптической.

§ 3. Понятие о мезонной теории ядерных сил

Гипотеза Юкавы. Для описания короткодействующего характера ядерных сил японский физик Хидеки Юкава высказал гипотезу, что носителем поля ядерных сил должна быть частица с массой покоя m_π. В таком случае простейшее уравнение для потенциала поля, связанного с ней, получится путем обычной замены классических величин E, p квантомеханическими операторами в уравнении:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_\pi^2 c^2$$

вместо p необходимо подставить $(-i\hbar\nabla)$, а вместо $E - \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$, тогда

$$-\hbar^2\Delta\varphi + \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + m_\pi^2 c^2 = 0,$$

или

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}\varphi = 0.$$

Это уравнение Клайна — Гордона переходит в обычное волновое уравнение при $m_\pi = 0$ в свободном от зарядов пространстве.

Если в пространстве имеется электрический заряд с плотностью ρ, то нуль в правой части заменяется на $4\pi\rho$. В данном случае для характеристики взаимодействия нуклона с мезонным полем вводится нуклонный заряд g. Для точечного заряда g плотность нуклонного заряда равна $g\delta(\mathbf{r})$. В таком случае:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} - \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}\varphi = 4\pi g\delta(\mathbf{r}).$$

Для стационарного случая

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta\varphi - \left(\frac{m_\pi c}{\hbar}\right)^2\varphi = 4\pi g\delta(\mathbf{r}).$$

Это уравнение имеет решение:

$$\varphi = -\frac{g e^{-\frac{r}{R}}}{r}, \quad \text{где } R = \frac{\hbar}{m_\pi c}.$$

Величина φ носит название потенциала Юкавы. При малых r φ велико по модулю, но с ростом r уменьшается по экспоненциальному закону. Следовательно, φ будет играть существенную роль на расстояниях $r \leqslant R$, т. е. R является величиной, характеризующей область действия ядерных сил. Из выражений видно, что R равно комптоновской длине мезона:

$$R = \lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{m_\pi c}.$$

Зная, что $R \approx 1{,}5 \cdot 10^{-13}$, можно оценить массу мезона:

$$\frac{m_\pi}{m_0} \approx \frac{\hbar}{m_0 Rc} \sim \frac{1 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} 1{,}5 \cdot 10^{-13} 3 \cdot 10^{10}} \sim 250.$$

Опыт показал, что существуют π-мезоны с массой $m_\pi \approx 270\ m_0$, которые активно взаимодействуют с ядрами.

Варианты теории. Короткодействующий характер ядерных сил и зарядовая независимость передаются потенциалом Юкавы. Однако ядерные силы обладают целым рядом других свойств, которые не передаются этим выражением.

При сближении центров ядер до расстояний, меньших, чем сумма их радиусов, между ними начинают действовать мощные силы отталкивания, препятствующие их взаимному прохождению сквозь друг друга.

Ядерные силы обладают свойством насыщения. Они зависят от ориентации спина, имеют нецентральный характер и некоторые другие свойства. Чтобы учесть эти свойства ядерных сил, были предположены различные варианты теории ядерных сил — псевдоскалярный, векторный, псевдовекторный, тензорный. Однако каждый из вариантов имеет лишь преимущество в объяснении одной из сторон ядерных сил.

Удовлетворительной единой теории еще не существует. Наиболее приемлемой является псевдоскалярный вариант с псевдовекторной связью с уравнением:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}\varphi = 4\pi\frac{g\hbar}{m_\pi c}\nabla(S\varphi),$$

где S — вектор спина.

§ 4. Прохождения тяжелых частиц через вещество

Соотношение между пробегом и энергией. Тяжелые заряженные частицы теряют энергию при прохождении через вещество в основном за счет неупругих столкновений с электронами атомов. Так как на отрыв электрона затрачивается энергия, а концентрация атомов велика, то потеря энергии происходит практически непрерывно. Путь, проходимый частицей в данном веществе, называется пробегом R.

Пробег должен зависеть, очевидно, от вещества (Z — заряда ядра и M — массы атома), от заряда Z_μ и массы μ движущейся частицы и от ее энергии E. Соотношение между пробегом и энергией получено как теоретически, так и экспериментально. Пробег протона R_H в воздухе можно описать соотношением:

$$R_H = \left(\frac{E}{9{,}3}\right)^{1,8},$$

где R в *м*, E — в *Мэв*. Эта формула справедлива для интервала энергии протона от нескольких *Мэв* до 200 *Мэв*. Соотношение показывает, что пробег протона в воздухе пропорционален его скорости в степени 3,6. Для α-частиц, испускаемых естественно-радиоактивными элементами $R_\alpha \approx E^{3/2}$, или $R_\alpha \approx v^3$. В таблице (стр. 429) дана зависимость R_α от энергии. Если известен пробег протонов R_H, то пробег других тяжелых частиц R_μ может быть подсчитан на основании соотношений:

$$R_\mu(E) = \frac{\mu}{M_H} R_H\left(\frac{M_H E}{\mu}\right)\left(\frac{Z_\mu}{Z_H}\right)^2,$$

где M_H — масса протона,

μ — масса тяжелой частицы (α-частицы, дейтона, мезона),

Z_μ — заряд частицы,

Z_H — заряд протона.

Таблица

Зависимость пробега α-частиц R_α в воздухе, биологической ткани и алюминии

Энергия α-частиц, *Мэв*	Воздух, *см*	Биологическая ткань, *мк*	Алюминий, *мк*
4,0	2,5	31	16
4,5	3,0	37	20
5,0	3,5	43	23
5,5	4,0	49	26
6,0	4,6	56	30
6,5	5,2	64	34
7,0	5,9	72	38
7,5	6,6	81	43
8,0	7,4	91	48
8,5	8,1	100	53
9,0	8,9	110	58
9,5	9,8	120	64
10	10,6	130	69

Например, связь между пробегом α-частиц и протона имеет вид:

$$R_H(E) = 1{,}007\, R_\alpha\, (3{,}912\, E),$$

т. е. пробег протона с энергией, например, 10 *Мэв* приблизительно равен пробегу α-частицы с энергией 39 *Мэв*.

Пробег тяжелых заряженных частиц в других веществах можно получить из экспериментальных данных, с помощью номограммы Вильсона (рис. 256), где по левой шкале отложен пробег в *г/см*², по средней шкале — энергия, по правым шкалам — заряд ядра вещества, через которое проходит частица и масса летящей частицы.

Соответствующие пробег, энергия и атомный номер лежат на одной прямой. Чтобы найти энергию протона с пробегом в 2 *г/см*² в свинце, необходимо точку 2 левой шкалы соединить прямой линией с точкой $Z = 82$ шкалы p. Эта прямая пересекает кривую энергии для p в точке 29 *Мэв*. Зная пробег частиц в *г/см*², легко можно вычислить пробег в данном веществе в *см*. Переход между ними осуществляется простым делением на плотность ρ *г/см*³:

$$[R]\ см = \frac{[R]\ г/см^2}{[\rho]\ г/см^3}.$$

Пробег в 1 *г/см*² означает прохождение слоя толщиной, равной $\frac{1}{\rho}$, т. е. слоя, который образуется при равномерном распределении 1 *г* вещества на площадке в 1 *см*².

На рис. 257 и 258 дано соотношение между пробегом и энергией протонов в алюминии, и на рис. 259 — в меди.

Ионизационная способность. Чем больше ионов образует частица на единице пути, тем больше энергии она при этом потеряет. Поэтому потеря энергии на единице пути — $\frac{dE}{dx}$ характеризует ионизирующую способ-

ность частицы. Зная эту величину и среднюю энергию на создание одной пары ионов, можно подсчитать число ионов, создаваемых частицей на единице пути.

На рис. 260 дана зависимость ионизации α-частицей от $(R_\alpha - x)$, где R_α — пробег, $(R_\alpha - x)$ — остаточный пробег, x — пройденный путь. Кривая

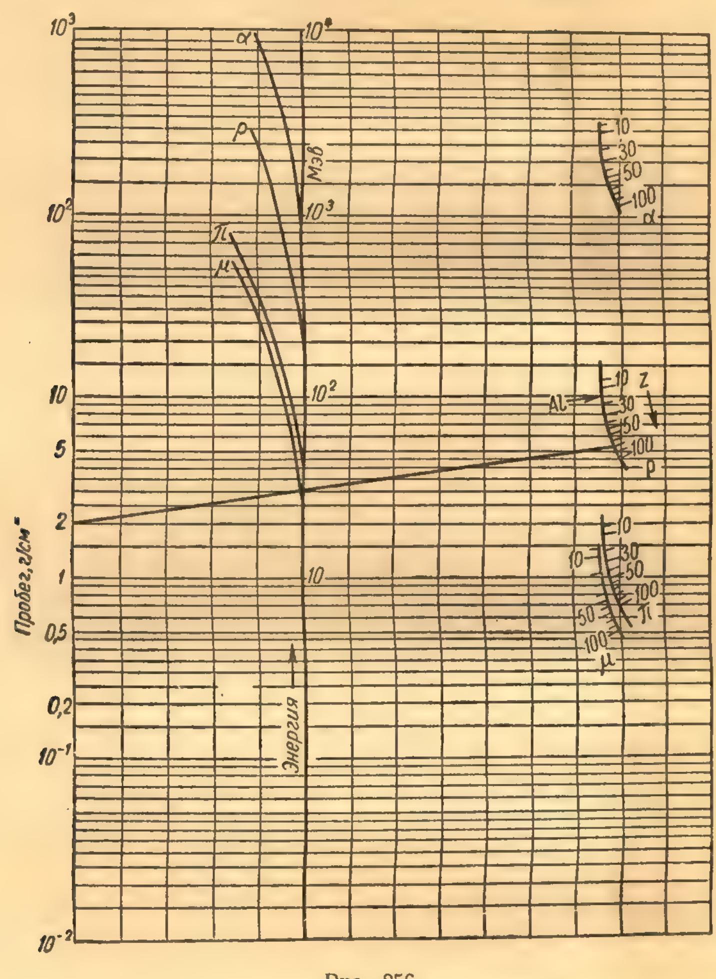


Рис. 256

ясно показывает, что при приближении величины пройденного пути к величине пробега ($x \to R_\alpha$) ионизирующая способность α-частицы заметно возрастает. Это связано с тем, что скорость частицы стала небольшой и вероятность ионизации возрастает, так как α-частица бо́льшее время проводит вблизи данного атома. Резкий спад ионизирующей способности в самом конце пути связан с тем, что α-частица потеряла всю свою энергию.

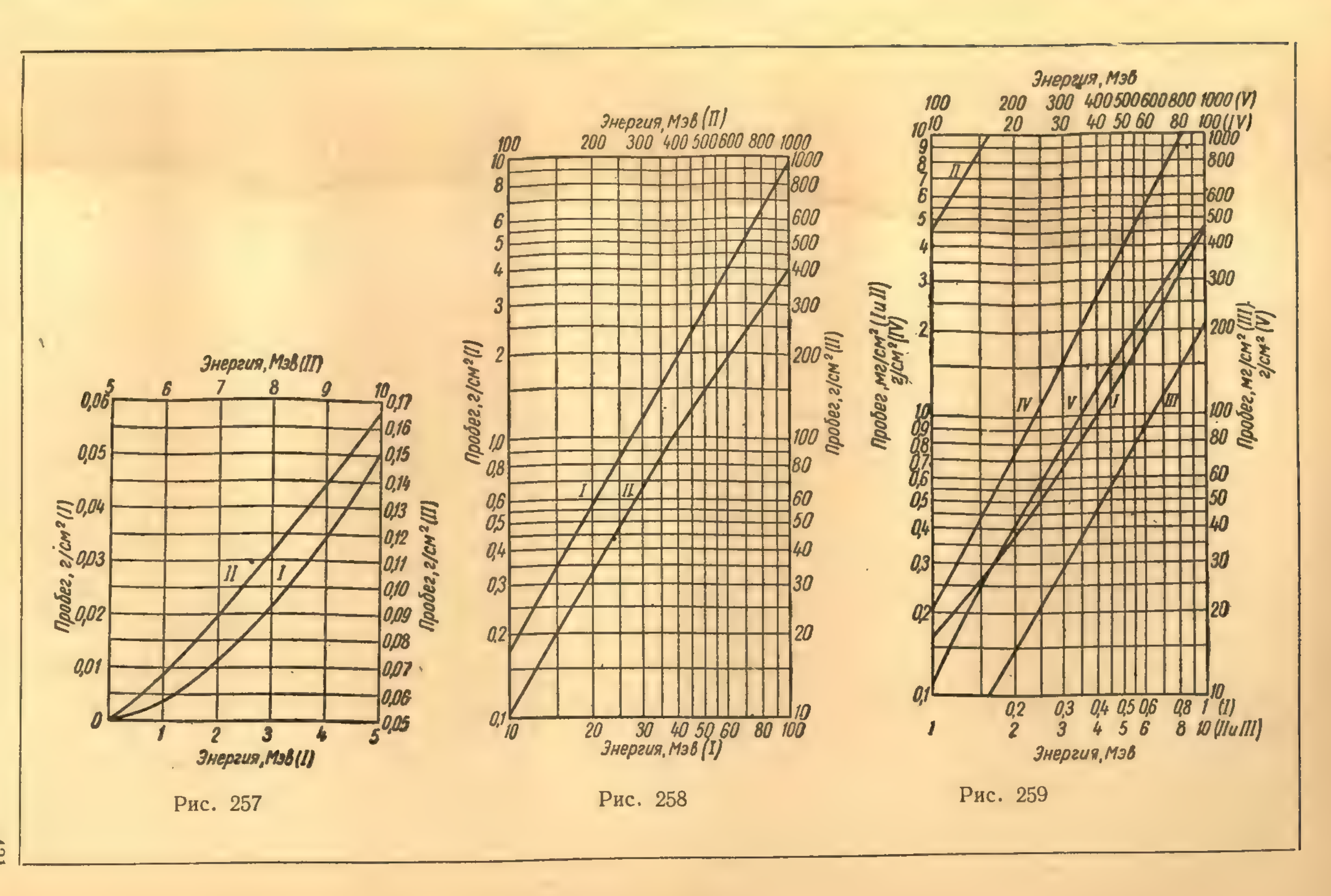


Рис. 257

Рис. 258

Рис. 259

δ-лучи. При прохождении заряженной частицы через вещество они способны оторвать электрон и сообщить ему большую энергию, достаточную для вторичной ионизации. Такие электроны оставляют короткие следы и носят название δ-электронов или δ-лучей. Энергия δ-электрона:

$$W = 2mv^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где v — скорость падающей частицы,
m — масса электрона, или

$$W = 4 \frac{m}{M} E \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \text{где } E = \frac{Mv^2}{2}.$$

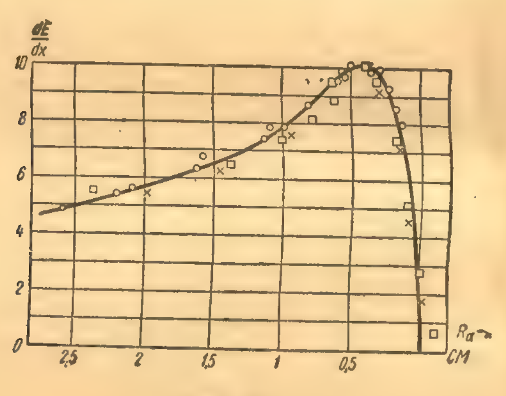


Рис. 260

Угол вылета электрона в лабораторной системе координат определяется углом $\varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$. Электрон имеет максимальную энергию при $\varphi = 0$, т. е. когда он выбивается вперед.

Число δ электронов с энергией $W_{кэв}$, $W_{кэв} + dW_{кэв}$ в воздухе на единице пути при 15° С и 760 *мм рт. ст.*, образуемое протонами, равно

$$dN = \frac{0{,}091}{\left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{dW_{кэв}}{W_{кэв}^2}.$$

Наблюдение числа δ-электронов на единице пути широко используется для определения заряда тяжелых частиц космического излучения.

Осколки деления. Осколки деления, имея большой заряд, производят ионизацию вещества в значительно большей степени, чем легкие частицы (α, протоны и др.). Это приводит к более быстрому расходу энергии. Отличительной особенностью движения осколков деления является то, что они по мере уменьшения своей энергии захватывают электроны, уменьшая свой заряд. Второй особенностью является то, что вдоль следа образуется большое число коротких следов ядер отдачи и след имеет значительную кривизну, что объясняется накоплением большого числа малых отклонений, обусловленных столкновениями с ядрами.

§ 5. Прохождение β-излучения через вещество

Потери энергии. Механизм потери энергии электронами существенно зависит от ее величины. При малой энергии потери энергии обусловлены ионизацией вещества. Однако при больших энергиях основным механизмом является тормозное излучение. При прохождении вблизи ядра электрон испытывает большое ускорение a, и согласно классической электродинамике, он должен излучать энергию $\frac{2e^2}{3c^3}a^2$ в единицу времени. Потери тяжелых частиц на излучение в $\left(\frac{m}{M}\right)^{-2}$ раз меньше, т. е. практически не играют никакой роли даже для протонов.

Достаточно точных теоретических выражений для зависимостей пробега от энергии нет, и поэтому пользуются только экспериментально полученными данными.

Радиационные потери приводят к появлению γ-кванта с энергией $h\nu$ с непрерывным спектром с максимальной частотой ν_0, определяемой из соотношения:

$$h\nu_0 = E_0 - mc^2,$$

где E_0 — энергия падающего электрона.

Вероятность излучения существенно зависит от эффективного расстояния до ядра, так как при малом расстоянии ускорение электрона будет определяться зарядом ядра, а при большом расстоянии будет сказываться экранировка ядра электронами атома. Однако в любом случае вероятность излучения пропорциональна Z^2.

Расстояние x_0, на котором энергия электрона уменьшается в e раз в результате излучения, называется радиационной длиной. В таком случае

$$-\frac{1}{E_0}\left(\frac{dE_0}{dx}\right)_{\text{рад}} = \frac{1}{x_0}(1+b),$$

где $b \ll 1$.

Потери энергии на излучение растут пропорционально энергии и Z^2, тогда как потери на ионизацию зависят от энергии логарифмически и пропорциональны Z вещества. Радиационная длина (в $г/см^2$) для различных веществ различна и, например, равна 58 для водорода, 36,5 — для воздуха, 5,8 — для свинца, 23,9 — для алюминия (x_0 получается из радиационной длины в $г/см^2$ путем деления на плотности ρ).

Образование ливней. Спектр излучения электрона характеризуется равномерным распределением по энергиям, следовательно, возможно возникновение фотонов с энергией, сравнимой с энергией электрона. Это может привести к появлению фотоэлектронов или рождению пары, которые в свою очередь порождают фотоны и т. д. В веществе в таком случае может развиться каскадный ливень. Чем легче частица, тем более вероятно для нее образование ливня при той же энергии.

Образование пар. Электрон может образовать пару электрон-позитрон в кулоновском поле электрона.

Вторичные электроны. Вторичные электроны возникают в результате прямого соударения электронов, и фото- или комптон-эффекта с фотонами, испущенными первичным электроном. Непосредственное столкновение электронов должно иметь одно очень интересное свойство: если β-частицы тождественны с атомными электронами, то должно возникать,

помимо обычного классического взаимодействия, обменное взаимодействие, в результате чего в сечении рассеяния должны появиться члены, зависящие симметричным образом от энергии «первичного» и «вторичного» электронов. Пейдж и другие ученые нашли, что при взаимодействии β-частиц с атомными электронами возникают обменные эффекты, что служит ярким доказательством тождественности β-частиц и электронов атома.

Рис. 261

Дифракционное рассеяние на ядрах. При увеличении энергии электронов длина волны де Бройля уменьшается, в результате чего фазы волны рассеянных различными частями ядра, будут различны, что приводит к появлению дифракционных явлений, которые используются для изучения структуры ядра. Например, при рассеянии электронов с энергией 16,5 *Мэв* $\frac{\lambda}{2\pi} = 1{,}25 \times 10^{-12}$ *см* можно оценить радиус ядра. Лайман нашел, что $R \sim 1{,}48 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ *см*.

Прохождение через вещество. Строгой теории прохождения электронов через толстые слои не существует. Качественно механизм ослабления можно описать следующим образом. В первые моменты, пока энергия электрона велика, он движется прямолинейно. Интенсивность электронного пучка будет уменьшаться в основном в результате радиационных потерь энергии электронами и, следовательно, число электронов в пучке будет уменьшаться приблизительно по экспоненциальному закону.

С уменьшением энергии начнут играть роль потери на ионизацию и многократное рассеяние, что приведет пучок к расплыванию, к рассеянию. При потере большей части энергии направленное движение электронов переходит в диффузное.

Если пропускать электроны через фольгу различной толщины, то:

1) интенсивность пучка будет ослабевать при любой толщине фольги, тогда как для тяжелых частиц число частиц в пучке остается неизменным, если толщина фольги меньше пробега частиц в данном веществе;

2) максимальная толщина фольги, при которой практически ни один электрон не прошел через нее, определяет эффективный пробег электронов в данном веществе. Однако эта величина очень неопределенная, поэтому измерения проводят по обычной кривой поглощения. За слоем вещества с меняющейся толщиной располагается ионизационная камера, которая позволяет снимать зависимость интенсивности β-лучей от толщины. Кривые имеют резкий спад, заметный прямолинейный участок и пологий «хвост». За величину эффективного пробега принимается точка пересечения прямолинейного участка с осью абсцисс (экстраполированный пробег).

Для алюминия связь экстраполированного пробега с энергией задается выражением:

$$R\ (г/см^2) = 0{,}526\ E\ (Мэв) - 0{,}094.$$

На рис. 261 приведены кривые поглощения в алюминии (R от ρH или E).

Для оценки энергии электронов в β-распаде пользуются соотношением Фезера:

$$R\ (г/см^2) = 0{,}542\ E\ (Мэв) - 0{,}133,$$

$$0{,}8\ Мэв < E < 3\ Мэв$$

и

$$R = 0{,}407\,E^{1,38}\,(0{,}15 < E\ Мэв < 0{,}8).$$

Используя соотношение $R(E)$, можно по пробегу найти энергию электронов. Наиболее точное измерение энергии проводится при исследовании движения электронов в магнитных полях (β-спектрометры), в которых по радиусу кривизны непосредственно определяется энергия. В таблице на стр. 436 дана зависимость пробега β-частиц от их энергии в трех веществах.

§ 6. Прохождение γ-излучения через вещество

Отличительной особенностью прохождения γ-лучей через вещество является постепенный спад их интенсивности. Это связано с тем, что при взаимодействии γ-квантов с веществом они удаляются из пучка в результате поглощения или рассеяния. Но число таких актов пропорционально толщине dx;

$$-dI = N\sigma\,dx,$$

где N — концентрация атомов вещества,

σ — поперечник эффективного сечения поглощения и рассеяния. Тогда

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

где $\mu = N\sigma$ — коэффициент ослабления пучка γ-лучей. $\frac{1}{\mu}$ численно равно толщине слоя, по прохождении которой интенсивность γ-лучей уменьшается в e раз; μ зависит от энергии фотонов (длины волны) и атомного номера поглощающего вещества.

Толщина половинного поглощения ($d_{1/2}$). Для целого ряда расчетов вместо $I = I_0 e^{-\mu x}$ удобно пользоваться понятием толщины половинного ослабления — $d_{1/2}$, которое определяется следующим образом: при прохождении $d_{1/2}$ интенсивность I уменьшается в 2 раза, т. е. $I = I_0/2$ при $x = d_{1/2}$. Связь между линейным коэффициентом ослабления и толщиной половинного ослабления:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu d_{1/2}},$$

откуда

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}; \qquad \mu = \frac{\ln 2}{d_{1/2}}.$$

В таком случае

$$I = I_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot x}{d_{1/2}}} = \frac{I_0}{2^{\frac{x}{2d_{1/2}}}} = \frac{I_0}{2^n},$$

Таблица

Зависимость максимального пробега β-частиц R_β от энергии в алюминии, биологической ткани (или воде) и воздухе

Энергия β-частиц E_β, *Мэв*	Алюминий, *мг/см²*	Алюминий, *мм*	Ткань, или вода, *мм*	Воздух, *см*
0,01	0,16	0,0006	0,002	0,13
0,02	0,70	0,0026	0,008	0,52
0,03	1,50	0,0056	0,018	1,12
0,04	2,60	0,0096	0,030	1,94
0,05	3,90	0,0144	0,046	2,91
0,06	5,40	0,0200	0,063	4,03
0,07	7,10	0,0263	0,083	5,29
0,08	9,30	0,0344	0,109	6,93
0,09	11,00	0,0407	0,129	8,20
0,1	14	0,050	0,158	10,1
0,2	42	0,155	0,491	31,3
0,3	76	0,281	0,889	56,7
0,4	115	0,426	0,35	85,7
0,5	160	0,593	1,87	119
0,6	220	0,778	2,46	157
0,7	250	0,926	2,92	186
0,8	310	0,15	3,63	231
0,9	350	1,30	4,10	261
1,0	410	1,52	4,80	306
1,25	540	2,02	6,32	406
1,50	670	2,47	7,80	494
1,75	800	3,01	9,50	610
2,0	950	3,51	11,1	710
2,5	1220	4,52	14,3	910
3,0	1500	5,50	17,4	1100
3,5	1750	6,48	20,4	1300
4,0	2000	7,46	23,6	1500
4,5	2280	8,44	26,7	1700
5	2540	9,42	29,8	1900
6	3080	11,4	36,0	2300
7	3600	13,3	42,0	2700
8	4100	15,3	48,4	3100
9	4650	17,3	54,6	3500
10	5200	19,2	60,8	3900
20	10500	39,0	123	7800

где $n = \frac{x}{d_{1/2}}$ — число слоев половинной толщины. На рис. 262 показана кривая ослабления γ-лучей. Величина $d_{1/2}$ зависит от материала и длины волны.

Механизм ослабления γ-лучей. Ослабление γ-лучей обусловлено поглощением и рассеиванием. При поглощении γ-фотоны исчезают, при этом в веществе возникают быстрые частицы, получившие энергию γ-кванта. При рассеивании γ-лучей появляются быстрые частицы, получившие часть энергии фотона. Фотон с уменьшенной энергией изменяет на-

правление своего движения, тем самым он выводится из состава пучка. Различают следующие основные процессы ослабления γ-лучей, возникающие в результате взаимодействия γ-лучей с веществом:

1) фотоэффект; 2) комптон-эффект; 3) рождение пар (позитрон — электрон);

$$\mu = \mu_ф + \mu_к + \mu_п,$$

где $\mu_ф$, $\mu_к$ и $\mu_п$ — коэффициенты ослабления, обусловленные фотоэффектом, комптон-эффектом и рождением пары.

Ф о т о э ф ф е к т. При фотоэффекте γ-квант исчезает, полностью передавая свою энергию и импульс электрону и атому. В веществе появляются быстрые электроны, приводящие в свою очередь к ионизации атомов вещества. В живых тканях они приводят к разрушению клеток. Фотоэффект играет основную роль в ослаблении γ-лучей при малой энергии ($\lesssim 1$ *Мэв*).

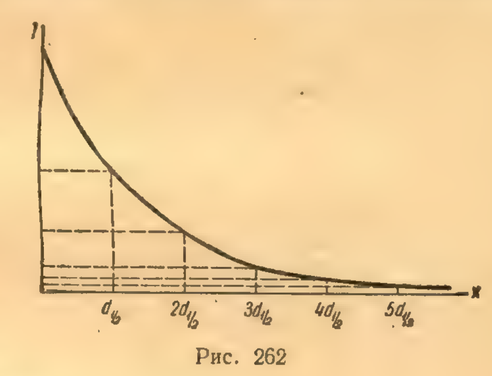


Рис. 262

Кинетическая энергия, которую получает электрон:

$$T = h\nu - I,$$

где I — энергия ионизации той оболочки, на которой находится электрон. Так как должен выполняться и закон сохранения импульса, то

$$\frac{h\nu}{c} = \mathbf{p} + \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P}$ — импульс, получаемый атомом. Это вытекает из того, что импульс фотона всегда больше импульса фотоэлектрона, действительно, считая, что фотон движется вдоль оси x и $\mathbf{P} = 0$, получим:

$$p = \frac{h\nu}{c}; \quad pc = h\nu = T + I < T,$$

но T всегда меньше $pc = h\nu$. Это означает, что избыток импульса атом принимает на себя, вместе с ним и часть энергии фотона, так что более точно

$$T = h\nu - I - \frac{\mathbf{P}^2}{2M}.$$

Фотоэффект наиболее вероятен в том случае, когда энергия фотона близка к энергии ионизации I. Именно поэтому ослабление лучей вследствие фотоэлектрического поглощения играет основную роль при малых энергиях фотонов (< 1 *Мэв*).

Вероятность фотоэлектрического поглощения K-оболочки прямо пропорциональна Z^5 и $\nu^{3,5}$.

Эксперимент дает зависимость $\sigma_ф(Z)$ в виде

$$\sigma_ф = kZ^n; \quad \text{где } n = 4{,}6 \pm 0{,}25.$$

Зависимость снималась при постоянной энергии $E = 2{,}6$ *Мэв*. При $h\nu \gg mc^2$ зависимость σ_ϕ от ν более слабая, а именно,

$$\sigma_\Phi \sim \frac{1}{\nu};$$

$$\sigma_\Phi = \sigma_0 \frac{3}{2} \frac{Z^5}{137^4} \frac{mc^2}{h\nu}.$$

Поэтому для тяжелых элементов фотоэффект будет играть заметную роль и при больших энергиях фотонов, например в Pb при 5 *Мэв* σ_ϕ сравнима с σ других процессов.

Сечение поглощения электронами других оболочек в несколько раз меньше, например

$$\frac{\sigma_\Phi^k}{\sigma_\Phi^L} \approx 5.$$

§ 7. Комптоновское рассеяние

Явление Комптона. Явление Комптона является одним из наиболее убедительных доказательств фотонной, корпускулярной природы излучения (света). Оно состоит в следующем. Если на некоторое вещество падает монохроматическое излучение с длиной волны λ, то вещество, рассеивая свет, приводит к появлению излучения так же и другой длины волны λ', что обнаруживается, например, рентгеновским спектрографом, при этом:

а) λ' всегда больше $\lambda : \lambda' > \lambda$;

б) смещение $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0{,}048 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ Å

зависит от угла рассеяния φ (угол между направлениями падающего и рассеянного лучей);

в) смещение не зависит от длины волны падающего излучения;

г) смещение не зависит от вида рассеивающего вещества;

д) с ростом угла рассеяния отношение интенсивности комптоновской линии λ' к интенсивности релеевской λ возрастает;

е) с ростом Z рассеивателя отношение $I(\lambda')/I(\lambda)$ уменьшается.

Волновая теория позволяет объяснить комптон-эффект только в предположении, что законы сохранения энергии и импульса в элементарных актах не выполняются, а выполняются лишь в среднем статистически (статистическая теория Бора — Краммерса — Слэтери), процесс поглощения энергии световых волн происходит непрерывно, а вылет электронов случаен. Однако это предположение, помимо методологических соображений, противоречит опытным фактам, подтверждающим справедливость законов сохранения при элементарных актах.

В фотонной теории явление Комптона объясняется в результате применения законов сохранения энергии и импульса к процессу взаимодействия излучения с электронами, которое рассматривается как упругое столкновение фотона с электроном. Так как комптоновское рассеяние наблюдается для длин волн $\lambda < 1$Å, что соответствует энергии фотонов в несколько тысяч *эв* и больше, то в первом приближении можно пренебречь энергией связи электрона в атоме и его кинетической энергией. В таком случае явление моделируется «ударом» фотона по покоящемуся «свободному» электрону (рис. 263), в результате чего фотон отклоняется на угол φ с уменьшенной энергией (с увеличенной длиной волны), а электрон выбрасывается под углом ψ.

Закон сохранения:

а) энергии $h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2$;

б) импульса $\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} + mv$.

Из треугольника (рис. 263) по теореме косинусов можно записать:

$$(mvc)^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' \cos\varphi.$$

Записав $mc^2 = h(\nu - \nu') + m_0 c^2$ и возведя обе части равенства в квадрат, после алгебраических преобразований можно получить:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi) = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\varphi/2.$$

Величина $\frac{h}{m_0 c} = \Lambda = 0{,}0242\,\mathring{A}$ называется комптоновской длиной волны электрона. Полученное выражение полностью объясняет экспериментальные факты, перечисленные в пунктах а, б, в. Взаимодействие фотона со «свободным» электроном объясняет независимость смещения от вида вещества.

Наличие несмещенной линии можно объяснить «соударением» фотона с атомом в целом. Так как масса фотона значительно меньше массы атома, то при соударении фотон практически не изменяет своей энергии (при упругом ударе легкого мяча о тяжелый вагон мяч практически не передает вагону свою энергию).

Рис. 263

Кинетическая энергия, которую получает электрон, равна уменьшению энергии фотона:

$$T = h(\nu - \nu') = h\nu \frac{2\Lambda \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda + 2\Lambda\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Электрон получает тем большую энергию, чем больше угол рассеяния фотона φ.

Максимальную энергию он получает когда фотон «отскакивает» обратно ($\varphi = \pi$). Доля передаваемой энергии, т. е. $T/(h\nu)$, при данном значении угла φ зависит от самой энергии — с ростом энергии $h\nu$ отношение $T/h\nu \to 1$. Но при малой энергии фотона энергия комптоновских электронов — электронов отдачи — мала — это позволяет отличать комптоновские электроны от фотоэлектронов.

Проблема защиты от γ-излучения. Для фотонов с энергией в несколько *Мэв* основной вклад в ослабление пучка вносит комптоновское рассеяние. Но комптоновское рассеяние *не уменьшает* числа фотонов, а лишь приводит к уменьшению их энергии и пространственному перераспределению. Однако в результате многократного рассеяния даже на небольшие углы энергия фотонов уменьшается заметно, вследствие чего увеличивается фотоэлектрическое поглощение γ-квантов. Расчет показывает, что пропускание защиты реактора $\frac{I}{I_0} = T$ может быть записано в виде:

$$T = Be^{-\mu_0 x},$$

где x — толщина, а μ_0 — наименьший коэффициент поглощения, т. е. коэффициент поглощения падающего γ-излучения, если $h\nu < h\nu_{min}$, где $h\nu_{min}$ соответствует фотонам с минимальным полным поглощением, или полный коэффициент при $h\nu_{min}$, если $h\nu > h\nu_{min}$.

Коэффициент B имеет величину между 1 и $(\mu_0 x)^2$, если $h\nu < h\nu_{min}$.

§ 8. Образование пар. Другие процессы ослабления γ-лучей

Условия, необходимые для рождения пар. Рождение пары представляет собой процесс превращения γ-фотона в две элементарные частицы — электрон и позитрон. Процесс возможен в том случае, когда масса фотона $m_ф$ будет не меньше суммы масс покоя электрона m_- и позитрона m_+:

$$m_ф \geqslant m_- + m_+,$$

или энергетическое условие

$$h\nu \geqslant 2m_0 c^2 = 2 \cdot 0{,}511 \ Мэв = 1{,}022 \ Мэв,$$

т. е. пару электрон-позитрон может образовать γ-фотон с энергией не меньше 1,022 *Мэв* $\left(\lambda \leqslant 0{,}01 \ \mathring{A}, \ \nu \approx 3 \cdot 10^{20} \ сек^{-1}\right)$. Однако помимо закона сохранения энергии, должен выполняться закон сохранения импульса. Но импульсы пары всегда меньше импульса фотона. Отношение импульсов:

$$\frac{2p}{\frac{h\nu}{c}} \approx \frac{2mv}{\frac{h\nu \cdot c}{c^2}} = \frac{2mv}{2mc} = \beta < 1,$$

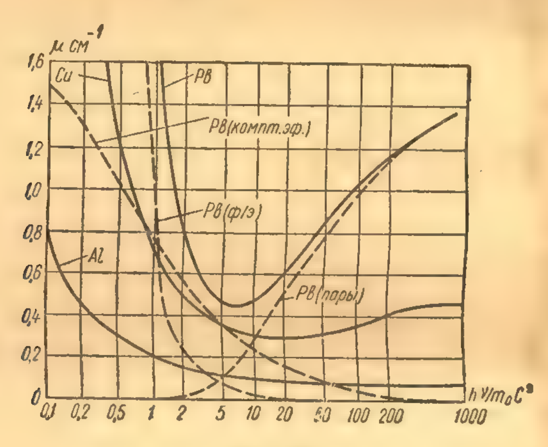


Рис. 264

так как скорости v электронов и позитрона не могут быть равны c. Следовательно, процесс возможен только в том случае, если в нем будет участвовать, по крайней мере, еще одна частица, которая принимает на себя избыток импульса, поэтому образование пары происходит обычно в поле тяжелого ядра, вследствие чего граничное условие $h\nu = 2m_0 c^2$ практически не нарушается $\left(\text{с точностью до } \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2}, \text{ где } M \text{ — масса ядра}\right)$.

Образование пар в поле электрона. γ-фотон может образовать пару электрон — позитрон и в поле электрона. В этом случае должно быть $h\nu > 2m_0c^2$, так как электрон, принимая импульс, уносит заметную энергию, в результате чего на снимках виден триплет, образованный двумя электронами и одним позитроном. Отношение сечений для образования триплетов и пар равно:

$$\frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{пар}} = \frac{1}{CZ}, \quad \text{где } C \approx 4.$$

Угловое распределение компонент пары. Опыт показывает, что компоненты пары вылетают вперед в небольшом угловом интервале. Для среднего угла между направлениями движения электрона и позитрона можно записать:

$$\theta_0 = 2\frac{m_0}{m} = 2\frac{E_0}{E},$$

где E_0, E — энергия покоя и полная энергия электрона (позитрона).

Полное сечение ослабления пучка γ-квантов. Полное сечение ослабления складывается из сечения фотоэффекта $\sigma_ф$, комптон-эффекта $\sigma_к$ и образования пар $\sigma_п$:

$$\sigma = \sigma_ф + \sigma_к + \sigma_п.$$

Полное сечение оказывается сложной функцией $h\nu$ и Z. Но для данного Z σ с ростом $h\nu$ уменьшается, проходит через минимум, затем увеличивается, асимптотически приближаясь к $\sigma_п$ (рис. 264).

В настоящее время имеется большой экспериментальный материал, дающий связь величины $\mu = N\sigma$ с энергией. Это позволяет определять энергию γ-квантов по коэффициенту ослабления μ.

Ядерный фотоэффект. Ядро, поглотившее γ-фотон, переходит в возбужденное состояние, в результате чего оно может выбросить нуклон, чаще всего нейтрон. Характерными чертами ядерного фотоэффекта является наличие пороговой энергии $h\nu_{пор}$: фотоэффект наблюдается при $h\nu > h\nu_{пор}$ — и широкого (в несколько *Мэв*) резонансного пика.

Интегральное сечение по всем энергиям пропорционально массовому числу ядра:

$$\int \sigma(E)\, dE = B \cdot 10^{-26} A \text{ Мэв см}^2,$$

где $B = (1{,}5 \div 3)$ в зависимости от ядра. Это дает при ширине максимума в 5—10 *Мэв*:

$$\mu \approx 0{,}001 \div 0{,}004 \text{ см}^2/г.$$

Томсоновское и комптоновское рассеяния на ядре имеют сечения соответственно:

$$\sigma_{томс} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{M_p c^2}\right)^2 \frac{Z^4}{A^2} = 2 \cdot 10^{-31} \frac{Z^4}{A^2} \text{ см}^2;$$

$$\sigma_{комп} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e}{M_p c^2}\right)^2 Z \text{ — для одного нуклона,}$$

где M_p — масса протона.

Экспериментально оба эффекта практически не промеряются.

Образование мезонов. При энергиях больше 140 *Мэв* γ-фотоны образуют мезоны. Сечение этого процесса для $h\nu \sim 300$ *Мэв* равно $10^{-28} A$ *см*^{2}, что соответствует коэффициенту поглощения 10^{-4} *см*^{2}/*г*. Несмотря на столь малый коэффициент поглощения γ-лучей, мезоны легко наблюдаются.

§ 9. Эффект Мёссбауэра

В 1958 г. немецкий физик Рудольф Мёссбауэр открыл, что при некоторых условиях линии поглощения и испускания γ-лучей совпадают по частоте. При этом резонанс настолько резкий, что например, ничтожные магнитные поля, движение источника или приемника со скоростями в несколько *см/сек*, движение фотона в поле тяготения Земли способно полностью уничтожить резонансное поглощение,

В обычных условиях γ-квант, испущенный покоившимся ядром при переходе из возбужденного состояния в нормальное, не может быть захвачен покоящимся ядром, находящимся в нормальном состоянии. Это связано с тем, что энергии фотона недостаточно для перевода ядра в то же самое возбужденное состояние. Действительно, если возбужденное состояние отличается от нормального на величину энергии ΔE, то энергия излученного фотона будет меньше ΔE в силу явления отдачи — фотон уносит импульс $\frac{h\nu}{c}$, следовательно, таким же должен быть импульс отдачи, но при отдаче ядро должно получить и соответствующую кинетическую энергию:

$$p = \frac{h\nu}{c}; \quad T = \frac{p^2}{2M} = \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2}; \; T + h\nu = \Delta E,$$

откуда

$$h\nu = \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2Mc^2}.$$

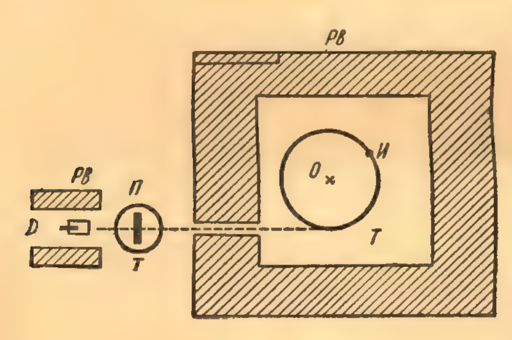


Рис. 265

Ядро может поглотить фотон, который будет иметь энергию

$$h\nu = \Delta E + \frac{\Delta E^2}{2Mc^2},$$

поскольку $\frac{\Delta E^2}{2Mc^2}$ пойдет на сообщение кинетической энергии ядру, поглотившему фотон.

Но эффект Мёссбауэра именно в том и состоит, что в некоторых случаях *энергия фотона равна изменению внутриядерной энергии*: $h\nu = \Delta E$.

Это можно легко понять, если предположить, что при излучении фотона импульс отдачи для некоторых ядер передается кристаллической решетке в целом посредством внутрикристаллических сил. Тогда M — это масса всего кристалла, и

$$\frac{\Delta E^2}{2Mc^2} \simeq 0,$$

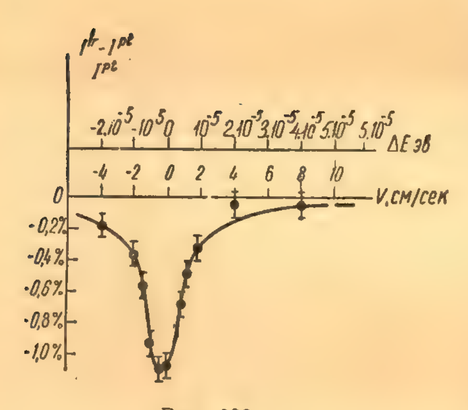


Рис. 266

т. е. отдачи нет, — это квантовый подход к явлению. Но возможно и классическое объяснение: излучающее ядро колеблется, в результате Доплер-эффекта частота излучения модулируется, вследствие чего в спектре излучения возникают несмещенные частоты, определяемые соотношением $h\nu = \Delta E$.

Расчеты для интенсивности по квантовой и классической теориям совпадают.

На рис. 265 представлена схема наблюдения. На платформе, вращающейся вокруг центра О, расположен иридиевый Ir^{191} источник γ-лучей с энер-

гией фотона 129 *кэв*. Свинцовая защита Pb позволяет выделять узкий параллельный пучок γ-лучей, которые регистрируются детектором D. На пути γ-лучей располагается поглотитель $П$. В качестве поглотителя используется иридий, а для сравнения он заменяется платиновой пластиной такой же толщины. Для уменьшения теплового колебания ядер излучатель и поглотитель помещаются в термостат ($T = 88°$ K). На рис. 266 представлено изменение относительной интенсивности γ-лучей, измеряемой детектором D, в зависимости от скорости излучателя (I^{Ir}, I^{Pt} — это интенсивности, измеряемые детектором за иридиевым (I^{Ir}) и платиновым (I^{Pt}) поглотителями). Обращает на себя внимание резкая зависимость эффекта от скорости и энергии излучающих ядер. Поглощение практически не наблюдается при скоростях $\gtrsim$ 2 *см/сек*, что соответствует энергии 10^{-5} *эв*, или относительному изменению энергии:

$$\frac{\delta E}{E} \sim 10^{-10}.$$

Использование других веществ позволяет наблюдать относительное изменение энергии $\sim 10^{-16}$, что почти на четыре порядка меньше величины, измеряемой методами молекулярного генератора.

Высокая точность в измерении изменений энергии с помощью эффекта Мёссбауэра позволяет подвергать проверке многие выводы теории.

Например, Паунд (1960) подверг проверке некоторые выводы общей теории относительности Эйнштейна. Паунд показал, что изменение частоты фотона, обусловленное движением в поле тяготения Земли, находится в хорошем согласии с теорией.

При этом источник и приемник располагались по вертикали на расстоянии всего в несколько метров.

§ 10. Методы регистрации ядерных частиц

Постановка задачи. Методы регистрации заряженных ядерных частиц основаны на регистрации или измерении большого числа ионизированных ими атомов или молекул. Нейтральные частицы могут ионизовать лишь небольшое число частиц, передав им свою энергию. Возникшие при этом заряженные частицы регистрируются по их ионизирующей способности.

Потери регистрируемой частицей энергии на ионизацию практически не зависят от ее скорости и определяются в основном свойствами среды. Для создания одной пары ионов в воздухе требуется 32 *эв* для электронов (с энергией $\sim$ 0,3 *Мэв*), 36,0 *эв* для протонов с энергией 2,5 ÷ 7,5 *Мэв*; 36,1 и 36,5 для α-частиц с энергией 7,8 и 5,3 *Мэв* соответственно. В более тяжелых газах энергия ионизации уменьшается, например, в криптоне для α-частиц с энергией 5,3 *Мэв* $I_0 = 21{,}4$ *эв*. Поэтому по числу возникших пар ионов можно судить об энергии и виде частицы. Электроны, освобожденные летящей частицей, называются первичными электронами, они обладают достаточной энергией для вторичной ионизации. Приведенные выше численные характеристики относятся к полной (усредненной) ионизации. Различие в методах регистрации ядерных частиц основано на различии принципов регистрации возникающих ионов и электронов.

Ионизационная камера. Возникшие в результате прохождения ядерной частицы ионы будут диффундировать.

Для регистрации их в ионизационной камере накладывается электрическое поле малой величины такой, чтобы набираемая ионами или электронами энергия на длине свободного пробега была меньше той, которая необходима для вторичной ионизации атомов или молекул газа, занимающего камеру. Ионизационные камеры могут быть цилиндрической формы (рис. 267), плоскими. Между внешним электродом и собирающим прикладывается не-

которая разность потенциалов от батареи. Если в камере образовались ионы, то в цепи потечет ток, который создает напряжение на сопротивлении R. Это напряжение обычно подается на вход усилителя. Величина тока, текущего через сопротивление, зависит от разности потенциалов между электродами (рис. 269). Начиная с некоторого U, ток достигнет насыщения, когда все возникающие ионы регистрируются, их рекомбинация прекращается. Выбором конструкции камеры можно приспособить ее для регистрации частиц определенного сорта. Токи, возникающие в ионизационных камерах, обычно составляют величину порядка 10^{-13} *а*. Величина его пропорциональна энергии частиц. Напряжение на камере составляет 200—300 *в*.

Счетчики Гейгера—Мюллера. Конструктивно счетчики Гейгера — Мюллера (рис. 268) напоминают ионизационную камеру, но работают в таком режиме, что в них непосредственно происходит усиление ионизационного тока. Если увеличивать напряжение между электродами, то возникшие ионы будут ускоряться. Благодаря большому полю они могут набрать большую энергию прежде, чем столкнутся с молекулами газа в счетчике. Но в таком случае они приводят к образованию иона молекулы. Ускоряясь, эти два иона приведут к образованию четырех ионов и т. д., в газе развивается лавинная ионизация. Коэффициент газового усиления может достигать 10^8, его значение зависит от разности потенциалов между анодом и катодом. На рис. 269 приведена в относительных единицах вольтамперная характеристика счетчика.

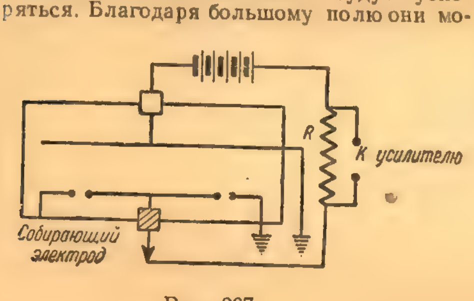


Рис. 267

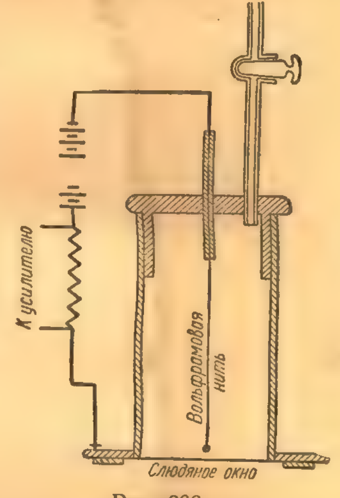


Рис. 268

От 0 до V_p счетчик работает как ионизационная камера. Величина области насыщения зависит от типа частиц. С ростом напряжения ток начинает расти пропорционально напряжению (область пропорциональности).

Импульсы от разных частиц разные. Коэффициент усиления не зависит от числа первично возникших частиц. Поэтому импульсы напряжения (или тока), снимаемые со счетчика, будут пропорциональны числу первоначально возникших пар. Усиление может достигать при этом $\approx 10^7$.

Начиная от V_p, коэффициент усиления будет зависеть от числа первоначально возникших пар ионов. Усиление будет тем меньше, чем большей ионизацией обладает частица. Поэтому, начиная с V_g способность различать первичные частицы теряется — импульсы от различных частиц одинаковы.

Начиная с V_n, в счетчике возникает непрерывный разряд, вследствие чего он теряет способность реагировать на новые частицы.

В момент лавинной ионизации счетчик также не может реагировать на новые частицы, поэтому возникший разряд должен быть погашен.

Это достигается различным образом.

Счетчики Гейгера—Мюллера обычно работают в той области вольтамперной характеристики, в которой число импульсов почти не зависит от разности потенциалов между анодом и катодом (область «плато», которая может иметь ширину ~ 100 *в* при 1 000 *в* напряжения с наклоном в несколько процентов).

Механизм работы несамогасящегося счетчика отличается от механизма работы самогасящегося счетчика.

Возникшие первичные ионы и электроны, ускоренные полем счетчика, приводят ко вторичной ионизации и возбуждению атомов и молекул. Излучаемые ими фотоны приводят к фотоионизации других атомов или молекул

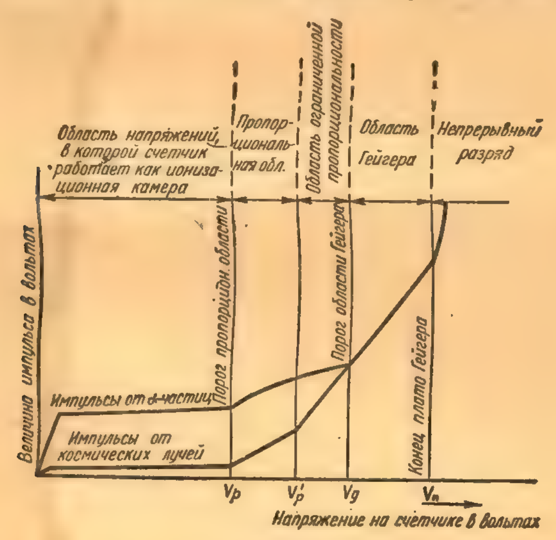


Рис. 269

и т. д. Разряд возникает во всем объеме счетчика. Положительные ионы, двигаясь к отрицательному центральному электроду, экранируют внешнее поле, способствуя затуханию лавинного разряда. Однако для его прекращения необходимо резко понизить напряжение на счетчике, что достигается различными электронными схемами. Простейший способ состоит в том, что в цепь отрицательного электрода включается большое сопротивление ($\approx 10^8$ *ом*). Импульс тока приводит к импульсу напряжения на нем, который резко уменьшает поле между электродами, вследствие чего разряд гасится и счетчик готов к регистрации следующей частицы.

Самогасящиеся счетчики содержат, как правило, смесь благородного газа с многоатомными газами, например, смесь аргона с 10% этилового спирта при давлении ≈ 10 *см рт. ст.* Механизм его работы состоит в следующем. Первичные ионы, ускоряясь, ионизуют и возбуждают атомы Ar и молекулы спирта. Фотоны, испускаемые Ar, имеющие не менее 11,5 *эв*, интенсивно поглощаются парами спирта. Это приводит к возникновению разряда в объеме газа в основном вблизи центрального отрицательного электрода. Образовавшийся чехол положительных ионов резко ослабляет поле в той области, где оно было максимально. В результате взаимодействия аргона со спиртом вся энергия переходит к молекулам спирта, частично диссоциировавшим, имеющим энергию ≈ 4 *эв*. Их приход на катод дает импульс тока, но они не вызывают выбивания электронов из катода (4 *эв*). Разряд гаснет.

Время, необходимое для восстановления порогового значения поля, носит название «мертвого» времени, так как счетчик не реагирует на пролетающие частицы. Оно составляет $\approx 100\ \mu$ *сек* и определяется временем, в течение которого положительные ионы достигают катода. После прохождения мертвого времени счетчик фиксирует частицы, но импульсы тока малы. Время, по истечении которого импульсы тока достигают первоначального значения, называют восстановительным временем. Оно определяется временем полной деионизации газа и составляет $\approx 100\ \mu$ *сек*.

Эффективность счетчиков Гейгера — Мюллера. Эффективность счетчиков η определяется отношением числа зарегистрированных импульсов к числу первичных частиц, пересекающих его рабочий объем при не слишком большой загрузке (чтобы исключить мертвое время). Она равна

$$\eta = 1 - e^{-N_0},$$

где N_0 — среднее число пар ионов, создаваемых частицей в счетчике. Уже при $N_0 = 5$, $\eta = 99\%$ и даже при $N = 1$ $\eta = 63\%$.

Попадание тяжелых частиц, обладающих большой ионизационной способностью (α-частиц, протонов), в объем счетчика приведет к их регистрации. Для регистрации γ-квантов, имеющих большой пробег в газах, используется их поглощение в стенках. Образованные ими фото- или комптон-электроны имеют эффективность, близкую к единице, так как они приводят к образованию ~ 4 пар ионов на 1 *см* пути в смеси при давлении ~ 10 *см рт. ст.* Эффективность счетчиков для γ-лучей с энергией в 1—3 *Мэв* со стенками из свинца составляет 1—2%.

Кристаллические счетчики. Кристаллические счетчики представляют собой полупроводниковые материалы, используемые для регистрации частиц большой энергии. Если к полупроводниковому кристаллу с большой шириной запрещенной зоны подвести разность потенциалов, то в цепи тока не будет вследствие большого сопротивления такого полупроводника. Но если в полупроводник попадает частица большой энергии, то возникает большое число свободных носителей в зоне проводимости, и через счетчик протечет импульс тока, который создает импульс напряжения на внешнем сопротивлении. Величина импульса тока пропорциональна числу первично созданных электронов. Длительность импульса определяется временем собирания электронов и составляет величину $\approx 10^{-7}$ *сек*.

Кристаллические счетчики обладают высокой эффективностью для γ-квантов. В алмазе толщиной 2 *мм* возникает $\approx 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ комптоновских электронов на 1 γ-квант с энергией 1 *Мэв*. В хлористом серебре возникает $6 \cdot 10^{-2}$ комптон-электронов на квант.

Для кристаллических счетчиков используются кристаллы хлористого серебра, галлоиды таллия, сульфиды цинка и кадмия, алмаз. Кристаллы CdS используются для регистрации рентгеновых лучей, германиевые приборы с *p-n*-переходом используются для обнаружения отдельных α-частиц. Для создания свободных носителей тока затрачивается энергия 4—10 *эв*.

Сцинтилляционные счетчики. Идея метода состоит в том, что при прохождении ионизирующих частиц через некоторые вещества в них возбуждается флуоресценция. Вспышки света регистрируются визуально или с помощью фотоумножителя. Для этого сцинтиллирующий кристалл помещается перед входным окном фотоумножителя.

При прохождении одной ионизирующей частицы через антрацен создается около 6 000 фотонов на 1 *Мэв* потерянной энергии. Пропорциональность между потерянной энергией и величиной сцинтилляционного импульса наблюдается для электронов и протонов, несколько хуже для α-частиц. Сцинтилляционные счетчики обладают большой разрешающей способностью во времени, так как время высвечивания составляет в используемых веществах $\approx 10^{-8}$ *сек*. Эффективность органических сцинтилляционных счетчиков раз-

мером в 1 *см* для γ-квантов составляет около 10%, что во много раз больше эффективности обычного счетчика Гейгера — Мюллера. Для тяжелых неорганических веществ эффективность для γ-квантов возрастает до 100%. Простота конструкции, большая эффективность для γ-квантов, большое разрешение во времени, пропорциональность светового импульса обусловливают все растущее использование их для обнаружения частиц и измерения их характеристик. Для счетчиков используются йодистый натрий, нафталин, антрацен, стильбен и другие твердые и жидкие вещества.

Камера Вильсона. Камера Вильсона позволяет сделать путь частиц видимым. Принцип работы камеры состоит в следующем. Для конденсации пересыщенного пара необходимо наличие центров конденсации. Ими являются пылинки, скопления молекул (флуктуации плотности), положительные и отрицательные ионы. Следовательно, если через пересыщенный пар пропустить частицу большой энергии, на ионах, образовавшихся на ее пути, будет конденсироваться пар, образуются капельки, которые сделают путь частицы видимым. Для получения пересыщенного пара производят

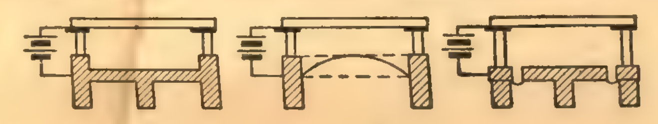


Рис. 270

адиабатическое увеличение объема камеры, наполненного насыщенным паром, что приводит к понижению температуры газа и пара, и переходу насыщенного пара в пересыщенный. С этой целью используются пары воды, этилового и пропилового спиртов и некоторых других жидкостей. Время чувствительности камеры может меняться от 0,1 до нескольких секунд. Конструктивно камера Вильсона представляет полый цилиндр, закрытый с одной стороны плоской стеклянной пластиной, а с другой стороны — подвижным поршнем или подвижным упруго закрепленным дном (рис. 270). Образовавшиеся в камере следы частиц («трэки») фотографируются в рассеянном ими свете. Фотографирование проводится или двумя фотокамерами, или одной фотокамерой фотографируется трэк и его изображение в плоском зеркале. Получаемые стереоскопические снимки при промере позволяют точно измерять пространственные характеристики трэков. Для удаления остаточных ионов в объеме камеры создается слабое электрическое поле перед расширением.

Для измерения энергий легких частиц камера помещается в магнитное поле (по методу Скобельцына). По радиусу кривизны траектории можно вычислить импульс частицы

$$p = \frac{erH}{c}.$$

Диффузионные камеры. Для некоторых целей желательно получить камеру, которая имела бы чувствительность непрерывно. Это достигается в диффузионных камерах Вильсона. Принцип действия их состоит в том, что в камере создается градиент температуры: крышка имеет температуру 30—70° С. С ней соединяется мягкий материал, пропитанный применяемой жидкостью. Дно камеры покрыто слоем жидкости при (— 30°) — (—70°) С. В объеме камеры образуется область пересыщенного пара, имеющая непрерывно чувствительность к частицам.

Метод фотоэмульсий. Движение ионизирующей частицы в фотоэмульсии приводит к разложению галлоидного серебра эмульсии. Атомы, подвергшиеся воздействию движущейся частицы, являются центрами, делающими способными зерна к проявлению. Число зерен намного мень-

ше числа пар ионов, но при не очень большой удельной ионизации плотность зерен, способных к проявлению, пропорциональна потере энергии. Ядерные эмульсии имеют более высокую концентрацию галлоидного серебра ($\approx$ в 4 раза), чем оптические эмульсии, очень малые зерна (от 0,1 до 0,6μ), хорошо разделенные друг от друга, и толстые слои (от 25 до 2 000μ). Чем мельче зерна серебра, тем большей ионизирующей способностью должна обладать регистрируемая частица. Выбором эмульсии можно выделять различные частицы. Они позволяют регистрировать осколки деления, α-частицы, мезоны, электроны. Для измерения энергии по длине пробега пользуются известными соотношениями между пробегом и энергией, или калибруют эмульсии с помощью однотипного излучения с известной энергией частиц. Вид частицы может быть установлен по характеру траектории. Измерения пробега проводятся на микроскопе с большой точностью отсчетов, фотообработка ядерных эмульсий значительно отличается от обработки оптических эмульсий.

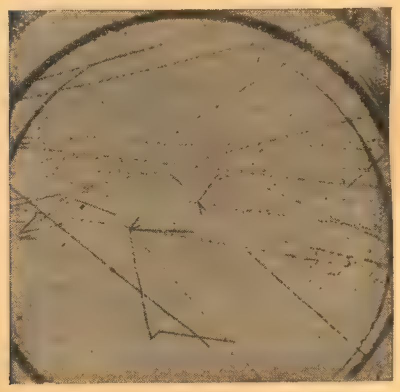


Рис. 271

Пузырьковые камеры. Недостатком камеры Вильсона и диффузионной камеры является малая тормозная способность газов, а фотоэмульсии — трудность их обработки. В то же время трэковые приборы имеют большое преимущество перед другими приборами регистрации. В 1952 г. Глэзер предложил пузырьковую камеру. Это сосуд, наполненный перегретой жидкостью. Ионизирующая частица, проходящая через камеры, вызывает ионизацию. Ионы являются центрами парообразования, и поэтому траектория частицы отмечается пузырьками газа. В качестве рабочей жидкости используются ксенон, этилен, пропан, фреоны, водород, гелий и другие жидкости или их смеси. Работа камеры сводится к следующим операциям. Температура камеры поддерживается постоянной. За некоторое время до прохождения исследуемых частиц срабатывает расширительное устройство, давление в камере падает до величины, значительно ниже давления насыщенных паров жидкости при данной температуре. Жидкость оказывается перегретой и камера — чувствительной к ионизирующему излучению. Пропускается пучок исследуемых частиц, поджигаются осветительные лампы, производится фотографирование трэков. Расширительное устройство повышает давление до первоначальной величины, пар конденсируется. После этого камера готова к новому циклу. Время чувствительности больших камер составляет сотые доли секунды.

Пузырьковые камеры широко применяются при исследовании частиц больших энергий, для взаимодействия K-частиц с протонами, рассеяния π-мезонов на протонах, реакций типа $\pi^- + p — \Sigma^- + K^+$ и других процессов (рис. 271).

Счетчики Черенкова. При движении заряженных частиц в веществе со скоростью v, большей, чем скорость света c/n в данном веществе, возникает свечение, называемое свечением Черенкова. Оно ограничено конусом с угловым раствором δ относительно направления движения частицы:

$$\cos\delta = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta},$$

где n — коэффициент преломления вещества. Излучение имеет непрерывный спектр с плотностью излучения:

$$\rho(\nu) = 4\pi^2 \frac{e^2}{hc^2} \sin^2\delta.$$

Для стекла $n = 1{,}51$ и $\beta = 1$, $\delta = 51°$. Излучение можно использовать для регистрации «сверхсветовых» частиц. Измерение угла раствора конуса позволяет определить скорость и энергию частицы с очень большой точностью, например, при регистрации протонов с энергией 320 *Мэв* фотографическим методом их энергия определяется с точностью до 0,8 *Мэв*.

Единицы измерения ионизирующих излучений. Рентген-(*р*) — доза рентгеновского и γ-излучения, приводящая к образованию заряда одного знака в одну единицу СГСЕ, что равносильно образованию в 1 *см*^{3} сухого воздуха при нормальных условиях $2{,}08 \cdot 10^9$ пар ионов. На образование одной пары ионов воздуха затрачивается 34 *эв*, поэтому при дозе в 1 *р* в 1 *см*^{3} поглощается энергия, равная 0,114 *эрг*. Для одного грамма воздуха это соответствует поглощенной энергии 88 *эрг*, или $5{,}39 \cdot 10^{13}$ *эв*.

Рад — поглощенная доза излучения, равная 100 *эрг* на 1 *г* облученного вещества (ГОСТ 8848—58).

Единица поглощенной дозы рад относится к любому виду излучения и любому виду вещества.

Использовавшийся ранее физический эквивалент рентгена (ФЭР) равен 0,95 *рад*.

§ 11. *Общая характеристика радиоактивности*

Открытие радиоактивности. Под естественной радиоактивностью понимают способность веществ, содержащих определенные элементы, самопроизвольно, без внешнего воздействия, испускать невидимое излучение, имеющее сложный состав. Естественная радиоактивность солей урана была открыта французским ученым Антуаном Анри Беккерелем (1852—1908) в 1896 г.

Состав излучения. Было установлено, что излучение, испускаемое радиоактивными веществами, имеет сложный состав. Если пропустить узкий пучок радиоактивного излучения через магнитное поле, то пучок расщепляется:

а) на слабо отклоняемый поток положительных частиц (α-лучи; α-частицы);

б) сильно отклоняемый пучок отрицательных частиц (β-лучи, β-частицы);

в) неотклоняемый пучок нейтральных частиц (γ-лучи, γ-частицы).

α, β-, γ-лучи обладают различной проникающей и ионизирующей способностью: проникающая способность максимальна для γ-лучей, минимальна для α-лучей, ионизирующая способность минимальна для γ-лучей, максимальна для α-лучей (см. взаимодействие ядерного излучения с веществом).

Природа излучений. Излучение содержит α-, β- и γ-лучи только для соединений, которые содержат несколько радиоактивных элементов. Чистый радиоактивный элемент испускает или α-, или β-лучи, которые могут сопровождаться γ-лучами. Испускание одного только γ-излучения наблюдается очень редко.

Радиоактивность представляет собой внутриядерный процесс. Это вытекает из того, что на него не оказывают никакого воздействия вид химического соединения, агрегатное состояние, большие давления, температуры, электрические и магнитные поля, т. е. все те воздействия, которые могут изменить состояние электронной оболочки. На процесс естественной радиоактивности можно воздействовать лишь путем изменения состояния ядра, например, при облучении ядер нейтронами.

α-лучи представляют собой ядра гелия $_2He^4$. Это было доказано прямыми опытами Резерфорда и Содди. Газ радон (эманация радия) $_{86}Rn^{222}$,

помещенный в запаянном сосуде, испуская α-лучи, приводит к появлению спектральных линий гелия. Если собрать α-частицы в сосуде, закрытом достаточно тонкой фольгой, прозрачной для них, то в сосуде появляется газ гелий, обнаруживаемый по спектру излучения. Масс-спектроскопический анализ показывает, что отношение e/m для α-частиц равно отношению e/m для дважды ионизированных атомов ${}_2He^4$, т. е. для ядер гелия.

β-лучи представляют собой поток электронов. Это вытекает, в частности, из того, что они оказывают такое же действие, что и катодные лучи, и имеют равный с ними удельный заряд e/m, измеряемый при их движении в полях **E**, **H**.

γ-лучи представляют собой поток квантов, фотонов большой энергии и, следовательно, характеризуются большой частотой $\nu = \frac{E}{h}$ соответствующего волнового процесса. Они имеют такую же природу, как свет или рентгеновы лучи, возникающие при торможении быстрых электронов, созданных в рентгеновских трубках или ускорителях. Они отличаются от γ-лучей, получаемых в ускорителях, лишь механизмом образования, в остальном они тождественны.

Превращения элементов. Закон смещения. При радиоактивном излучении происходит превращение одних элементов в другие по вполне определенному закону, называемому правилом смещения. Например в результате радиоактивности радия появляются два газа радон и гелий: радон, распадаясь, дает полоний и гелий и т. д.

При α-радиоактивности заряд ядра уменьшается на две единицы (в единицах заряда протона) и массовое число на 4 единицы. Продукт распада помещается в таблице Менделеева на две клеточки левее исходного элемента. Схематически это записывается в виде:

$$ {}_ZX^A \xrightarrow{\alpha} {}_{Z-2}Y^{A-4} + {}_2He^4. $$

При β-распаде массовое число не меняется и заряд увеличивается на единицу — происходит сдвиг вправо в таблице Менделеева на одну клетку. Схематически:

$$ {}_ZX^A \xrightarrow{\beta-} {}_{Z+1}Y^A + e^-. $$

При γ-распаде превращения элементов не происходит:

$$ {}_ZX^A \xrightarrow{\gamma} {}_ZX^A + h\nu, $$

но происходит изменение внутренней энергии возбужденного состояния ядра. Правила смещения отражают закон сохранения заряда и массового числа.

Примеры распадов:

$$ {}_{88}Ra^{226} \xrightarrow{\alpha} {}_{86}Rn^{222} + {}_2He^4 $$

$$ {}_{19}K^{40} \xrightarrow{\beta-} {}_{20}Ca^{40} + e^-. $$

Продукты распада могут быть в свою очередь радиоактивными. Это приводит к появлению радиоактивных цепочек или рядов, в которых один элемент порождает другой (или другие). Совокупность элементов, образующих такую цепочку, называется радиоактивным семейством. Распадающийся элемент называется материнским, образующийся — дочерним. Элемент, начинающий ряд, называется родоначальником. Известны три естественных радиоактивных семейства и одно искусственно полученное радиоактивное семейство.

1. Семейство урана. Родоначальником является уран ${}_{92}U^{238}$. Массовые числа элементов этого ряда определяются формулой $A = 4n + 2$, где n — целое число, определенное условием:

$$ 51 < n < 59. $$

Ряд заканчивается стабильным изотопом свинца $_{82}Pb^{206}$. К этому семейству относятся такие, например, элементы, как радий $_{88}Ra^{226}$, радон $_{86}Rn^{222}$, полоний $_{84}Po^{218}$.

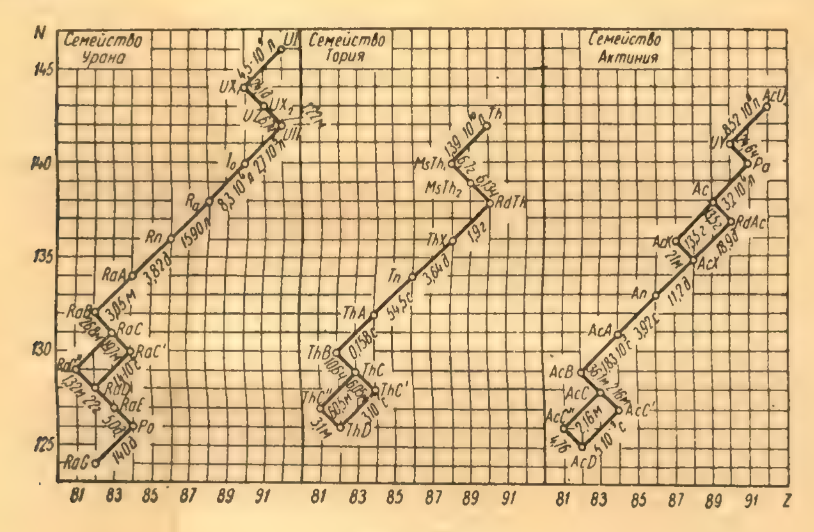


Рис. 272а

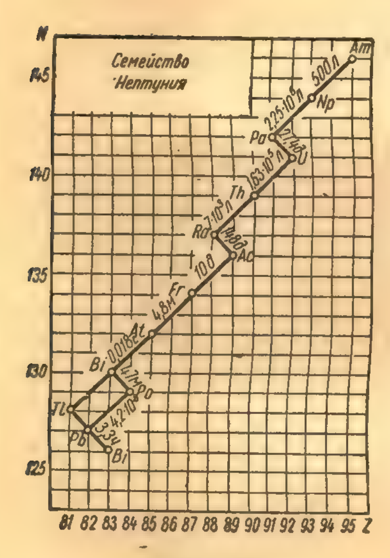


Рис. 272б

2. Семейство тория. Родоначальником является торий $_{90}Th^{232}$. Массовое число определяется формулой $A = 4n$ $(52 \leqslant n \leqslant 58)$. Ряд заканчивается стабильным изотопом свинца $_{82}Pb^{208}$.

3. Семейство актиния или актиноурановое. Родоначальником является изотоп урана $_{92}U^{235}$. Массовое число ряда определяется формулой $A = 4n + 3$ $(51 < n < 58)$. Ряд оканчивается стабильным изотопом свинца $_{82}Pb^{207}$.

4. Семейство нептуния. В природе это семейство не встречается; получено искусственно. Названо оно по элементу $_{94}Np^{241}$. Массовое число этого семейства определяется формулой $A = 4n + 1$. Семейство кончается стабильным изотопом висмута $_{83}Bi^{209}$, среди членов семейства находится $_{92}U^{233}$.

5. Помимо радиоактивных семейств встречаются отдельные радиоактивные элементы, к которым относятся: калий $_{19}K^{40}$, рубидий $_{37}Rb^{87}$, самарий $_{62}Sm^{152}$, лутеций $_{71}Lu^{176}$, рений $_{75}Re^{178}$.

На рис. 272 дана схема радиоактивности семейств, на которой указаны обозначения и тип излучения.

В таблицах (стр. 452—454) приведены характеристики радиоактивных семейств.

Семейство урана

Название члена ряда	Обозначение члена ряда	Элемент	Период полураспада	Энергия излучения, *Мэв*		
				α	β	γ
Уран UI	UI	Уран $_{92}U^{238}$	$4,55 \cdot 10^9$ лет	4,21	—	—
Уран X_1	UX_1	Торий $_{90}Th^{234}$	24,1 дня	—	0,13	0,09
Уран X_2	UX_2, UZ	Протактиний $_{91}Pa^{234}$	1,14 *мин*	—	2,32	0,80
Уран UII	UII	Уран $_{92}U^{234}$	$2,69 \cdot 10^5$ лет	4,75	—	—
Ионий	Io	Торий $_{90}Th^{230}$	$8,22 \cdot 10^4$ лет	4,66	—	γ
Радий	Ra	Радий $_{88}Ra^{226}$	1600 лет	4,79	—	0,19
Радон	Rn	Радон $_{86}Rn^{222}$	3,825 дня	5,49	—	—
Радий A	RaA	Полоний $_{84}Po^{218}$	3,05 *мин*	5,99	—	—
Радий B	RaB	Свинец $_{82}Pb^{214}$	26,8 *мин*	—	0,65	γ
Радий C	RaC	Висмут $_{83}Bi^{214}$	19,7 *мин*	5,50	3,15	1,8
Радий C^I	RaC^I	Полоний $_{84}Po^{214}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$ *сек*	7,68	—	—
Радий C^{II}	RaC^{II}	Таллий $_{81}Tl^{210}$	1,32 *мин*	—	1,80	—
Радий D	RaD	Свинец $_{82}Pb^{210}$	22,2 года	—	0,025	0,47
Радий E	RaE	Висмут $_{83}Bi^{210}$	4,97 дня	—	1,17	—
Радий F	RaF	Полоний $_{84}Po^{210}$	139 дней	5,30	—	γ
Радий G	RaG	Свинец $_{82}Pb^{206}$	Стабилен	—	—	—

Семейство актиния

Название члена ряда	Обозначение члена ряда	Элемент	Период полураспада	Энергия излучения		
				α	β	γ
Актиноуран AcU	AcU	Уран $_{92}U^{235}$	$8,52 \cdot 10^{8}$ лет	4,52	—	—
Уран Y	UY	Торий $_{90}Th^{231}$	24,6 *час*	—	0,2	—
Протактиний	Pa	Протактиний $_{91}Pa^{231}$	$3,2 \cdot 10^{4}$ лет	5,05	—	—
Актиний	Ac	Актиний $_{89}Ac^{227}$	13,5 лет	5,0	0,22	—
Радиоактиний	RdAc	Торий $_{90}Th^{227}$	18,9 дня	6,05	—	—
Актиний X	AcX	Радий $_{88}Ra^{223}$	11,2 дня	6,72	—	—
Актион	An	Родон $_{86}Ra^{219}$	3,92 *сек*	6,82	—	—
Актиний A	AcA	Полоний $_{84}Po^{215}$	$1,83 \cdot 10^{-3}$ *сек*	7,36	—	—
Актиний B	AcB	Свинец $_{82}Pb^{211}$	36,1 *мин*	—	0,5	—
Актиний C	AcC	Висмут $_{83}Bi^{211}$	2,16 *мин*	6,62	1,4	0,6
Актиний C^{I}	AcC^{I}	Полоний $_{84}Po^{211}$	$5 \cdot 10^{-3}$ *сек*	7,43	—	—
Актиний C^{II}	AcC^{II}	Таллий $_{81}Tl^{207}$	4,76 *мин*	—	1,47	—
Актиний D	AcD	Свинец $_{82}Pb^{207}$	Стабилен	—	—	—

Семейство тория

Название члена ряда	Обозначение члена ряда	Элемент	Период полураспада	Энергия излучения в *Мэв*		
				α	β	γ
Торий	Th	Торий $_{90}Th^{232}$	$1{,}34\cdot10^{10}$ лет	4,20	—	—
Мезоторий 1	$MsTh_1$	Радий $_{88}Ra^{228}$	6,7 лет	—	0,053	—
Мезоторий 2	$MsTh_2$	Актиний $_{89}Ac^{228}$	6,13 *час*	4,5	1,55	—
Радиоторий	RdTh	Торий $_{90}Th^{228}$	1,90 лет	4,22	—	—
Торий X	ThX	Радий $_{88}Ra^{224}$	3,64 дня	5,68	—	—
Торон	Tn	Радон $_{86}Rn^{220}$	54,5 *сек*	6,28	—	—
Торий A	ThA	Полоний $_{84}Po^{216}$	0,158 *сек*	6,77	—	—
Торий B	ThB	Свинец $_{82}Pb^{212}$	10,6 *час*	—	0,36	—
Торий C	ThC	Висмут $_{83}Bi^{212}$	60,5 *мин*	6,05	2,20	—
Торий C^{I}	ThC^{I}	Полоний $_{84}Po^{212}$	$3\cdot10^{-7}$ *сек*	8,77	—	—
Торий C^{II}	ThC^{II}	Таллий $_{81}Tl^{208}$	$3\cdot1$ *мин*	—	1,82	2,62
Торий D	ThD	Свинец $_{82}Pb^{208}$	Стабилен	—	—	—

З а к о н   р а д и о а к т и в н о г о   р а с п а д а. Опыт показывает, что распад всех радиоактивных веществ происходит по экспоненциальному закону. Теоретически его можно вывести, если предположить, что: 1) число распадов dN ядер за время dt пропорционально времени dt; 2) число распадов пропорционально общему количеству нераспавшихся к данному моменту времени t ядер N.

Если учесть, что $dN < 0$ (уменьшение числа ядер), то можно записать:

$$-dN = \lambda N dt,$$

Семейство нептуния (получено искусственно)

Элемент	Период полураспада	Вид излучения
Америций $_{95}Am^{241}$	500 лет	α
Нептуний $_{93}N^{237}$	$2{,}25 \cdot 10^{6}$ лет	■
Протактиний $_{91}Pa^{233}$	27,4 дня	β
Уран $_{92}U^{233}$	$1{,}6 \cdot 10^{5}$ лет	α
Торий $_{90}Th^{229}$	$7 \cdot 10^{3}$ лет	α
Радий $_{88}Ra^{225}$	14,8 дней	β
Актиний $_{89}Ac^{225}$	10 дней	α
Франций $_{87}Fr^{221}$	4,8 *мин*	α
Астатин $_{85}At^{217}$	0,18 *сек*	■
Висмут $_{83}Bi^{213}$	47 *мин*	β
Полоний $_{84}Po^{213}$	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$ *сек*	α
Свинец $_{82}Pb^{209}$	3,34 *сек*	β
Висмут $_{83}Bi^{209}$	Стабилен	—

где коэффициент пропорциональности λ-постоянная радиоактивного распада (данного сорта ядер). Интегрируя и учитывая, что при $t = 0$ число атомов N_0, можно записать:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Это выражение и есть закон радиоактивного распада.

П е р и о д   п о л у р а с п а д а. Время T, по истечении которого начальное число N_0 атомов радиоактивного вещества (или его массы) уменьшается в два раза, называется периодом полураспада. Если $t = T$, то по определению T $N = N_0/2$, тогда получим

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

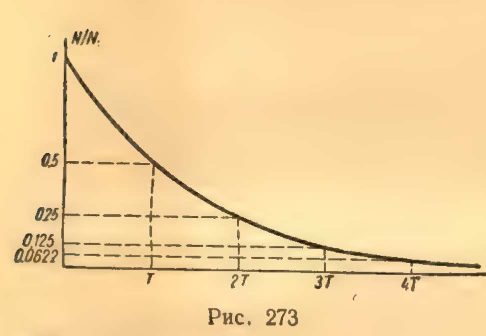


Рис. 273

откуда

$$\lambda T = \ln 2.$$

или

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Если использовать T, то закон распада можно преобразовать к виду, более удобному для расчетов:

$$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T}} = N_0 (e^{-\ln 2})^{\frac{t}{T}} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

или

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}}.$$

Если измерить время t в периодах полураспада T, то обозначив $n = \frac{t}{T}$, получим:

$$N = \frac{N_0}{2^n},$$

что особенно удобно, если проходит целое число периодов полураспада.

На рис. 273 представлен закон радиоактивного распада, на графике отмечены времена T, $2T$, $3T$, $4T$ и соответственно им число оставшихся атомов.

Среди радиоактивных элементов встречаются распады с самыми разнообразными периодами от миллиардных долей секунды до миллиардов лет.

Постоянная распада λ связана со средним временем жизни T_a: так как $dN \cdot t$ есть время жизни dN ядер, то

$$T_a = \frac{\int t dN}{N_0} = \frac{1}{\lambda},$$

следовательно, $T = T_a \ln 2$.

Активность. Единицы активности. При распаде ядер продукты распада вылетают с большой скоростью. Встречая на своем пути тела, они производят в них те или иные изменения. Воздействие излучения будет тем больше, чем больше распадов происходит в единицу времени. Для характеристики числа распадов вводится понятие активности A. Активностью A радиоактивного образца называется величина, равная числу распадов в единицу времени:

$$A = (-) \frac{dN}{dt} = \left| \frac{dN}{dt} \right|.$$

Отсюда видно, что активность представляет собой скорость изменения числа радиоактивных атомов. Дифференцируя полученное выражение, будем иметь:

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N,$$

т. е. активность равна произведению постоянной распада λ на число нераспавшихся атомов N. Но $\lambda N_0 = A_0$ — это начальная активность. Поэтому для активности можно записать:

$$A = A_0 e^{-\lambda t},$$

т. е. активность изменяется по экспоненциальному закону с тем же периодом T, с которым происходит распад ядер. Активность стремится к нулю только при $t \to \infty$. Однако это не означает, что если какой-либо участок местности или техники заражены радиоактивностью, то они станут безопасными только при $t \to \infty$. Использовать технику можно в том случае, когда активность достигает уровня, безопасного для жизни. Если в данный момент активность равна A_0 и безопасная величина активности $A_{б/о}$, то

очевидно, что использовать технику можно через время t, определяемое условием:

$$A_{б/о} = A_0 e^{-\lambda t}; \quad \text{откуда} \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_0}{A_{б/о}}.$$

При данном уровне зараженности техники пригодность к использованию наступит тем быстрее, чем больше λ (если не принимать специальных мер по дезактивации).

Активность измеряется единицами кюри (c) и резерфорд (R). 1 кюри есть такая активность, которую создает 1 г радия. Так как в 1 г радия в секунду распадается $3,7 \cdot 10^{10}$ ядер, то, следовательно, вещество имеет радиоактивность в 1 кюри, если в нем совершается $3,7 \cdot 10^{10}$ распадов в секунду. Эта единица очень большая, поэтому используют производные единицы:

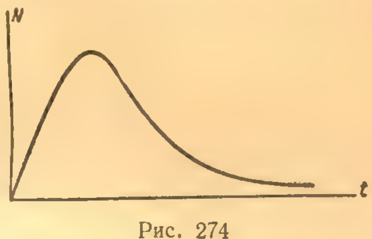


Рис. 274

$$1\ mc\ (\text{милликюри}) = 10^{-3}\ c = 3,7 \cdot 10^7\ \frac{\text{распад}}{сек}$$

$$1\ \mu c\ (\text{микрокюри}) = 10^{-6}\ c = 3,7 \cdot 10^4\ \frac{\text{распад}}{сек}.$$

В последнее время начинают употреблять другую единицу — резерфорд. 1 R есть такая активность, которая соответствует 10^6 распад/*сек*. Очевидно, что 1 mc = 37 R. Единицей кюри измеряют не только активность, но и массу радиоактивного вещества. При этом, если активность данной массы вещества, выраженная в кюри, равна A, период в секундах T, то $m \approx 8,88 \cdot 10^{-14} \mu TA$, где μ — грамм-атомный вес.

«Вековое» уравнение. Возьмем чистый радий. Поместим его в запаянный сосуд. В сосуде будет образовываться радон. Количество образовавшегося радона определяется двумя причинами — распадом радия и распадом самого радона. С течением времени вследствие непрерывного распада радия количество радона будет увеличиваться, но с ростом количества ядер радона число распадов будет возрастать. Подобное же положение будет иметь место для любой пары радиоактивных элементов. В общем случае число атомов дочернего элемента будет изменяться во времени так, как это показано на рис. 274. Мы рассмотрим только один крайний случай, когда период T_1 полураспада материнского элемента много больше периода T_2 полураспада дочернего элемента: $T_1 \gg T_2$. Тогда за время dt вновь образуется ядер дочерних за счет распада материнского $\lambda_1 N_1\, dt$; в результате распада число ядер дочернего элемента за dt уменьшится на величину $-\lambda_2 N_2\, dt$. Прирост числа ядер дочернего элемента составит:

$$dN_2 = (\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2)\, dt.$$

При равновесии между дочерним и материнским веществами число распадов равно числу вновь образуемых ядер дочернего элемента, поэтому $dN_2 = 0$, тогда

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2.$$

Это уравнение носит название векового. Если все члены радиоактивного ряда находятся в равновесии, то

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \ldots$$

Отношение числа атомов, находящихся в равновесии, равно отношению их периодов:

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{T_1}{T_2}.$$

Это уравнение позволяет находить один из периодов, если известен другой.

В общем случае, если при $t=0$ $N_1=N_{10}=N_0$; $N_2=N_{20}=0$, то при $t\neq 0$

$$dN_2=(\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2)\,dt,$$

или

$$\frac{dN_2}{dt}+\lambda_2 N_2=\lambda_1 N_1=\lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}.$$

Откуда, учитывая общее решение однородного уравнения и частное неоднородного, получим

$$N_2=\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right).$$

§ 12. α-радиоактивность

Некоторые закономерности. Пробег и энергия. В большинстве случаев естественно радиоактивные превращения представляют собой α-распад, что и приводит к уменьшению заряда ядра конечного продукта по сравнению с родоначальником семейства. Отличительной особенностью α-распада является моноэнергетичность α-частиц, испускаемых данным ядром. α-частицы, испускаемые каким-либо ядром, имеют одну и ту же энергию, и следовательно, один и тот же пробег.

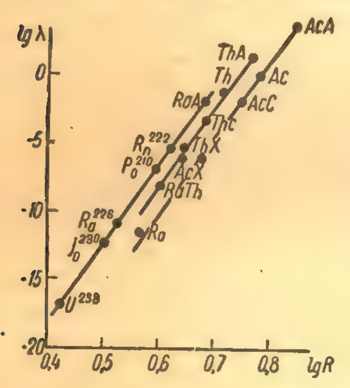


Рис. 275

Некоторые элементы имеют α-частицы с несколькими различными пробегами, и, следовательно, энергиями, например RaC′ или ThC′. Связь между энергией E или скоростью v и пробегом R можно выразить законом Гейгера:

$$R=av^3,\quad R\approx E^{3/2},$$

где

$$a=9{,}6\cdot 10^{-28}\ сек^3/см^2.$$

Закон Гейгера — Нэттола. Гейгер и Нэттол установили очень важное соотношение между энергиями E частиц и периодами полураспада. Обычно его выражают в виде связи между пробегом и постоянной распада:

$$\lg R=A\lg\lambda+B.$$

Константа A, определяющая наклон прямой в координатах ($\lg R$, $\lg\lambda$), имеет практически одно и то же значение для всех трех радиоактивных рядов. B имеет различные значения для различных рядов (рис. 275). Закон Гейгера — Нэттола показывает, что ядра, испускающие α-частицы с бо́льшей энергией, должны иметь меньший период полураспада, при этом небольшое различие в энергиях должно приводить к очень большому различию в перио-

дах полураспада. Закон Гейгера — Нэттола использовался для определения периодов полураспада некоторых элементов.

Теория α-распада. Объяснить α-распад невозможно, если не привлекать волновых свойств частиц и следующий из них «туннельный» эффект. Действительно, еще из опытов Резерфорда известно, что α-частицы с энергией 8,8 *Мэв* рассеиваются ядрами урана в соответствии с их взаимодействием по закону Кулона, сближаясь при этом до расстояний $\sim 3 \cdot 10^{-12}$ *см*. Это означает, что ядро окружено потенциальным барьером, высота которого не меньше 8,8 *Мэв*. Вместе с тем сам уран испускает α-частицы с энергией 4 *Мэв*. Эту энергию α-частица может приобрести, начиная движение с расстояния $\approx 6 \cdot 10^{-12}$ *см*. Чтобы объяснить, каким образом α-частица из ядра попадает в область $r \approx 6 \cdot 10^{-12}$, минуя «запрещенную область» $r < 6 \cdot 10^{-12}$ *см*, необходимо учесть «туннельный» эффект. Ядро окружено сферически симметричным потенциальным полем $U(r)$, которое на больших расстояниях от ядра представляет собой кулоновское поле $U(r) \approx \frac{2Ze^2}{r}$. Вблизи поверхности ядра действуют большие силы притяжения — ядерные силы, аналитическое выражение для которых в настоящее время неизвестно. Но учитывая их большую величину и короткодействующий характер, потенциальную кривую вблизи ядра можно считать в виде ямы (рис. 252). В этой яме находится α-частица с энергией E, величина которой меньше высоты потенциального барьера. Это обеспечивает сравнительную устойчивость ядер к распаду. Но частица может выйти из ядра с энергией, меньшей высоты потенциального барьера.

Прозрачность барьера:

$$D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_R^r \sqrt{2M[U(r)-E]}\,dr}.$$

Она определяет вероятность для частицы пройти сквозь барьер при движении по радиусу. Но эта величина мала, поэтому частица отражается («отскакивает») от стенки потенциального барьера. Число ударов о стенку в единицу времени равно $\nu = \frac{v}{2R}$, где v — скорость α-частицы.

В таком случае вероятность выхода из ядра α-частицы в единицу времени составляет νD, но она равна также λ, следовательно,

$$\lambda = \nu D,$$

или

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{2E}{M}}\,D_0}{2R} e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_R^r \sqrt{2M[U(r)-E]}\,dr}.$$

Таким образом, это выражение дает связь между λ, энергией E и радиусом потенциальной ямы R и заменяет собой приближенное выражение этой зависимости в законе Гейгера — Нэттола.

Определение радиуса потенциальной ямы ядра (радиуса ядра). В выражение для λ входит энергия E и радиус той области, где начинают действовать ядерные силы — R. Зная E и λ, можно оценить R.

Спектр α-частиц. α-частицы, испускаемые данным изотопом, имеют несколько различные энергии, как это доказано применением магнитных спектрометров. Различие в энергиях объясняется тем, что образующееся дочернее ядро может находиться в различных энергетических состояниях. Но помимо тонкой структуры спектра энергии, существует более значитель-

ное различие в энергиях — у некоторых элементов наблюдаются так называемые длиннопробежные α-частицы, имеющие вполне определенную, но бо́льшую энергию, чем основная масса α-частиц. Наличие таких частиц объясняется тем, что перед α-распадом α-частица может получить дополнительную энергию.

§ 13. β - радиоактивность

β-спектр. β-частицы имеют сплошной спектр энергии в отличие от α-частиц, имеющих линейчатый спектр. Распределение электронов по энергии при β-распаде приведено на рис. 276. Кривая начинается от нуля, имеет максимум при некоторой энергии и определенный верхний предел $E_{макс}$ характерный для каждого изотопа. Величина $E_{макс}$ принимает значения от 15 *кэв* до 15 *Мэв*.

Радиоактивный изотоп можно охарактеризовать средним значением энергии в спектре:

$$< E > = \frac{\int N(E)\, dE}{\int dN},$$

которое является характеристической величиной для данного ядра.

В явлении β-распада физики столкнулись с серьезной проблемой, касающейся закона сохранения энергии. Исходное и конечное ядра находятся во вполне определенных энергетических состояниях. Разность энергий исходного ядра и продукта распада, как показывают вычисления, равны максимальной полной энергии β-частиц. Но калориметрические измерения, в которых все выделяемые электроны полностью поглощаются, показывают, что регистрируемая энергия совпадает не с максимальной, а со средней энергией $< E >$. Энергия $E_{макс} - < E >$ как бы пропадает бесследно.

Налицо видимое нарушение закона сохранения энергии — одного из наиболее твердо установленных положений физики. Идея о нарушении закона сохранения энергии при β-распаде, помимо ее методологической неприемлемости и противоречия с огромным опытным материалом, приводит к необъяснимости некоторых фактов самого распада. В качестве примера рассмотрим «ториевую вилку»:

$$\mathrm{Th}\,C \genfrac{}{}{0pt}{}{\overset{\beta}{\nearrow}\ \mathrm{Th}\,C'\ \overset{\alpha}{\searrow}}{\underset{\alpha}{\searrow}\ \mathrm{Th}\,C''\ \underset{\beta}{\nearrow}} \mathrm{Th}\,D.$$

$\mathrm{Th}\,C$ может превратиться в $\mathrm{Th}\,D$ двумя путями: β-распад + α-распад или α-распад + β-распад. Энергия α-частиц различна, β-спектры также различны. Но сумма $E_\alpha + E_{макс}$ для первого и второго пути одна и та же — 11,20 *Мэв*, что равно разности энергии $\mathrm{Th}\,C$ и $\mathrm{Th}\,D$. Если закон сохранения энергии при β-распаде нарушается, то совпадение энергий для вилки кажется «чудом».

Закон сохранения спина. При β-распаде из ядра вылетает электрон (или позитрон при β^+-распаде искусственно радиоактивных ядер). Однако электронов в ядре нет. Электрон при β-распаде рождается в момент распада, например, в результате превращения одного нейтрона в протон:

$$n \rightarrow p + \beta^-.$$

Электрон уносит момент количества движения $\frac{1}{2}\hbar$, в то же время спин конечного ядра равен спину исходного ядра, так как массовое число ядра при β-распаде не меняется. Таким образом, при β-распаде закон сохранения момента количества движения как бы нарушается.

Нейтрино. Швейцарский физик Вольфганг Паули (1900—1958) предположил, что при β-распаде из ядра вылетают две частицы: электрон и нейтрино ν (точнее антинейтрино $\tilde{\nu}$). Гипотетическая частица нейтрино должна обладать при этом следующими свойствами: она должна быть нейтральной (так как $Z = (Z+1) + \beta^-$), иметь очень близкую к нулю массу покоя, спин ее равен $\frac{1}{2}\hbar$, магнитный момент близок к нулю. Энергия ядра передается электрону $E(\beta^-)$ и нейтрино $E(\nu)$ так, что

$$E(\beta^-) + E(\nu) = E_{\text{макс}}.$$

В таком случае выполняются законы сохранения энергии и момента количества движения.

Отсутствие заряда (нейтральность) и малость магнитного момента нейтрино должны обеспечить малое взаимодействие нейтрино с веществом, что приводит к большому значению длины свободного пробега — в твердом теле до 10^{16} *км* и полностью объясняет результат калориметрических опытов, в которых энергия нейтрино уносится ими из калориметра.

Теория β-распада. Теория β-распада должна объяснять распределение β-электронов по спектру $N(E)$. Первоначальная теория была создана Ферми, основные черты ее сохранились и в усовершенствованных теориях. Основные положения теории: электрон и нейтрино рождаются в момент вылета, они являются носителями, квантами электронно-нейтринного поля. Это поле с изменяющимся числом частиц описывается, вообще говоря, методами вторичного квантования. При β-распаде происходит переход ядра как системы нуклонов из одного состояния в другое, а вероятность этого перехода и представляет собой вероятность β-распада. Но вероятность перехода в единицу времени между состояниями m и n определяется матричным элементом $W_{mn} = \int \psi_m^* \hat{W} \psi_n \, d\tau$ оператора возмущения, умноженным на плотность конечных квантовых состояний $\rho(E) = \frac{dn}{dE}$:

$$w_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{mn}|^2 \rho(E).$$

Для вычисления плотности состояний $\rho(E)$ необходимо учесть, что $E_\beta + E_\nu = E_{\text{макс}}$; $dE_\beta = -dE_\nu \equiv dE$. Значению энергии электрона E_β, $E_\beta + dE_\beta$ соответствует значение импульса p_β, $p_\beta + dp_\beta$, образующее шаровой слой объемом $4\pi p_\beta^2 \, dp_\beta$, в котором может быть dn_β состояний:

$$dn_\beta = \frac{4\pi p_\beta^2 \, dp_\beta \, v}{h^3}.$$

Аналогично для нейтрино:

$$dn_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 \, dp_\nu \, v}{h^3}.$$

Так как $dn = dn_\beta \, dn_\nu$, то

$$dn = \frac{16\pi^2 v^2 p_\beta^2 p_\nu^2 \, dp_\beta \, dp_\nu}{h^6}.$$

Для нахождения $\rho(E)$ необходимо заменить p^2 и dp через полную энергию электрона и нейтрино; учитывая связь межу $E_{\text{макс}}$, E_β и E_ν, можно записать:

$$w(E)dE=\frac{v^2}{2\pi^3\hbar^7c^4}\,|W_{mn}|^2E\,(E_{\text{макс}}-E)\left(\frac{E^2}{c^2}-m_0^2c^2\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left[\frac{(E_{\text{макс}}-E)^2-m_\nu^2c^4}{c^2}\right]^{1/2}dE.$$

Если выразить энергию в единицах m_0c^2; $E/m_0c^2=\varepsilon$, то

$$w(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{v^2m_0^5c^4}{2\pi^3\hbar^7}\,|W_{mn}|^2\,\varepsilon\,(\varepsilon^2-1)^{1/2}(\varepsilon_{\text{макс}}-\varepsilon)\times$$
$$\times\left[(\varepsilon_{\text{макс}}-\varepsilon)^2-\left(\frac{m_\nu}{m_0}\right)^2\right]^{1/2}d\varepsilon$$

(m_0 — масса покоя электрона).

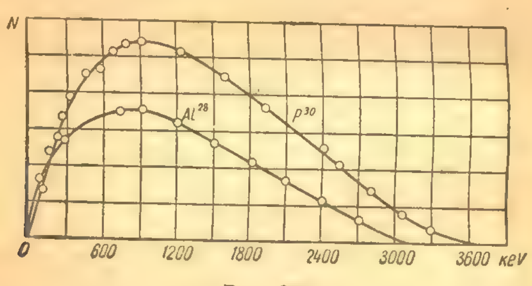


Рис. 276

Это выражение, описывающее распределение электронов по энергиям, позволяет оценить массу нейтрино $\frac{m_\nu}{m_0}$ при сопоставлении с экспериментальной кривой. На рис. 277 приведены две кривые, которые соответствуют $\frac{m_\nu}{m_0}=0$ (кривая a) и $\frac{m_\nu}{m_0}=1$ (кривая b). Обе кривые ведут себя совершенно различно в окрестности $E_{\text{макс}}$: касательные к ним имеют углы 0 и 90 соответственно. Экспериментальные кривые показывают, что $\frac{m_\nu}{m_0}$ близко к нулю, но не равно ему.

Для точного количественного описания β-спектра необходимо знать матричный элемент оператора возмущения. Простейшее предположение состоит в том, что оператор возмущения представляет собой константу, обозначаемую g. Она характеризует величину взаимодействия частиц при β-распаде. Оценка ее величины из экспериментальных данных дает для значения $g\approx 1{,}4\cdot 10^{-49}$ *эрг. см*^{3}.

Если учесть, что β-частицы, вылетая из ядра, взаимодействуют с электронной оболочкой, то для интенсивности β-спектра необходимо записать:

$$w(\varepsilon)=C^2f(\varepsilon,Z)\,\varepsilon\,(\varepsilon^2-1)^{1/2}(\varepsilon_0-\varepsilon)^2,$$

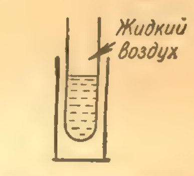
где C^2 — константа, $f(\varepsilon,Z)$ характеризует влияние электронов на β-частицу и $m_\nu\approx 0$. Можно записать:

$$\sqrt{w(\varepsilon)/f(\varepsilon,Z)(\varepsilon^2-1)^{1/2}\varepsilon}=C(\varepsilon_0-\varepsilon).$$

Следовательно, если известно $f(\varepsilon, Z)$, то по экспериментально измеренному распределению интенсивности в β-спектре $I(\varepsilon)$ можно построить зависимость $\sqrt{I(\varepsilon)/f\varepsilon(\varepsilon^2-1)^{1/2}}$ от энергии, что должно дать прямую линию. Подобные графики Кюри, или графики Ферми, действительно для многих элементов представляют собой прямую линию. Если в формуле не опускать член $\frac{m_\nu}{m_0}$, то по графику Кюри можно оценить его величину. Эксперимент дает, что

$$\frac{m_\nu}{m_0} < \frac{1}{2\,000}.$$

Экспериментальные доказательства существования нейтрино. Прямое наблюдение нейтрино фактически невозможно, однако существует целый ряд экспериментов, доказывающих существование нейтрино:



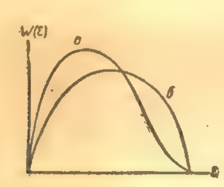


Рис. 277

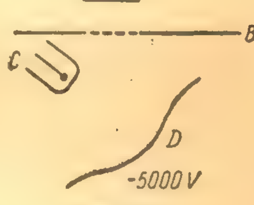


Рис. 278

а) Ядра отдачи. Если нейтрино уносит энергию, то она уносит и импульс. В этом случае импульс ядра должен быть равен векторной сумме импульсов электрона и нейтрино с обратным знаком. Подобные прямые опыты были проделаны с ядрами, испытывающими *K*-захват.

Экспериментально изучалось распределение ядер отдачи по энергиям. Зная эту величину, можно найти распределение ядер по импульсам. То же самое можно проделать и с электронами. Тогда, если нейтрино нет, то кривые распределения ядер и электронов по импульсам и энергиям будут подобны. Опыт показал, что они не подобны, что говорит в пользу того, что при β-распаде вылетает еще одна частица помимо электрона. Идея опыта, поставленного впервые Лейпунским, состоит в следующем. На плоской зеркальной поверхности адсорбирован углекислый газ, содержащий примесь радиоактивного изотопа $_6C^{11}$. Некоторые ядра выбрасываются с поверхности зеркала вследствие отдачи Изучение распределения ядер по энергиям производилось методом тормозящего поля (сетка *B*, рис. 278). Для подсчета числа ионов, имеющих энергию, достаточную для преодоления тормозящего поля, они ускорялись полем, созданным между сеткой *B* и катодом *D* (~ 500 *в*); ударяясь о катод *D*, ионы выбивали электроны, которые ускорялись полем и регистрировались счетчиком Гейгера.

б) *K*-захват. При *K*-захвате ядро захватывает электрон с *K*-оболочки, превращаясь тем самым в ядро $(Z-1)$, что равносильно превращению одного из протонов ядра в нейтрон. В таком случае из ядра должно вылететь нейтрино, унося избыток энергии и момент количества движения поглощенного электрона. Ядро получит импульс отдачи в направлении, противоположном вылету нейтрино. Использовался *K*-захват у ядра $_4Be^7$:

$_4Be^7 + \bar{e} \to {}_3Li^7 + \tilde{\nu}$ ($T = 43$ дня). Так как $M(Be^7) = 7{,}01916$, а $M(Li^7) = 7{,}01822$, то энергия, уносимая нейтрино E_ν

$$E_\nu = \Delta Mc^2 = 0{,}00094 \cdot 931 \textit{ Мэв} = 0{,}87 \textit{ Мэв}.$$

Импульс нейтрино

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c},$$

энергия ядра

$$E_я = \frac{p_я^2}{2M} = \frac{p_\nu^2}{2M} = \frac{E_\nu^2}{2Mc^2} = 45 \textit{ эв}.$$

в) *Корреляция в направлении вылета β-частицы и ионов отдачи.* В опыте Шервина счетчик Гейгера мог регистрировать электроны, а электронный умножитель — ионы отдачи. Они могли располагаться под углами 180°, 135°, 90° и 45° относительно направления вылета электрона. Сигналы от счетчика и усилителя подавались на осциллограф со ждущей разверткой, которая запускалась от счетчика Гейгера. По времени запаздывания сигнала от умножителя можно оценить энергию ядра отдачи.

Опыт показал, что умножитель дает значительное число отсчетов даже в том случае, когда угол не равен 180°. Это значит, что ядра отдачи вылетают под различными углами к направлению электрона; если бы нейтрино не существовало, то угол мог бы быть только один — 180°.

Нейтрино и антинейтрино. Двойной β-распад. В настоящее время частицу, которая выбрасывается при электронном распаде, принято называть антинейтрино $(\tilde{\nu})$ и при позитронном распаде — нейтрино. Вопрос о их различии возникает в связи со следующим положением. Нуклон ядра может распадаться двумя способами:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}$$

и

$$p \to n + e^+ + \nu.$$

Испускание частицы равносильно поглощению античастицы, поэтому $\tilde{\nu}$ и ν — испускаемые частицы — можно перенести в левую сторону, изменив их на поглощаемые частицы, т. е. заменив на античастицы:

$$n + \nu \to p + e^-,$$
$$\tilde{\nu} + p \to n + e^+.$$

Электронный распад возникает в результате захвата нейтроном нейтрино, а позитронный—протоном антинейтрино. Следовательно, если $\tilde{\nu} \neq \nu$, то невозможны следующие процессы:

$$\tilde{\nu} + n \to p + e^-; \nu + p \to n + e^+.$$

Если же $\tilde{\nu} \equiv \nu$, то процессы, естественно, возможны. Прямая проверка этих соотношений не проведена.

Однако существует явление двойного β-распада, когда ядра (A, Z) превращаются в ядро $(A, Z + 2)$ с одновременным выбрасыванием двух электронов. При этом возможны две схемы двойного β-распада в зависимости от того, тождественны или нет ν и $\tilde{\nu}$. Если $\nu \equiv \tilde{\nu}$, то испущенный одним нейтроном антинейтрино $(n \to p + e^- + \tilde{\nu})$ поглощается вторым нейтроном $(n + \tilde{\nu} \to p + e^-)$. Следовательно, при двойном β-распаде рождение нейтрино будет лишь виртуальным и процесс будет происходить по схеме:

$$A(Z, N) \to (Z + 2, N - 2) + 2e^-$$

Если же $\nu \neq \tilde{\nu}$, то распад должен происходить по схеме

$$A(Z, N) \to A(Z+2, N-2) + 2e^- + 2\tilde{\nu},$$

так как каждый нейтрон выбрасывает антинейтрино.

Вероятность двойного β-распада с виртуальным рождением антинейтрино больше вероятности с рождением 2ν. Теоретические оценки дают период полураспада $\sim 10^{16} - 10^{17}$ лет в первом случае и $\sim 10^{24}$ лет — во втором случае.

Экспериментальные исследования проводятся на нескольких ядрах. Так как период полураспада крайне велик, то в единицу времени будет наблюдаться очень малое число импульсов, так что фон, создаваемый, например космическими лучами может быть много выше. Поэтому исследования проводятся в лабораториях глубоко под землей, используют до нескольких сот литров жидкого сцинтиллятора (толуол или другая жидкость), до сотни и более фотоумножителей со сложной радиотехнической схемой. Подобные опыты показали, что нижний предел периода полураспада для

$$_{50}Sn^{124} \approx (2 \div 5)\, 10^{17} \text{ лет;}$$

$$\text{для } _{40}Zr^{96} \approx 0{,}6 \cdot 10^{17} \text{ лет,}$$

$$_{52}Te^{130} \approx 10^{21} \text{ лет;}$$

$$_{20}Ca^{48} \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ лет;}$$

$$_{60}Nd^{150} \approx (2 \div 4)\, 10^{18} \text{ лет.}$$

Эти результаты позволяют предполагать, что нейтрино и антинейтрино являются различными частицами.

Несохранение четности. Различие между нейтрино и антинейтрино. Четность состояния или волновой функции системы определяется свойством изменять или сохранять знак при перемене местами двух частиц. Важное свойство четности состоит в том, что она является интегралом движения, так как четность не меняется со временем. Однако опыты показали, что при слабых взаимодействиях четность не сохраняется. К числу слабых взаимодействий относятся взаимодействия при β-распаде. Ли и Янг (1956 г.) первыми указали, в каких экспериментах должно проявиться несохранение четности при β-распаде. Таких возможностей известно три. Во-первых, если закон сохранения четности нарушается, то угловое распределение β-частиц, испускаемых ориентированными ядрами, должно быть асимметричным.

Во-вторых, поляризация $p = \dfrac{(n_{\uparrow\uparrow} - n_{\uparrow\downarrow})}{(n_{\uparrow\uparrow} + n_{\uparrow\downarrow})}$ должна быть отлична от нуля при нарушении закона сохранения четности и равна нулю при его выполнении. Через $n_{\uparrow\uparrow}$ и $n_{\uparrow\downarrow}$ обозначено число β-частиц, импульс p_β которых параллелен $(n_{\uparrow\uparrow})$ и антипараллелен $(n_{\uparrow\downarrow})$ их спину $\hat{\sigma}_\beta$. В-третьих, несохранение четности можно обнаружить по угловому распределению циркулярно-поляризованных γ-лучей, испускаемых при β-распаде.

В опытах по исследованию углового распределения электронов, испускаемых ориентированными ядрами Co^{60}, была найдена значительная асимметрия. Коэффициент, характеризующий анизотропию, оказался отрицательным. Это говорит о том, что электроны испускаются преимущественно противоположно направленные спину ядра.

Опыты по поляризации электронов Co^{60} также подтвердили несохранение четности. Так как $P < 0$, следовательно, испускаются преимущественно электроны, спин которых направлен противоположно их импульсу. Нарушение закона сохранения четности обнаружено и в опытах с циркулярно-поляризованными γ-лучами.

Согласно теории двухкомпонентного нейтрино (Ли и Янг, Ландау, Салам), которая полностью объясняет опыты по несохранению четности, различие между нейтрино и антинейтрино состоит в следующем: *спин нейтрино параллелен его импульсу; спин антинейтрино антипараллелен его импульсу.*

§ 14. γ-излучение

С п е к т р γ-лучей. γ-излучение, испускаемое как естественно, так и искусственно радиоактивными ядрами, имеет линейчатый спектр. Оно обычно сопровождает α- и β-распад.

Дискретность γ-излучения наряду с дискретностью спектра α-распада позволяет сделать вывод, что ядро имеет дискретный спектр энергии.

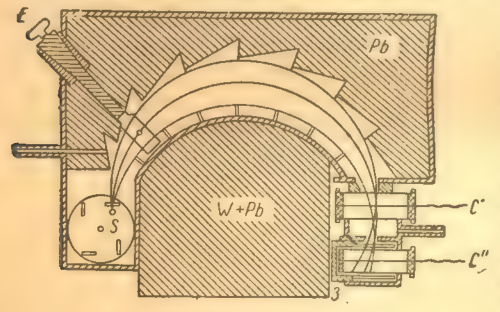


Рис. 279

М е х а н и з м γ-*и з л у ч е н и я.* Механизм γ-излучения легко понять, если учесть дискретный спектр энергии ядер. Ядро может находиться в различных энергетических состояниях E_1, E_2, E_3, ... Переход из одного — E_i, в другое — E_k приводит к излучению кванта энергии $h\nu_{ik} = E_i - E_k$. Теория излучения возбужденного ядра строится аналогично теории излучения атома, при этом рассматриваются различные типы переходов: дипольные электрические, квадрупольные электрические и дипольные магнитные, октупольные электрические и квадрупольные магнитные и т. д. Теория γ-излучения приводит к выводу, что время жизни возбужденного состояния ядра составляет величину $\approx 10^{-14}$ *сек*. Этот результат позволяет легко ответить на вопрос о том, какое ядро ответственно за γ-излучение. Очевидно, что материнское ядро не может быть ответственно за γ-излучение, поскольку оно должно для этого быть в возбужденном состоянии, а при времени жизни 10^{-14} *сек* оно должно для того непрерывно получать энергию. Другое дело — дочернее ядро. При α- или β-распаде дочернее ядро при своем образовании может оказаться в одном из возбужденных состояний. В таком случае переход дочернего ядра в нормальное невозбужденное состояние приведет к испусканию γ-фотона, которое практически происходит одновременно с выбрасыванием α- или β-частицы. Наблюдаемые на опыте энергии γ- лучей находятся в хорошем согласии со спектром α-частиц.

Излучение спектра γ-излучения используется для исследования уровней энергии ядра.

В н у т р е н н я я к о н в е р с и я. Переход возбужденного ряда продукта распада в нормальное, помимо излучения γ-кванта, может происходить еще двумя способами без образования γ-фотонов:

а) ядро может передать энергию возбуждения одному из электронов оболочки атома и переходить при этом в нормальное состояние без излучения. Этот процесс носит название в н у т р е н н е й к о н в е р с и и;

б) если энергия возбуждения превосходит 1,022 *Мэв*, то переход ядра в нормальное состояние может сопровождаться излучением пары электрон — позитрон.

Электроны внутренней конверсии имеют дискретный спектр энергии, они образуют моноэнергетические пучки, накладывающиеся на сплошной спектр при β-распаде.

Если энергии моноэнергетических электронов E', E'', E''', то легко найти, из какой оболочки выбрасывается электрон. Если энергия возбуждения ядра $h\nu$ энергия ионизации K, L, M слоев E_K, E_L, ..., то должно выполняться равенство

$$E' = h\nu - E_K; \quad E'' = h\nu - E_L; \quad E''' = h\nu - E_M, \ ...$$

Пример. Энергия некоторых групп электронов (в *кэв*) RaB равна 36, 74; 48,85 и 51,90. Энергия ионизации уровней L, M_1 и N_1 равна соответственно 16,34; 3,99; 0,93. Попарная сумма дает 53,08; 52,84 и 52,83.

Внутренняя конверсия используется для изучения уровней энергии ядра и соответствующего γ-спектра. Определение энергии электронов производится в магнитных β-спектрометрах.

β-спектрометры. Энергия электронов внутренней конверсии, распределение электронов по энергии при β-распаде, энергия γ-лучей измеряются с помощью магнитных β-спектрометров, принцип действия которых основан на законах движения заряженных частиц в продольном или поперечном поле. На рис. 279 приведены схемы магнитного спектрографа Алиханова для измерения энергии позитронов или электронов. Электроны или позитроны от радиоактивного препарата S движутся в поперечном магнитном поле. При заданном значении **H** на выходную щель будут фокусироваться частицы с определенной энергией, которые регистрируются двумя счетчиками C' и C'', включенными по схеме совпадений. На подобном же приборе можно измерить и энергию γ-лучей, если на место S поставить тонкую пластинку, под которой расположить γ-препарат. Электроны, вырываемые γ-лучами, анализируются по энергиям. Энергия γ-лучей может измеряться по радиусу кривизны электронов отдачи в камере Вильсона (метод Скобельцына).

§ 15. Ядерные реакции

Понятие ядерной реакции. Ядерные реакции — это такое взаимодействие двух (или больше) частиц, которое приводит к появлению новых элементов. Ядерными реакциями осуществлена вековая мечта алхимиков о превращении элементов. Роль «философского камня» играют ядерные снаряды» такие как нейтрон, протон, дейтон, γ-лучи и другие элементарные или сложные частицы. В принципе любой элемент может быть превращен путем ряда реакций в любой наперед заданный элемент. Однако в большинстве известных реакций происходит превращение в элементы, близко лежащие в таблице Менделеева (за исключением реакции деления). В настоящее время известно около тысячи различных ядерных реакций, приводящих к образованию новых ядер.

Обозначение реакции. При обозначении ядерной реакции указывают ядро $_ZX^A$, частицу, которой обстреливают данное ядро, например, нейтрон n, протон p, в скобках иногда записывают образующееся промежуточное ядро (компаунд-ядро), после этого указывают продукты реакции $_{Z'}X^{A'}$ и вылетающую частицу (α-частицу, протон и т. д.). Реакции часто делят по типу частиц, которые вызывают реакцию и образуются в результате реакции. Например, (n, α) означает, что некоторое ядро обстреливается нейтроном, в результате чего появляется α-частица. Для полноты сведений достаточно указать только исходное или конечное ядро, поскольку второе ядро можно определить на основании законов сохранения, но часто пишут и оба ядра. Например,

$$_{29}Cu^{63}\,(n, \gamma)_{29}\,Cu^{64}; \quad _7N^{14}\,(\alpha, p)\,_8O^{17} \text{ и т. п.}$$

Законы сохранения. Помимо законов сохранения энергии (массы) и импульса, в ядерных реакциях выполняется закон сохранения заряда и массового числа. Массовое число может изменяться, если кинетическая энергия вступающих в реакцию частиц достаточна для рождения пары нукло-

нов (частицы и античастицы). Пороговая энергия для образования нуклонов при движении «снаряда» с учетом нуклона отдачи составляет величину ~ 6 *Бэв.*

Теплота реакции. При протекании ядерной реакции может выделяться или поглощаться энергия. По аналогии с химическими реакциями она называется теплотой реакции Q. Если $Q > 0$ — энергия выделяется, то реакция называется экзоэнергетической, если $Q < 0$ — энергия поглощается, — реакция называется эндоэнергетической.

Открытие ядерной реакции. Впервые ядерная реакция наблюдалась Резерфордом в 1919 г. В камере (рис. 280) помещались α-радиоактивный препарат и люминесцирующий экран. Камера могла наполняться различным газом. Если взять расстояние между препаратом и экраном несколько больше длины пробега частиц в данном газе, то на экране не должно наблюдаться сцинтилляций. Резерфорд обнаружил, что если наполнить камеру кислородом, то сцинтилляции отсутствуют. Но если наполнить камеру азотом, то наблюдаются отдельные вспышки даже в том случае, когда расстояние x заведомо больше пробега α-частиц в азоте. Помещая различные препятствия между источником и экраном, Резерфорд установил, что вспышки обусловлены излучением более проникающим, чем α-лучи. Резерфорд пришел к выводу, что новое излучение представляет собой поток протонов, которые возникают в результате превращения азота в кислород на основании реакции:

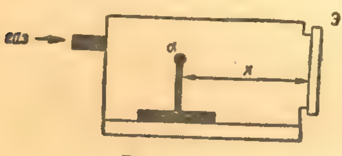


Рис. 280

$${}_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow ({}_9F^{18}) \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1 \quad \text{или} \quad {}_7N^{14}(\alpha, p)_8O^{17}.$$

Выход. Эффективное сечение. Для характеристики той или другой реакции важно указывать, какое число процессов происходит на одну падающую частицу. Этой цели служит понятие выхода реакции. Если утверждается, что выход реакции $Li^7(p,\alpha)\alpha$ при облучении мишени протонами с энергией 3 *Мэв* составляет 1/2000, то это означает, что расщепление одного ядра Li^7 происходит на каждые 2000 протонов, затормозившихся в мишени. Однако выход является величиной, зависящей от условий опыта, поэтому не может служить универсальной характеристикой реакции. Такой характеристикой является эффективное сечение, т. е. вероятность процесса.

Составное ядро. В основе теории ядерных реакций лежит представление о составном ядре.

Частица — «снаряд» попадает в ядро, передает ему в целом всю свою кинетическую энергию и энергию связи, которая распределяется между всеми нуклонами ядра. Образовавшееся компаунд-ядро имеет время жизни, несравненно больше «ядерного» времени, которое оценивается как время, необходимое частице с энергией ~ 1 *Мэв* (скорость $v \sim 10^9$ *см/сек*) пройти расстояние приблизительно равное диаметру ядра. Оно равно $\approx \frac{10^{-12}}{10^9} \sim 10^{-21}$ *сек.* Время существования сложного ядра на основании оценки по γ-излучению, возникающему при простом захвате частицы, составляет 10^6-10^7 ядерных единиц. Это позволяет считать, что вылет частицы из ядра не зависит от захвата падающей частицы ядром.

Второй этап — вылет — происходит в результате того, что на той или другой ядерной частице сконцентрируется избыток энергии, достаточный для вылета частицы из ядра. Эта картина подобна процессу испарения молекул из капли жидкости. При этом необходимо иметь в виду, что понятие уровня энергии должно относиться к ядру в целом, а не к одному нуклону. Это связано с сильным взаимодействием нуклонов в ядре. В соответствии с общей

теорией системы взаимодействующих частиц происходит расщепление резких уровней в зоны, полосы энергии. Энергетические уровни ядра узки при малой энергии, они становятся все более и более широкими с ростом энергии, переходя при очень большой энергии практически в непрерывный спектр.

Ширина уровня определяет время жизни на основании соотношения неопределенности $\Delta E\, \Delta t \sim h$.

Принято обозначать ширину уровня для данного процесса через Г:

$$\Gamma = \frac{h}{\tau}.$$

Так как, между средним временем жизни τ и вероятностью данного процесса λ существует связь:

$$\lambda = \frac{1}{\tau}, \quad \text{то} \quad \Gamma = h\lambda.$$

Если выражать ширину уровня в *эв*, то

$$\Gamma \approx \frac{4{,}1 \cdot 10^{-15}\ \text{эв}}{\tau\,(\text{сек})}.$$

Так как возможны различные процессы, то вводится понятие полной ширины уровня как суммы парциальных ширин:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i.$$

Например, возможными процессами является рассеяние нейтрона или его захват с испусканием γ-кванта, то $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$.

Формула Брейта — Вигнера. Брейт и Вигнер рассчитали теоретически эффективное сечение произвольной реакции x, вызываемой нейтроном, и получили выражение:

$$\sigma(n, x) = \sigma_0 \left(\frac{E_r}{E}\right)^{1/2} \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

где E_r — уровень энергии компаунд-ядра, E — кинетическая энергия нейтрона, σ_0 — некоторая константа. Формула показывает, что при $E \ll E_r$ эффективное сечение обратно пропорционально скорости нейтрона. Качественно это объясняется тем, что захват нейтрона тем вероятнее, чем большее время он проводит вблизи ядра, но это время как раз обратно пропорционально скорости нейтрона. При $E \gg E_r$ зависимость σ от v становится более сильная. Наиболее важным моментом является наличие «резонанса»: при совпадении энергии нейтрона с энергией одного из уровней — $E = E_r$ — второе отношение обращается в 1, эффективное сечение резко возрастает по сравнению с $(E - E_r) \neq 0$. Наличие такого резонансного поглощения медленных нейтронов имеет огромное практическое значение. Вместе с тем резонансные явления прекрасно подтверждают волновые свойства частиц. Проявление резонансов для заряженных частиц осложняется наличием потенциальных кулоновских барьеров.

Источники частиц для ядерных реакций. Источниками частиц для ядерных реакций являются всевозможные ускорители, естественно и искусственно радиоактивные вещества, реакторы, космические лучи.

Реакции, вызываемые α-частицами. α-частицы с энергией в несколько *Мэв* получают от естественно радиоактивных веществ

с энергией в десятки *Мэв* — в ускорителях. α-частицы вызывают реакции типа (α, *p*) и (α, *n*), т. е. компаунд-ядро выбрасывает протон или нейтрон. Существуют как экзотермические, так и эндотермические реакции. **Примеры**.

$$_7N^{14} + {_2He^4} \to (_9F^{18}) \to {_8O^{17}} = {_1H^1} - 1{,}06 \text{ Мэв}.$$

Выход реакции при $E \sim 7{,}8$ *Мэв* составляет ~ 2 протона на 10^5 α-частиц.

Из реакций типа (α, *n*) наибольшее практическое значение имеет реакция с бериллием:

$$_4Be^9 + {_2He^4} \to (_6C^{13}) \to {_6C^{12}} + {_0n^1} + 5{,}6 \text{ Мэв}.$$

Выход нейтронов составляет 2,5 на 10^4 α-частиц с энергией 5,44 *Мэв* (радон). Эта реакция привела к открытию нейтрона. Так называемые бериллиевые источники нейтронов являются очень удобными для экспериментальных работ. Они представляют собой трубочки, заполненные бериллием и каким-либо α-радиоактивным препаратом (радон, полоний). Нейтроны испускаются трех энергий, соответствующих возбужденным уровням C^{12} с энергией 3,0; 4,4, 6,4 *Мэв*.

Испускание нейтронов сопровождается γ-излучением.

Однако при большей энергии α-частиц возможна эндотермическая реакция с тем же бериллием:

$$_4Be^9 + {_2He^4} \to (_6C^{13}) \to 3\,{_2He^4} + {_0n^1} - 1{,}59 \text{ Мэв}.$$

Реакции, вызываемые протонами и дейтонами. Протоны, имея меньший, чем α-частица, заряд и массу, легче проникают в ядро. Они дают разнообразные реакции (*p*, α); (*p*, *n*) и т. д.:

а) реакция (*p*, α). Это первая реакция, полученная с помощью искусственно ускоренных протонов, при облучении лития:

$$_3Li^6 + {_1H^1} \to (_4Be^7) \to {_2He^4} + {_2He^3} + Q,$$

или

$$_{13}Al^{27} + {_1H^1} \to {_{12}Mg^{24}} + {_2He^4};$$

б) реакция (*p*, *n*). Она приводит к замене нейтрона в ядре на протон:

$$_8O^{18} + {_1H^1} \to {_9F^{18}} + {_0n^1}.$$

Возникающие при (*p*, *n*)-реакциях ядра обычно бывают радиоактивными — выбрасывая позитрон β^+, они возвращаются тем самым в исходные ядра. При облучении лития наблюдается γ-излучение очень большой энергии:

$$_3Li^7 + {_1H^1} \to (_4Be^8) \to 2\,{_2He^4},$$

$$_3Li^7 + {_1H^1} \to (_4Be^8)^* \to {_4Be^8} + h\nu \; (17{,}2 \text{ Мэв}),$$

где $(_4Be^8)^*$ — возбужденное ядро бериллия $_4Be^8$.

Но ядро $_4Be^8$ неустойчиво: $_4Be^8 \to 2\,{_2He^4}$; так что окончательно:

$$_3Li^7 + {_1H^1} \to (_4Be^8)^* \to {_4Be^8} + h\nu \to 2\,{_2He^4} + h\nu.$$

Ядра дейтерия являются одним из важнейших ядерных снарядов. С их помощью получено большое число различных реакций.

а) (*d*, *p*) и (*d*, *n*):

$$_1D^2 + {_1D^2} \to {_1H^3} + {_1H^1} \qquad {_1D^2} + {_1D^2} \to {_2He^3} + {_0n^1}.$$

В результате обстрела тяжелой воды дейтонами может произойти реакция или дающая в качестве выхода ядро трития и протон, или ядро легкого изотопа гелия и нейтрон. Обе эти реакции положены в основу экспериментальных работ по получению управляемых термоядерных реакций в газовой плазме;

б) реакция (*d*, α). Одной из важнейших реакций этого типа являются реакции в литии:

$$_3Li^6 + {_1D^2} \to (_4Be^8) \to 2\,{_2He^4} + Q.$$

Эта реакция начинается уже при энергии дейтонов в 0,16 *Мэв*. Реакция дает колоссальную энергию $Q = 22{,}7$ *Мэв*, однако у нее мал выход — 3 α-частицы на 10^{11} дейтонов.

§ 16. Нейтроны

Открытие нейтрона. Раздел ядерной физики, посвященный изучению и использованию нейтронов, представляет собой наиболее важный и обширный ее раздел. С нейтронами связаны, например, такие важные в практическом и теоретическом отношении явления, как деления ядер.

Нейтрон был открыт Чадвиком в 1932 г. в результате объяснения целого ряда опытных фактов, наблюдавшихся Боте и Беккером, Кюри и Жолио и др.

Характеристики нейтрона. Точное измерение массы нейтрона производится на основании ядерных реакций. Например, поглощая фотон, дейтон разлагается на протон и нейтрон:

$$D^2 + h\nu \rightarrow {}_0n^1 + {}_1H^1.$$

В этом равенстве известны массы ${}_1D^2$, ${}_1H^1$, нергия $h\nu$ и кинетическая энергия ${}_1H^1$, откуда может быть оценена масса нейтрона. Получено:

$${}_0n^1 - {}_1H^1 = 0{,}755 \ Мэв;$$

где ${}_1H^1$ — масса атома водорода.

Отсюда

$${}_0m^1 = (1{,}00893 \pm 0{,}00003) \ а.\ е.\ м.$$

Масса нейтрона превосходит массу протона (в энергетических единицах) на 1,257 *Мэв*.

Спин нейтрона равен 1/2.

Нейтрон имеет магнитный момент, величина которого равна

$$\mu_n = (-1{,}9103 \pm 0{,}012)\, \mu_я.$$

Знак «—» означает, что спин и магнитный момент направлены антипараллельно.

Магнитный момент нейтрона измеряется по радиоспектроскопическому методу Раби.

Монохроматические нейтроны можно получить при реакции (p, n) или (d, n), или (α, n):

$$_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow {}_4Be^7 + {}_0n^1 + Q,$$
$$_1H^2 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^3 + {}_0n^1 + Q,$$
$$_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1 + Q.$$

Первые две реакции проводятся в основном на ускорителях, третья — с α-частицами естественно радиоактивных препаратов.

Дифракция нейтронов. Нейтроны позволяют наблюдать хорошо выраженную дифракционную картину. Нейтроны, имеющие энергию $E = kT$ при малых скоростях характеризуются длиной волны порядка ангстрема. Например, при $T = 300°K$ $\lambda = 1{,}8 \mathring{A}$. Следовательно, для наблюдения дифракции с ними в качестве дифрагирующего элемента можно брать кристаллическую решетку. Дифракция на решетке позволяет монохроматизировать пучок нейтронов и разделить их в спектр подобно тому, как это делается в рентгеновских спектрометрах. Дифракцию можно наблюдать не только от монокристаллов, но и порошков. На рис. 281 представлена схема получения дебаеграммы поликристаллического образца. Нейтроны из котла в виде хорошо сколлимированного «белого» пучка падают на монокристалл (например, NaCl) под некоторым углом θ. Под углом зеркального отражения располагается узкая длинная щель, выделяющая монохроматический пучок

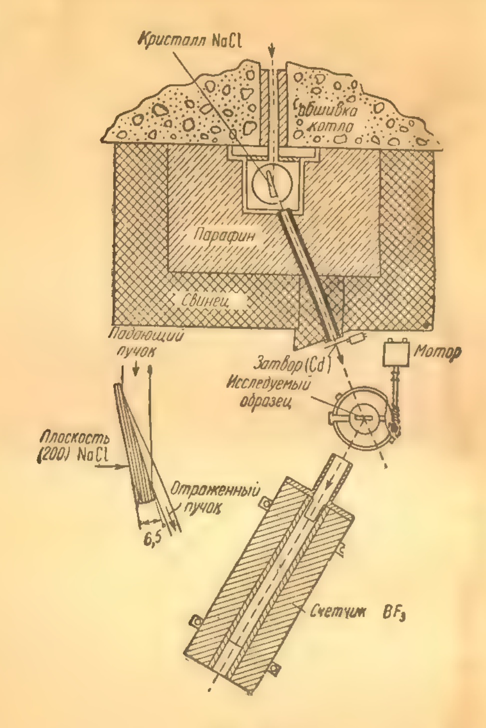


Рис. 281

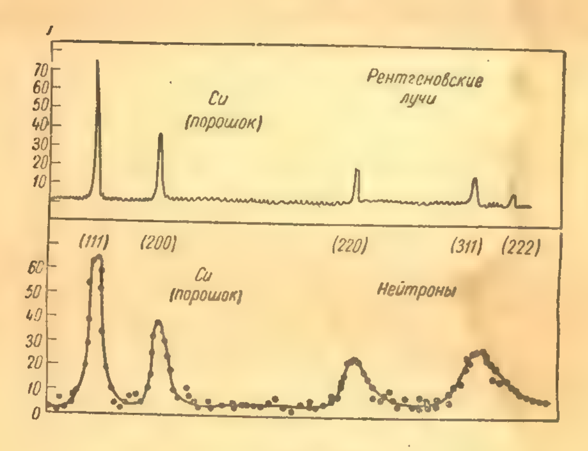


Рис. 282

нейтронов ($2d\sin\theta = m\lambda$). Монохроматический пучок падает на поликристаллический порошок. Образец вращается вокруг вертикальной оси. Счетчик с трехфтористым бором дает кривую интенсивности в зависимости от угла поворота образца. На рис. 282 приведены примеры дифракционных кривых от порошков меди для нейтронов и рентгеновых лучей и лауэграммы нейтронов от монокристаллов NaCl, Be и кварца (рис. 283).

Нейтронография как метод исследования структуры имеет большое будущее, в некоторых отношениях она дублирует, а в некоторых позволяет получать совершенно новые данные, по сравнению с рентгено- и электронографией.

Типы реакций, вызываемых нейтронами. Нейтроны позволяют получать наибольшее число всевозможных ядерных реакций:

$$(n, p); \quad (n, \alpha); \quad (n, 2n); \quad (n, n); \quad (n, \gamma); \quad (n, f) \text{ — деление.}$$

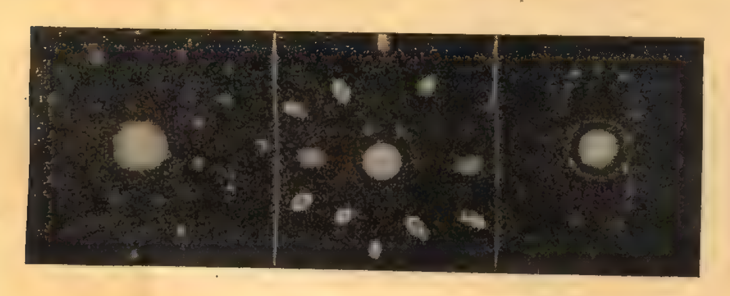


Рис. 283

Характер реакции существенно зависит от энергии нейтронов. Например, реакция с испусканием заряженных частиц происходит в основном с быстрыми нейтронами, поскольку выделение заряженной частицы связано с преодолением потенциального барьера, но прозрачность барьера будет тем больше, чем больше энергия испускаемой частицы (см. туннельный эффект).

Классификация нейтронов по энергиям. Нейтроны, имеющие энергию, равную энергии теплового движения атомов и молекул, называются тепловыми. Они имеют энергию порядка нескольких сотых *эв* и скорость в несколько тысяч *м/сек*. Нейтроны с энергией 0,03—100 *эв* называются медленными. от 100 *эв* до 0,1 *Мэв* — средних энергий, свыше 0,1 *Мэв* — быстрыми. Классификация приближенна, но тем не менее она удобна для целого ряда вопросов

Реакция с медленными нейтронами. Медленный нейтрон, подойдя близко к ядру, может быть захвачен им. Захваченный нейтрон возбуждает ядро, вследствие выделения энергии связи порядка 7—8 *Мэв*. Энергия возбуждения может быть выделена в виде γ - фотона (n, γ) или с выделением протона (n, p).

Реакция (n, γ), называемая захватом с излучением, приводит к образованию изотопа с увеличенным на единицу массовым числом:

$$Z^A + {}_0n^1 \to Z^{A+1} + h\nu.$$

Ядро Z^{A+1} может быть как устойчивым, так и радиоактивным.
Например, ${}_{48}Cd^{113} + {}_0n^1 \to {}_{48}Cd^{114} + h\nu$.

Поглощение нейтрона приводит к образованию устойчивого ядра ${}_{48}Cd^{114}$, энергия возбуждения выделяется в момент захвата. Эффективное сечение этой реакции очень велико и имеет резко выраженный максимум при 0,18 *эв*

(рис. 284). Захват нейтронов широко используется для регулирования реакции деления в ядерных котлах, пластины из кадмия используются для модуляции, прерывания пучка нейтронов и т. п.

Захват нейтронов приводит зачастую к образованию радиоактивного изотопа. Это связано с тем, что образующееся ядро имеет излишек нейтронов, что делает его неустойчивым. Устойчивость появляется в результате превращения одного нейтрона в протон, т. е. в результате β^--радиоактивности. Известно более сотни таких реакций. Например:

$$_{45}Rh^{103} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{45}Rh^{104} + h\nu,$$

$$_{45}Rh^{104} \xrightarrow{T=44 сек} {}_{46}Rd^{104} + {}_{-1}e^0 + 2{,}3 \ Мэв.$$

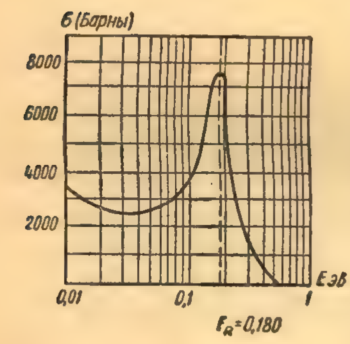


Рис. 284

В веществах, богатых водородом, может происходить образование дейтерия:

$$_1H^1 + {}_0n^1 \rightarrow {}_1H^2 + h\nu.$$

Эта реакция является обратной фоторасщеплению дейтона.

Р е а к ц и я (n, p). Важное значение имеет реакция превращения азота в радиоуглерод:

$$_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1 + 0{,}6 \ Мэв$$

— одна из немногих реакций (n, p), протекающих с медленными нейтронами. Она имеет важное биологическое значение, поскольку $_6C^{14}$ является радиоактивным:

$$_6C^{14} \xrightarrow{5100 \text{ лет}} {}_7N^{14} + {}_{-1}e^0.$$

При этом начальный продукт реакции тождествен с конечным, так что в данном случае происходит как бы превращение нейтрона в протон и электрон.

Р е а к ц и я (n, α). Одной из важнейших реакций этого типа является реакция для получения трития из изотопа лития $_3Li^6$:

$$_3Li^6 + {}_0n^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1H^3.$$

Р е а к ц и и, в ы з ы в а е м ы е б ы с т р ы м и н е й т р о н а м и. Реакция (n, n γ) неупругое рассеяние. Реакция (n, n) может рассматриваться как упругое рассеяние, поскольку сделать различие между простым столкновением по закону упругих шаров и явлением захвата с последующим выбрасыванием нейтрона невозможно. Но если нейтрон имеет достаточную энергию, то рассеяние, как правило, бывает неупругим. Испускаемый нейтрон имеет меньшую энергию, чем падающий, на величину энергии возбуждения ядра. Поскольку первый невозбужденный уровень лежит тем ближе к нормальному, чем больше Z, то неупругое рассеяние наблюдается в тяжелых ядрах при меньшей энергии нейтрона ($\sim 0{,}1$ *Мэв*).

Энергия возбуждения излучается в виде γ-кванта.

Реакция (n, p). Эта реакция будет идти с большим выходом при большой энергии в силу того, что для протона вероятность пройти барьер в этом случае увеличивается

$$_{13}Al^{27} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{12}Mg^{27} + {}_1H^1 + Q.$$

Учитывая массы частиц, можно найти, что $Q \approx (-2)$ *Мэв*. Однако порог этой реакции составляет $\approx 2{,}7$ *Мэв*.

На рис. 285 приведена типичная кривая зависимости эффективного сечения реакций с «порогом». Реакция идет, начиная только с некоторого значения энергии нейтрона, затем достигает насыщения. Известно более 50 таких реакций, большинство их ограничивается $Z < 40$, так как более тяжелые ядра имеют слишком высокий потенциальный барьер для протонов. Некоторые реакции (n, p) служат хорошим средством обнаруживать нейтроны с энергиями больше пороговой, например:

$$S^{32}(n, p)P^{32} - 0{,}93\ \textit{Мэв};\quad Si^{28}(n, p)Al^{28} - 2{,}69\ \textit{Мэв}.$$

Реакция (n, α) требует еще большей энергии нейтронов, так как потенциальный барьер для α-частиц выше, чем для протонов.

Эффективное сечение поглощения нейтронов некоторыми ядрами

Изотоп	σ_n, барн	Изотоп	σ_n, барн
D^2	$5 \cdot 10^{-4}$	Cu^{65}	2,11
He^3	5 000	Ag^{107}	30
Li^6	910	Ag^{109}	84
B^{10}	4 100	Cd^{113}	27 000
Cl^{35}	0,3	Sm^{149}	74 500
Cu^{63}	4,3	U^{235}	675
		U^{238}	2,75

§ 17. Искусственная радиоактивность

Искусственная радиоактивность была открыта французскими учеными Ирэн и Фредериком Жолио-Кюри в 1934 г.

Они подвергли бомбардировке α-частицами элементы B, Al, Mg. В результате реакций могли получиться следующие продукты:

$$_5B^{10} + {}_2He^4 \rightarrow ({}_7N^{14}) \rightarrow {}_7N^{13} + {}_0n^1,$$

$$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow ({}_{15}P^{31}) \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1,$$

$$_{12}Mg^{24} + {}_2He^4 \rightarrow ({}_{14}Si^{28}) \rightarrow {}_{14}Si^{27} + {}_0n^1.$$

Поскольку реакции протекают фактически мгновенно, то нейтронное излучение должно прекратиться в момент прекращения облучения α-частицами. Однако Жолио-Кюри нашли, что если убрать α-препарат, то облученные образцы дают экспоненциально затухающее излучение с периодами полураспада равными 14; 2,5 и 3,25 *мин*.

Жолио-Кюри предположили, что излучение вызывается тем, что предполагаемые продукты реакции являются радиоактивными:

$$_7N^{13} \rightarrow {}_6C^{13} + \beta^+,$$

$$_{15}P^{30} \rightarrow {}_{14}Si^{30} + \beta^+,$$

$$_{14}Si^{27} \rightarrow {}_{13}Al^{27} + \beta^+.$$

Эта гипотеза была подтверждена прямыми химическими опытами. Для этого облученный препарат подвергался химической обработке совместно с тем элементом, радиоактивный изотоп которого предполагался в качестве продукта распада.

В этом случае активность должна перейти добавленному элементу, который можно выделить уже обычными химическими методами. Например, для проверки того, что при облучении B возникает радиоазот, облучался твердый нитрид бора BN. Облученный BN обрабатывался едким натрием, в результате

чего азот нитрида бора переходит в газообразный аммиак NH_3. Если при реакции возникает радиоазот, то активность должна перейти к аммиаку. Опыт показал, что выделенный твердый бор не радиоактивен, а активность при любых реакциях остается с азотом.

Искусственно радиоактивные элементы могут быть получены в целом ряде ядерных реакций. Они играют все возрастающую роль в жизни общества.

Примеры. Радиоуглерод широко используется в биологических исследованиях. Радиойод используется в диагностике и лечении базедовой болезни. Диагностика состоит в том, что введенный в организм в усвояемой форме йод концентрируется в щитовидной железе при ее повышенной функции. На этом же основано и лечение, концентрируясь в железе, он своим излучением подавляет деятельность щитовидной железы.

Так же широко используется $_{27}Co^{60}$, который получается из обычного стабильного $_{27}Co^{59}$, облученного в реакторе:

$$_{27}Co^{59} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{27}Co^{60},$$

$_{27}Co^{60}$ распадается:

$$_{27}Co^{60} \rightarrow {}_{28}Ni^{60} + \beta^- + h\nu,$$
$$h\nu \approx 1{,}25 \ \textit{Мэв}.$$

γ-фотоны образовавшегося ядра $_{28}Ni^{60}$ часто неправильно приписывают излучению ядра Co^{60}. γ-излучение используется для лечений раковых опухолей, для радиографии металлических изделий, для определения уровня жидкости в закрытом сосуде и т. д.

Широко применяются радиоизотопы в физике, особенно в случае определения переноса различных элементов, например, их диффузии. В полупроводниковой металлургии они могут служить индикаторами распределения примесей при вытягивании монокристаллов. При изучении явления трения радиоизотопы позволяют судить о разрушении и переносе вещества соприкасающихся материалов. Радиоизотопы позволяют судить о давлении паров металлов, о толщине стенок или проводить контроль толщины листов на прокатных станах. Для определения равномерности перемешивания витаминов с кормами используются радиоактивные индикаторы. Радиоизотопы используются для маркирования специальных сплавов.

§ 18. Деление ядер

Открытие деления ядер. Изучая действие нейтронов на различные элементы вскоре после их открытия, Ферми с сотрудниками нашли, что при облучении урана продукты реакций совершенно не похожи на элементы, находящиеся в конце таблицы Менделеева.

В 1938 г. Кюри и Савич нашли, что одним из продуктов, получающихся при облучении урана нейтронами, является элемент, совпадающий или близкий по своим химическим свойствам к *лантану* (редкоземельный элемент). Этот радиоактивный элемент распадается с периодом полураспада 3,5 *час.*

Ган и Штрассман установили, что среди продуктов имеется барий, превращающийся в лантан с периодом 3 5 *час.*

Объяснить появление бария можно было только, предположив, что ядро урана делится на 2 большие части.

Вскоре этот вывод был подтвержден другими исследователями.

Бор и Уиллер подсчитали, что делиться должен изотоп U^{235}, а не U^{238}. Исследования подтвердили этот вывод и показали, что при делении ядра урана выделяется 2 или 3 нейтрона. Это поставило вопрос о создании цепной, ядерной реакции и о новых источниках энергии.

Типы деления ядер. Деление под действием тепловых нейтронов. Известно только 3 изотопа, способных делиться под действием тепловых нейтронов: U^{233}, U^{235}, Pu^{239}. Только U^{235} встречается

в природе, U^{235} способен делиться и под действием быстрых нейтронов, но вероятность деления больше при малых скоростях: если при энергии нейтрона $\sim 10^3$ *эв* эффективное сечение σ - деления составляет 2—2,5 (в барнах), то при тепловых энергиях $\sim 10^{-2}$ *эв* $\sigma \approx 400—500$, т. е. возрастает в 200 раз. Отсюда, естественно, ставится задача замедлить возникающие в процессе реакции нейтроны. В качестве замедлителей используются легкие ядра: дейтерий, углерод (графит).

Графит находит широкое применение в реакторах также вследствие того, что эффективное сечение захвата нейтрона составляет $\sim 0{,}005$ барна — величина сравнительно малая.

Типы делений. Деление под действием быстрых нейтронов. Нейтроны, обладающие энергией ≈ 1 *Мэв*, вызывают деление ядер урана U^{238}, тория ${}_{90}Th^{232}$, протактиния ${}_{91}Pa^{231}$ и нептуния ${}_{93}Np^{237}$. Они характеризуются зависимостью $\sigma(E)$ такого типа, которая представлена на рис. 285 для Np^{237}.

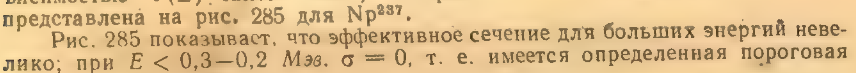


Рис. 285

Рис. 285 показывает, что эффективное сечение для больших энергий невелико; при $E < 0{,}3—0{,}2$ *Мэв*. $\sigma = 0$, т. е. имеется определенная пороговая энергия для деления.

Механизм деления. Механизм деления ядра проще всего представить, если исходить из капельной модели ядра. Будем считать, что до деления ядро имело сферическую форму и равномерно распределенный заряд. Если нейтрон захватывается ядром, то энергия распределяется



Рис. 286

по всему объему, в результате чего могут возникнуть колебания ядра капли. Деформация ядра может привести к тому, что заряды (протоны) сместятся как можно дальше друг от друга (рис. 286). Но концентрация положительных зарядов приводит к разрывающим усилиям кулоновских сил, которые уже не могут быть скомпенсированы короткодействующими ядерными силами, в результате чего ядро разрывается на 2 части (рис. 286). Образовавшиеся 2 осколка будут разлетаться в разные стороны под действием сил кулоновского отталкивания.

Таким образом, атомная или ядерная энергия, возникающая при делении, обусловлена работой сил кулоновского отталкивания. Эту энергию можно оценить непосредственно как потенциальную энергию двух положительных зарядов, находящихся на расстоянии r:

$$W = \frac{Z_1 e \cdot Z_2 e}{r},$$

Если положить

$$Z_1 = Z_2 = 46 \text{ и } r \approx 16 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

(порядка диаметра ядра), то

$$W \approx 185 \text{ Мэв}.$$

Подобный же результат получается из кривой энергии связи частицы в ядре.

Энергия связи и деление ядер. Чтобы понять, почему тепловые нейтроны способны вызывать деления ядер U^{235}, а не U^{238}, необходимо вспомнить выражение для энергии связи. Оно имеет вид:

$$\Delta E = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_4}{A}\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 + \delta.$$

Если ядро урана U^{235} поглощает тепловой нейтрон, то промежуточное ядро U^{236} получает энергию связи нейтрона, равную 6,81 *Мэв*. Поглощение теплового нейтрона изотопа U^{238} дает промежуточному ядру U^{239} энергию связи всего лишь 5,37 *Мэв*. В то же время для деления ядра U^{235} необходимо сообщить ему 5,2 *Мэв*, а ядру U^{238} для деления необходимо сообщить 5,9 *Мэв*. Сопоставляя эти величины, мы видим, что поглощение теплового

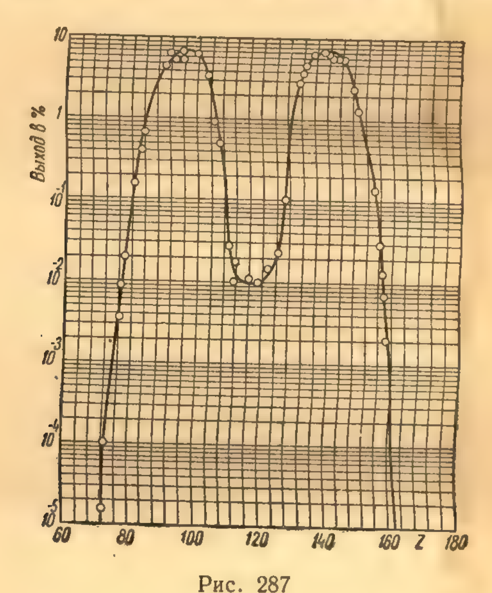


Рис. 287

нейтрона U^{235} сообщает ему энергию бо́льшую, чем необходимо для деления, что и приводит к его делению, а поглощение теплового нейтрона ядром U^{238} не может привести к делению, так как ядро получает энергию, недостаточную для деления. Однако если U^{238} поглощает быстрый нейтрон с энергией порядка 1 *Мэв*, то это дает ядру энергию около 6,37 *Мэв*, что достаточно для его деления. Объяснение различного поведения ядер U^{235} и U^{238} простое. Мы имеем дело с ядрами, находящимися на границе устойчивости, поэтому достаточно незначительного изменения одной из величин, чтобы ядро стало или устойчивым, или неустойчивым.

Совершенно естественно, что ядро U^{238} более устойчиво, чем ядро U^{235}: при одном и том же количестве протонов, обусловливающих одинаковое разрывающее усилие для ядер, ядро U^{238} имеет на три нейтрона больше, чем ядро U^{235}, поэтому ядерные силы — силы притяжения — сильнее компенсируют силы кулоновского отталкивания.

Осколки деления. Теория предсказывает, что при делении должны наблюдаться симметричные осколки, т. е. с равными массами и равными зарядами, однако, эксперимент показывает, что осколки не симметричны.

На рис. 287 приведена кривая, показывающая долю данного осколка среди всех возможных продуктов деления.

Кривая «выход—массовое число» показывает, что максимальный выход, равный 6%, соответствует $A = 95$ и $A = 139$. Симметричное деление имеет выход около 10^{-2}%, т. е. это очень редкое явление.

Практически не наблюдаются осколки с $A > 162$ и $A < 72$.

Ядерные излучения, испускаемые при делении. Анализ рис. 287 на основе таблицы Менделеева приводит к выводу, что наиболее вероятными осколками деления должны быть стронций $_{38}Sr$ и ксенон $_{54}Xe$. Однако эти ядра оказываются излишне богатыми нейтронами, вследствие чего за время порядка 10^{-12} *сек* происходит «испарение» нейтронов из продуктов деления.

Как показывают наблюдения, в среднем выделяется 2,3 вторичных нейтронов на каждый поглощенный нейтрон.

При делении ядра выделяется около 200 *Мэв* энергии. Эта энергия делится между продуктами деления — более легкая частица несет большую часть энергии (сравните с энергией снаряда и орудия), осколки находятся в возбужденном состоянии, поэтому они излучают γ-лучи.

Осколки, обладая большим зарядом, вызывают большую ионизацию и возбуждение молекул вещества, передают им свою энергию, что приводит к нагреванию среды, в которой протекает процесс деления.

Другие излучения играют меньшую роль, поэтому их можно не учитывать. Наличие мощных потоков сильно проникающего нейтронного и γ-излучения приводит к необходимости создания защиты от излучений.

Деление других ядер. Дальнейшие исследования показали, что ядра урана могут делиться не только под действием нейтронов, но и других частиц: γ-квантов, протонов, дейтонов. Использование снарядов большой энергии показало, что можно получить деление более легких частиц — висмута ($Z = 83$), свинца ($Z = 82$), таллия ($Z = 81$).

Спонтанное деление. Советские физики Флеров и Петржак нашли в 1940 г., что ядра урана способны испытывать самопроизвольное (спонтанное) деление с периодом $\sim 10^{16}$—10^{17} лет.

§ 19. Цепная ядерная реакция

Понятие цепной реакции. При делении ядер U^{235} в среднем на одно деление воспроизводится 2,3 новых нейтронов. Отсюда вытекает, что при определенных условиях в объеме U^{235} может возникнуть самоподдерживающая, или цепная реакция. Она может быть стационарной, или управляемой, или лавинообразно нарастающей, взрывного типа. Оба вида цепных реакций нашли практическое применение.

Неуправляемая реакция. Пусть в объеме, заполненном ураном, от какого-либо источника введен нейтрон. Если он вызвал деление, то появилось 2 (или 3) новых нейтрона. Если эти нейтроны вызовут деление, то вместо них образуется 4 (или 9) нейтронов, и т. д. — число нейтронов и число делений будет резко нарастать и в некотором объеме за короткое время будет выделена огромная энергия — произойдет взрыв. Однако не все нейтроны могут привести к последующему делению ядер. Часть нейтронов может быть захвачена примесями, содержащимися в ядерном горючем. Часть нейтронов может быть захвачена U^{238}, который не испытывает при этом деления. Часть нейтронов уйдет из объема, занимаемого ураном. Для уменьшения потерь в результате поглощения примесями ядерное горючее должно тщательно очищаться. Чтобы уменьшить непроизводительное поглощение изотопом U^{238}, необходимо использовать уран, обогащенный изотопом U^{235}. Но и при выполнении этих условий цепная реакция может не произойти. Для этого необходимо взять определенный объем делящегося материала — потери будут пропорциональны площади поверхности, а генерация нейтронов

пропорциональна массе, и, следовательно, объему делящегося вещества. Но с ростом массы вещества отношение числа генерируемых нейтронов к числу уходящих будет расти. Например, для образца в виде шара $V \sim R^3$, а $S \approx R^2$, так что $\frac{S}{V} \sim \frac{1}{R}$, т. е. доля потерь в результате ухода через поверхность будет уменьшаться с ростом массы делящегося вещества. Для вещества в таком случае существует определенная критическая масса m_k. Если $m < m_k$, то цепная реакция невозможна. По литературным данным критическая масса U^{235} оценивается в 900—1000 *г*.

Найдем количество энергии, выделяемой при полном делении 1 *кг* урана или плутония. В 1 *кг* U^{235} содержится $\frac{1000}{235}$ грамм-атомов или $\frac{1000}{235} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23}$ число атомов. Если принять, что при делении одного ядра выделяется $E \approx 200$ *Мэв*, то полная энергия, выделяющаяся при делении 1 *кг* U^{235} будет равна

$$E \approx \frac{1000}{235} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 10^{8} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}24 \cdot 10^{-3}\ \textit{ккал} = 2 \cdot 10^{10}\ \textit{ккал}.$$

Фактически происходит не полное деление вследствие того, что происходит разлет ядерного заряда и прекращение реакции. Бомба с зарядом ~ 1 *кг* считается «эталоном», ее эквивалентом является тротиловый заряд $\sim 20\,000$ *т*.

§ 20. Управляемая реакция деления. Понятие о ядерной энергетике

Понятие об управляемой реакции деления. Управляемая ядерная реакция, осуществляемая в реакторах или ядерных котлах, представляет собой контролируемый процесс деления.

В стационарном режиме число делений в единицу времени одно и то же. Это осуществляется тем, что коэффициент воспроизводства нейтронов делается равным 1. Это достигается введением в реактивный объем стержней из сильно поглощающего вещества, в основном, кадмия. Регулируя глубину их погружения и их число, можно в широких пределах менять коэффициент воспроизводства f, разгоняя или останавливая реактор.

Типы реакторов. В настоящее время разработаны различные типы ядерных реакторов, отличающиеся по принципу работы (реакторы на быстрых, средних, тепловых нейтронах), по виду замедлителей (на тяжелой воде, графите), по используемому топливу (урановые, ториевые, плутониевые), по целевому назначению (исследовательские, медицинские, силовые, для получения горючего и др.), по виду теплоносителя (водный, жидкостнометаллический).

Критическая масса. Важной характеристикой реактора является его критическая масса, т. е. количество вещества, способного обеспечить его нормальную работу, при которой возможна самоподдерживающая реакция. Она зависит от вида топлива, примесей, изотопного состава топлива, замедлителей, геометрии реактора и других факторов. В реакторах используются природные изотопы U^{235}, U^{238}, Th^{232} и искусственно получаемые U^{233}, Pu^{239}, Pu^{241}.

Тепловые реакторы. Тепловые реакторы работают на тепловых нейтронах, т. е. на нейтронах, имеющих энергию $\sim 0{,}025$ *эв*. Для получения тепловых нейтронов необходимо использовать замедлители — вещества с легкими атомами. Идеальным веществом был бы водород, однако он обладает большим сечением захвата нейтронов, поэтому обычно используют тяжелую воду или графит. По способу размещения горючего и замедлителя

различают гомогенные и гетерогенные реакторы. В первом топливо и замедлитель образуют однородную среду в виде раствора ядерного горючего и замедлителя или суспензии с размерами частиц, меньше длины свободного пробега нейтрона. В гетерогенных реакторах блоки или стержни ядерного горючего располагаются в виде правильной решетки.

В качестве теплоносителей используют воду, тяжелую воду, газ, органические соединения, щелочные металлы. На рис. 288 дана схема устройства гетерогенных реактора. Горючим в тепловых реакторах являются: U^{235}, U^{233}, Pu^{239}, Pu^{241}.

Промежуточные реакторы. В них используются нейтроны с энергией от 1 *эв* до нескольких *кэв*.

Реактор на быстрых нейтронах. В нем идет реакция деления на быстрых нейтронах, без их предварительного замедления. Его преимуществом является малый размер, большой выбор конструктивных материалов, так как сечение захвата при больших энергиях мало и потери невелики. В силу этого и для протекания реакции необходимы интенсивные потоки нейтронов. Принципиальным достоинством реакторов на быстрых нейтронах является использования в качестве горючего U^{238}, Th^{232}, способных делиться при энергии нейтронов около 1 *Мэв* и выше.

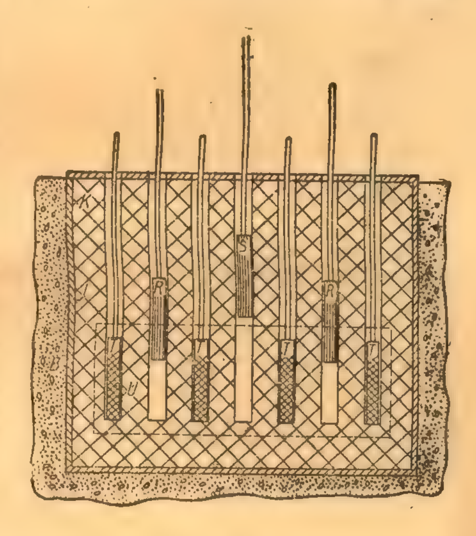


Рис. 288

Большим достоинством реакторов на быстрых нейтронах является расширенное воспроизводство ядерного горючего (Pu), поскольку при каждом делении выделяется 2—3 нейтрона, часть из которых при радиационном захвате U^{238} приводит к превращению его в Pu^{239}.

Силовой реактор. Промышленное использование ядерной энергии включает в себя решение нескольких задач. Выделение ядерной энергии происходит в ядерном реакторе. Для промышленных целей используются гомогенные и гетерогенные реакторы, реакторы на тепловых, промежуточных и быстрых нейтронах. Энергия, выделяющаяся при делении, заключена в кинетической энергии осколков деления, вторичных нейтронов и электромагнитного излучения. Движение осколков и нейтронов в среде приводит к передаче энергии атомам среды, что приводит к увеличению температуры среды. Следовательно, первое преобразование ядерной энергии состоит в превращении ее в тепловую энергию. Ядерный реактор является таким образом тепловыделяющим устройством. Тепловая энергия может быть превращена в электрическую как наиболее гибкую форму энергии обычным путем с помощью турбогенераторов. Для этого через реактор пропускают теплоноситель — вода, расплавленный щелочный металл (натрий, калий), сжатый газ. Теплоноситель обычно находится в замкнутом контуре, совершая циркуляцию через реактор и парообразователь. В парообразователе происходит передача тепла от теплоносителя первого контура потоку воды во втором контуре. Образовавшийся пар направляется в паровую турбину генератора. Использование двух водных контуров необходимо потому, что в первом контуре используется вода многократной дистилляции, так как имеющиеся в воде примеси могут обладать большим эффективным сечением поглощения ней-

16 Зак. 1783

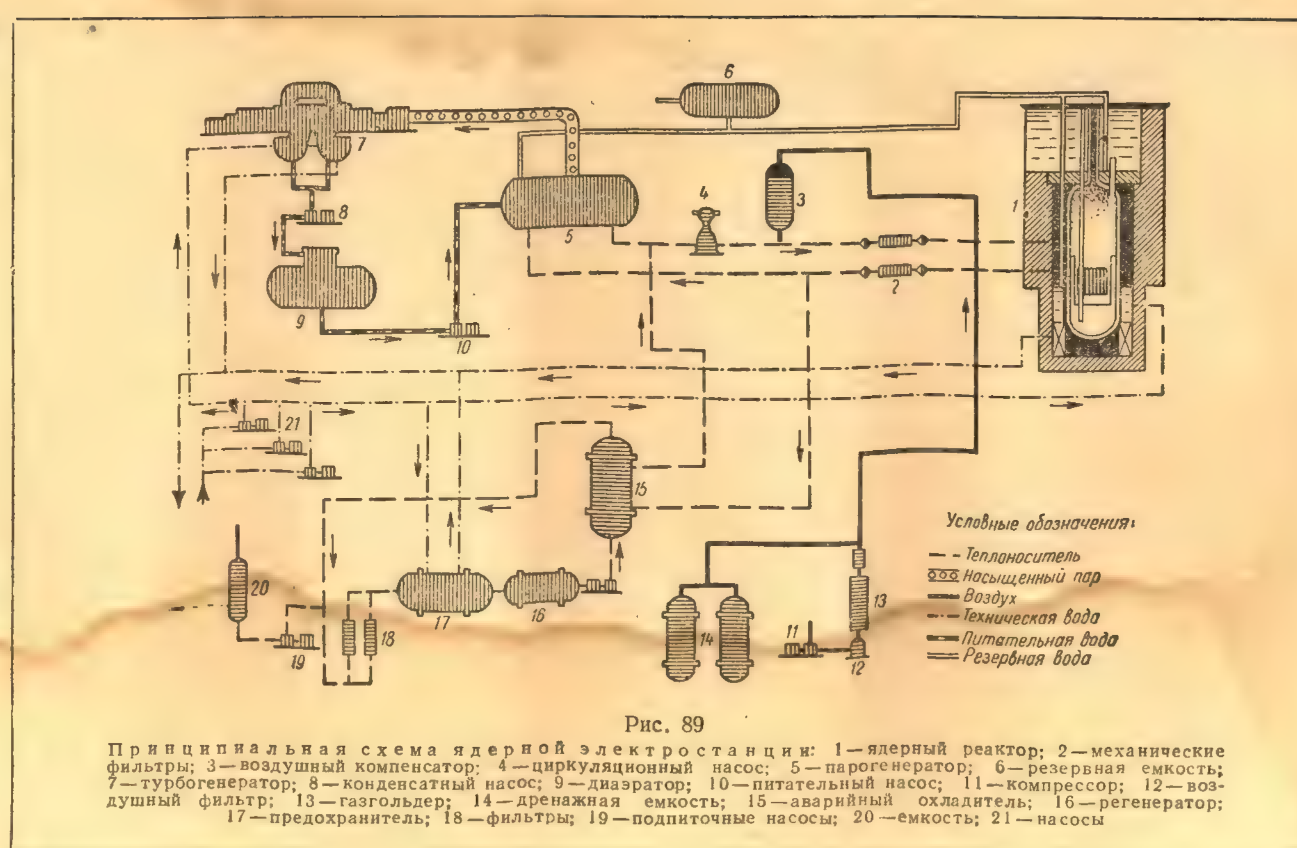


Рис. 89

Принципиальная схема ядерной электростанции: 1 — ядерный реактор; 2 — механические фильтры; 3 — воздушный компенсатор; 4 — циркуляционный насос; 5 — парогенератор; 6 — резервная емкость; 7 — турбогенератор; 8 — конденсатный насос; 9 — диаэратор; 10 — питательный насос; 11 — компрессор; 12 — воздушный фильтр; 13 — газгольдер; 14 — дренажная емкость; 15 — аварийный охладитель; 16 — регенератор; 17 — предохранитель; 18 — фильтры; 19 — подпиточные насосы; 20 — емкость; 21 — насосы

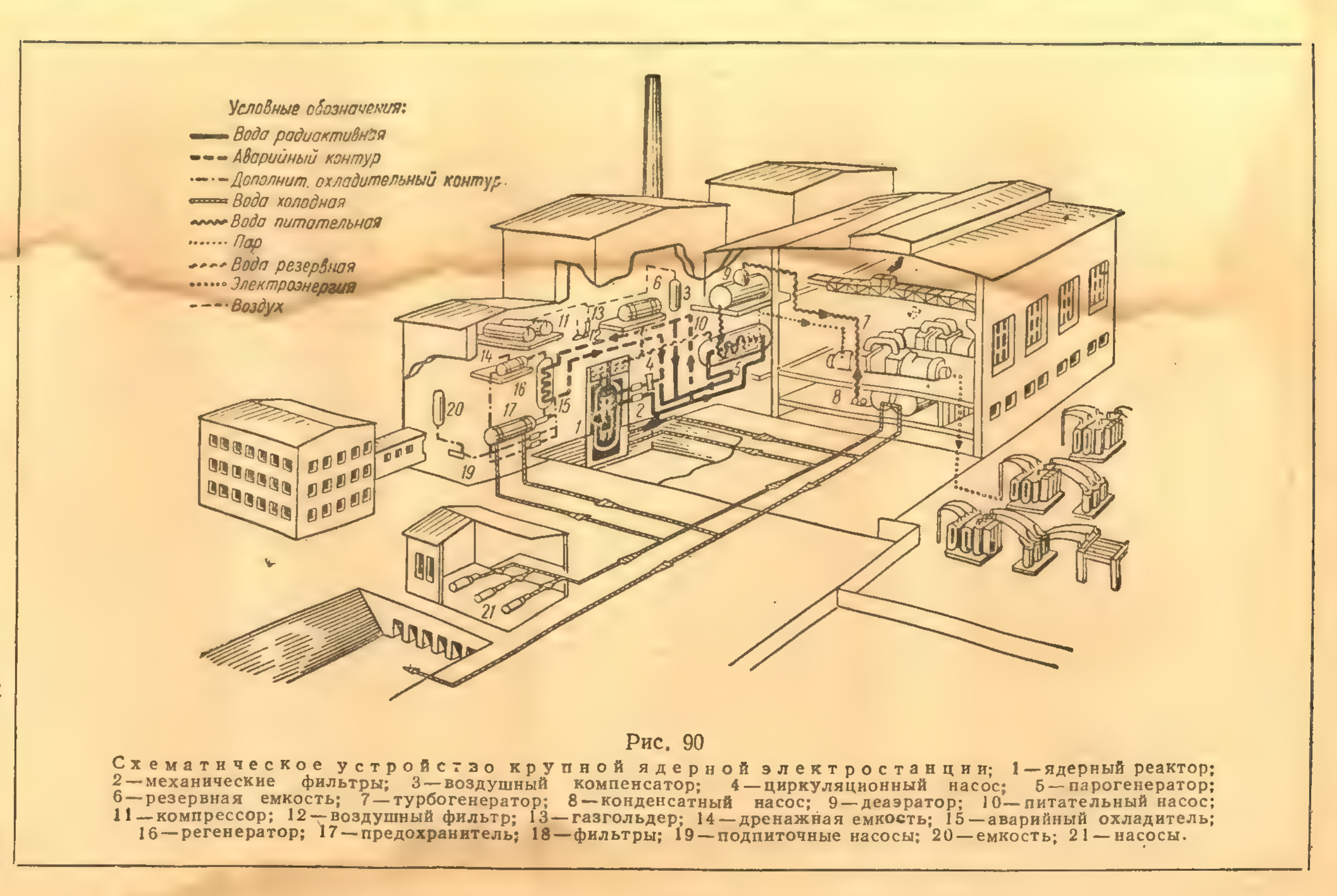


Рис. 90

Схематическое устройство крупной ядерной электростанции; 1—ядерный реактор; 2—механические фильтры; 3—воздушный компенсатор; 4—циркуляционный насос; 5—парогенератор; 6—резервная емкость; 7—турбогенератор; 8—конденсатный насос; 9—деаэратор; 10—питательный насос; 11—компрессор; 12—воздушный фильтр; 13—газгольдер; 14—дренажная емкость; 15—аварийный охладитель; 16—регенератор; 17—предохранитель; 18—фильтры; 19—подпиточные насосы; 20—емкость; 21—насосы.

тронов, что может привести к нарушению работы реактора и к образованию большего количества радиоактивных веществ, которые могут создавать большую опасность для людей. В случае других теплоносителей необходимость двух контуров очевидна. На рис. 289, 290 приведена принципиальная схема силовой установки. В настоящее время атомные электростанции мощностью в сотни тысяч киловатт работают во многих странах (СССР, Англия, США). Ядерные реакторы используются в качестве двигателей в атомном ледоколе «Ленин», подводной лодке «Наутилус» (США). Имеются сообщения о создании проектов различных кораблей и в других странах (Япония, Бразилия и др.). В авиации ядерная энергия не нашла еще практического применения. Проводимые опыты не вышли еще из стадии наземных испытаний. Основная трудность состоит в том, что защита летного состава от излучения делает самолет «неподъемным». Однако можно ожидать, что в ближайшее время эта задача будет решена как для самолетных, так и для ракетных двигателей.

В реакторах имеются нейтронные потоки большей мощности. Это позволяет получать в них большое число различных радиоизотопов, находящих как мирное применение, так и военное (БРВ). Ядерные реакторы позволяют получить и ядерное горючее. Одним из таких способов является получение Pu^{239} из U^{238}. Уран U^{239}, захватив нейтрон, становится β^--радиоактивным, он превращается в нептуний Np^{239} с периодом в 23 *мин*:

$$_{92}U^{239} \rightarrow {}_{93}Np^{239} + e^-.$$

Но Np^{239} испытывает еще одно β^--радиоактивное превращение, превращаясь в $_{94}Pu^{239}$. Плутоний $_{94}Pu^{239}$ является одним из широко используемых ядерных горючих. Он радиоактивен с периодом полураспада 24 100 лет.

Уран $_{92}U^{233}$ получается в реакторе по следующей схеме:

$$_{90}Th^{232} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{90}Th^{233} \xrightarrow[\beta^-]{23\ мин} {}_{91}Pa^{233} \xrightarrow[\beta^-]{27\ дн} {}_{92}U^{233}.$$

Период полураспада U^{233} составляет 163 000 лет. Большие периоды распада позволяют накапливать большие запасы этих веществ. Уран U^{235} получается в сепараторах из естественной смеси урана.

§ 21. Термоядерные реакции

Реакции синтеза. Ядерную энергию можно получать не только в результате деления тяжелых ядер, но и путем синтеза легких ядер. Практическое осуществление получили только реакции синтеза ядер гелия из ядер водорода и лития. Для слияния, например, двух ядер дейтерия в ядро гелия им необходимо сообщить энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера. Другими словами, чтобы ядра дейтерия могли сблизиться до расстояний, на которых начинают действовать ядерные силы, они должны преодолеть силы кулоновского отталкивания. Высоту потенциального барьера можно оценить из следующих соображений: радиус действия ядерных сил дейтерия составляет величину порядка $1{,}8 \cdot 10^{-13}$ *см*, следовательно, чтобы ядерные силы могли сблизить дейтоны, они должны подойти друг к другу на расстояния между их центрами $4 \cdot 10^{-13}$ *см*. При этом расстоянии между центрами энергия кулоновского взаимодействия составит приблизительно 400 *кэв*. Данная величина и определяет высоту потенциального барьера при сближении двух ядер дейтерия. Однако синтез может произойти и в том случае, когда энергия дейтонов будет меньше высоты потенциального барьера — в этом случае сближение ядер будет осуществляться путем туннельного эффекта. Но прозрачность барьера резко зависит от энергии сближающихся частиц. Сообщить необходимую энергию большому числу ядер дейтерия можно путем создания высокой температуры. Так как средняя энергия частиц при тепловом движении составляет 3/2 kT, а 1 *эв* эквивален-

тен энергии теплового движения при температуре около 11 400° К, то дейтоны будут иметь энергию в 400 *кэв* при температуре 10^{10} °К. Однако для протекания реакции синтеза достаточно создать температуру 10^8 °К. Это связано с двумя факторами: во-первых, синтез начнется в результате туннельного эффекта, во-вторых, температура определяет среднюю энергию, тогда как вследствие максвелловского распределения частиц по энергиям небольшая доля их будет иметь энергию значительно большую средней, что обеспечит необходимое число реакций. В силу того, что энергия сообщается частицам в результате нагрева, реакции синтеза называют термоядерными реакциями. Создание высокой температуры внешними источниками необходимо лишь в первый момент, для начала реакции. После того, как реакция разовьется, она может поддерживать себя сама за счет выделения энергии при реакциях синтеза.

Термоядерное горючее. В качестве термоядерного горючего может использоваться целый ряд веществ. Возможно протекание следующих реакций:

$$_1H^1 + {_1T^3} \rightarrow {_2He^4} + 19{,}8 \text{ Мэв},$$
$$_1D^2 + {_1T^3} \rightarrow {_2He^4} + {_0n^1} + 17{,}6 \text{ Мэв},$$
$$_3Li^6 + {_1D^2} \rightarrow 2{_2He^4} + 22 \text{ Мэв}.$$

Наибольшую энергию на единицу массы можно получить при проведении первой реакции, наименьшую — при третьей реакции. Однако наибольшее эффективное сечение имеет вторая реакция, которая может протекать, следовательно, при меньшей температуре $\sim(10^7$°К). Возможны и другие процессы, приводящие к образованию ядер гелия из ядер изотопов водорода или лития.

Неуправляемые термоядерные реакции. В земных условиях термоядерные реакции осуществлены только в виде неуправляемых, лавинонарастающих, приводящих к выделению колоссальной энергии в миллионные доли секунды. Термоядерные неуправляемые реакции использованы и осуществлены только в виде термоядерного оружия. В качестве заряда может использоваться смесь жидких трития и дейтерия. Однако недостатком этих веществ является необходимость сложной теплоизоляции (температура кипения жидких трития и дейтерия составляет 18—20° К). Газообразные продукты занимают большой объем. Значительные удобства представляет последняя реакция. В этом случае взрывчатая смесь может быть в виде твердого вещества —дейтерида лития LiD. В реальных условиях реакция с дейтеридом лития может протекать более сложно, например, происходит не непосредственное соединение ядер лития и дейтерия, а образование трития из лития с последующим протеканием реакции между тритием и дейтерием.

Получение термоядерного горючего не представляет принципиальных трудностей. Дейтерий получается электролизом тяжелой воды, которую в свою очередь получают при электролизе обычной воды. Запасы дейтерия практически неограничены (воды морей и океанов). Тритий получается в ядерных реакторах при облучении лития $_3Li^6$ нейтронами:

$$_3Li^6 + {_0n^1} \rightarrow {_2He^4} + {_1T^3}.$$

Недостатком трития является его радиоактивность, в результате которой он превращается в легкий изотоп гелия с периодом полураспада в 12,5 лет:

$$_1T^3 \rightarrow {_2He^3} + \beta^- + \tilde{\nu}.$$

Это означает, что через 12,5 лет запасы трития уменьшаются наполовину.

Роль термоядерных реакций в жизни Вселенной. Термоядерные реакции являются, по-видимому, одним из источников энергии звезд и солнца. Выделение энергии может протекать различными путями. Одним из таких путей является углеродно-азотный цикл, указанный в 1939 г. Бете:

$$ {}_6C^{12} + {}_1H^1 \rightarrow {}_7N^{13} + \gamma; \quad {}_7N^{13} \rightarrow {}_6C^{13} + e^+; $$
$$ {}_6C^{13} + {}_1H^1 \rightarrow {}_7N^{14} + \gamma; $$
$$ {}_7N^{14} + {}_1H^1 \rightarrow {}_8O^{15} + \gamma; \quad {}_8O^{15} \rightarrow {}_7N^{15} + e^+; $$
$$ {}_7N^{15} + {}_1H^1 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_2He^4. $$

В результате протеканий этого цикла из четырех ядер водорода происходит образование одного ядра гелия — сгорание водорода с образованием гелия. Количество углерода при этом не меняется; он играет роль катализатора. Этот цикл протекает стационарно при температурах в десятки миллионов градусов в недрах горячих звезд в течение миллионов лет. Внутри более холодных звезд и Солнца возможно протекание другого цикла — протонно-протонного (Бете и Кричфилд, 1938 г.):

$$ 2({}_1H^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_1D^2 + e^+ + \nu); \quad 2({}_1D^2 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^3 + \gamma); $$
$$ 2He^3 \rightarrow 2{}_1H^1 + {}_2He^4. $$

Этот процесс также приводит к образованию ядра гелия из четырех ядер водорода. При этом на каждое ядро гелия выделяется около 26 *Мэв* энергии, что составляет 700 000 *квт-ч* на каждые 4 *г* гелия.

Управляемые термоядерные реакции. Проблема создания управляемых реакций является в настоящее время одной из важнейших проблем не только физики, но и энергетики, поскольку их создание решает задачу обеспечения человечества энергозапасами практически навсегда. Известно несколько направлений, в которых проводится работа по созданию управляемых термоядерных реакций. В настоящее время фронт работ резко расширен, и они проводятся в целом ряде стран (СССР, Англия, США, Франция и др.). Основная задача в создании управляемых термоядерных реакций состоит в получении высокой температуры — в десятки и сотни миллионов градусов — в некотором объеме, заполненном дейтерием или смесью его с тритием. При высокой температуре газ будет полностью ионизован, такое состояние газа называется плазмой. Для получения высокотемпературной плазмы используются различные методы.

Ударные волны. Одним из простейших способов получения высокотемпературной плазмы является метод ударных волн. Труба заполняется некоторым газом при небольшом давлении. На одном конце трубы в малом объеме, отделенном от основного объема металлической диафрагмой, содержится взрывчатая смесь (гремучий газ). При ее взрыве диафрагма разрывается и волна сжатия распространяется по трубе. Наибольшая температура возникает при ударе газа о противоположную стенку трубы. Достигаемая при этом температура составляет десятки тысяч градусов. Эти опыты позволяют судить о поведении газа при невысоких температурах, что важно знать при решении задач создания термоядерных реакций, а также для реактивной техники. К ударным волнам относятся методы получения высоких температур с помощью кумулятивных взрывов. На ампулу, содержащую дейтерий или его смесь с тритием, направляются кумулятивные струи от обычного взрывчатого вещества (тринитротолуол или любое другое не менее мощное взрывчатое вещество). Возникающая при этом температура оказывается достаточной для протекания термоядерной реакции как $D + T$, так и LiD. При этом выделяется большое количество энергии; регистрирующая аппаратура оказывается уничтоженной.

Кумулятивный взрыв может служить запалом и в водородной бомбе (так называемые «чистые» бомбы).

Взрыв проволочек. Вторым методом является метод взрыва тонких проволочек. В вакууме между двумя электродами располагается тонкая проволочка, через которую пропускают большой импульс тока (от конденсатора). Мгновенное выделение большой энергии приводит к распылению проволоки. Образовавшаяся плазма имеет высокую температуру,

Некоторым видоизменением метода является метод «рельс». В вакууме между двумя параллельными электродами располагается тонкая проволочка. Проволочка взрывается разрядом от конденсатора. Возникающее магнитное поле выталкивает разряд вдоль электродов, разрядная плазма начинает двигаться вдоль электродов как по рельсам и может быть ускорена до скоростей $5 \cdot 10^7$ *см/сек*.

Метод электродинамического сжатия (пинч-эффект). Для получения и поддержания плазмы при температуре в несколько десятков миллионов градусов ее необходимо изолировать от стенок сосуда, в котором она создана. В противном случае энергия, запасенная в плазме, будет израсходована на испарение стенок камеры и потери через теплопроводность. Эти потери могут сделать невозможным вообще получение необходимых высоких температур. Для термоизоляции плазмы в первых опубликованных работах (СССР, идея Тамма и Сахарова) использовался принцип сжатия плазмы собственным магнитным полем (пинч-эффект). Известно, что параллельные токи притягиваются. Если в цилиндрической разрядной камере зажечь разряд, то он начнет сжиматься, приближаясь к оси. Сжимающийся разрядный слой, состоящий из электронов, ионов и увлекаемых ими остаточных атомов газа, ускоряясь, достигает центра, где происходит «схлапывание» движущихся слоев, резкое повышение давления и температуры вследствие перехода кинетической энергии направленного движения слоя плазмы в тепловую энергию. Возникшее высокое давление и температура приводит к расширению плазмы. Подобные пульсации могут происходить несколько раз. На вольтамперных характеристиках разряда в момент сжатия наблюдаются некоторые «особенности», обусловленные уменьшением тока вследствие возрастания индуктивности шнура при его сжатии. В моменты сжатия наблюдаются импульсы рентгеновых лучей с энергией до 400 *кэв* при напряжении на батарее конденсаторов всего в 40 *кэв* и импульсы нейтронов, создаваемые ускоренными электронами, расщепляющими дейтерий. Реакция синтеза может быть исследована при достижении числа нейтронов в импульсе порядка 10^{12}. Температура, достигнутая в этих опытах, оценивается в 3—10 миллионов градусов по формуле (в *кэв*):

$$T = 4{,}6 \cdot 10^{12} \frac{I^2}{N},$$

где I — сила тока в момент сжатия, N — число частиц одного знака на единице длины плазменного шнура. Оценка температуры по доплеровскому расширению контура спектральных линий дает $T \sim 10^{6}$°К. При масс-спектрометрическом методе исследования быстрых частиц, рождающихся в плазме, было найдено, что энергия дейтонов достигает 200 *кэв*.

Импульсные разряды короткой длительности характеризуются следующими параметрами: напряжение на батарее конденсаторов до 120 *кв* максимальная сила тока до 2 миллионов ампер, скорость нарастания тока в начале процесса 10^{11}—10^{12} *а/сек*, энергия, запасенная в батарее конденсаторов до 10^6 *дж*, длительность импульса несколько десятков микросекунд. Дальнейшие исследования должны проводиться при скоростях нарастания тока — 10^{13} *а/сек* и бо́льших запасах энергии в конденсаторе. Основное магнитогидродинамическое уравнение для подобных установок имеет вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] - \operatorname{grad} p.$$

где ρ — плотность плазмы, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, p — газокинетическое давление. Для начальной фазы, когда происходит ускорение плазмы как целого (локально), второй член много меньше первого. В противоположном случае, когда ускорение плазмы мало, например, в момент полного сжатия, инерционный член мал, и электродинамическое сжатие уравновешивает газокинетическое давление плазмы.

Получение ускоренно движущихся сгустков плазмы можно проводить не только за счет собственного магнитного поля, как в пинч-эффекте, но и внешним полем. Одним из таких методов является получение сгустков плазмы в неоднородном магнитном поле, изменяющемся во времени. Неоднородное («бочкообразное») нарастающее магнитное поле приводит к созданию кольцевого разряда, который под действием этого поля начинает сжиматься. Образовавшийся сгусток плазмы имеет температуру 100—200 *эв* в результате превращения кинетической энергии в тепловую.

Разряды в тороидальных камерах. Метод медленно нарастающих разрядов в тороидальных разрядных камерах позволяет получить температуру в несколько миллионов градусов. В этом случае металлическая разрядная камера, состоящая из нескольких изолированных секций, содержит дейтерий. На камеру равномерно намотана обмотка, питаемая постоянным током, который создает магнитное поле вдоль оси тороида. Плазма создается в результате разряда батареи конденсаторов на первичную обмотку трансформатора, состоящую из нескольких витков, вторичной обмоткой является газовый объем тороида. Возникающий кольцевой разряд сжимается собственным магнитным полем, при этом осуществляется его термоизоляция и нагревание. Внешнее магнитное поле служит целям стабилизации разрядного шнура.

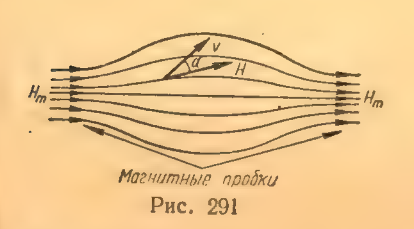


Рис. 291

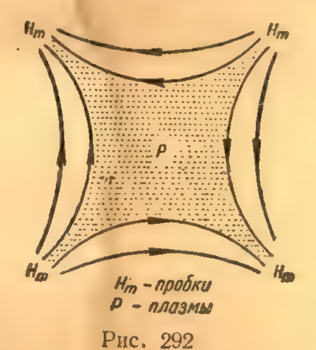


Рис. 292

Магнитные ловушки. В методах, известных под названием магнитных ловушек, на долю магнитного поля отводится задача удержания плазмы в определенном объеме. Магнитное поле создается внешними источниками. Получение плазмы и ее нагревание осуществляется с помощью других источников. Принцип действия ловушки можно понять из рис. 291. Бочкообразное магнитное поле возрастает вдоль силовых линий в обе стороны от некоторой средней области, где величина поля минимальна. Частица, имеющая, некоторую энергию, будет заперта в этой области, если ее скорость лежит вне углового интервала α, определяемого условием:

$$\sin\alpha > \sqrt{\frac{H_1}{H_{макс}}}$$

(условие получается на основе принципа адиабатической инвариантности). Если же угол между направлением скорости и силовой линией меньше α, то частица уйдет из ловушки. Более надежной является ловушка с конфигурацией поля, показанной на рис. 292. Основным условием работы магнитных ловушек является неравенство:

$$p < \frac{H^2}{8\pi},$$

т. е. газокинетическое давление p должно быть много меньше магнитного давления. Получение ионов в ловушке может осуществляться различными способами, например, ионы накачиваются в ловушку из ускорительного устрой-

ства, или ионы ускоряются в ловушке переменным электромагнитным полем. К магнитным ловушкам относится и стелларатор-тороидальная камера, перевернутая в виде восьмерки, которая является основой для обмотки, создающей магнитное поле вдоль оси тороида. Магнитное поле осуществляет термоизоляцию плазмы (ионы движутся по винтовым линиям вдоль силовых линий поля), перекручивание магнитного поля должно обеспечить снижение потерь частиц вследствие дрейфа их, перпендикулярно полю и градиенту поля (поле в тороиде неоднородно по радиусу тороида). Энергия сообщается ионам переменным магнитным полем, осуществляющим сжатие и расширение плазмы в некотором объеме с помощью дополнительной обмотки, питаемой переменным током (метод «магнитной накачки»).

Методы практического использования энергии термоядерных реакций. Несмотря на то, что управляемые термоядерные реакции еще не осуществлены, существуют различные проекты использования энергии этих реакций. В установках, в которых сжатие плазмы осуществляется с помощью магнитного поля, термоядерную энергию можно превращать непосредственно в электрическую энергию: при сжатии энергия магнитного поля переходит в кинетическую энергию плазмы, возникшая в результате этого термоядерная реакция приводит к выделению энергии, возрастанию температуры и давления и к расширению плазмы, но расширение плазмы будет происходить против удерживающих плазму сил магнитного поля, поэтому при расширении энергия плазмы будет превращаться в энергию магнитного поля. Но энергия магнитного поля непосредственно может быть превращена в энергию электрического тока. Другой возможный метод состоит в следующем. Реакция возбуждается в смеси дейтерия и трития (реакция $D + T$ имеет в сто раз большее эффективное сечение, чем реакция $D + D$, и требует оптимальную температуру 15 *кэв* ($1{,}5\cdot10^8$ *град*) вместо 50 *кэв* ($5\cdot10^8$ *град*) для $D + D$ реакции). При этом на каждый акт $D + T$ возникает нейтрон с энергией 14,1 *Мэв*. Нейтрон попадает в оболочку, по которой протекает вода и при упругом столкновении почти полностью передает свою энергию водороду. Водород, получив энергию нейтрона, приводит к нагреванию воды, которая при циркуляции переносит тепло в парообразователь обычной тепловой машины. В связи с расходованием трития — дорогостоящего материала—возникает проблема его регенерации. Термоядерные реакции позволяют это осуществить. Нейтроны, образующиеся при термоядерной реакции, поглощаются слоем бериллия или свинца, висмута или другого материала, в котором легко осуществляется реакция (n, $2n$), в результате чего поток нейтронов увеличивается. Возросший поток нейтронов поглощается в $_3Li^6$, в котором они дают обычную реакцию с образованием трития. Таким образом при работе термоядерного реактора может осуществляться расширенное воспроизводство термоядерного горючего (трития).

§ 22. Космические лучи

Понятие космических лучей. Космическими лучами называются лучи, приходящие на Землю из космического пространства. Это излучение слабо зависит от времени дня или ночи, не связано с положением каких-либо звезд на небесном своде, поэтому считают, что космические лучи приходят из любых точек Космоса с одинаковой интенсивностью.

Зависимость интенсивности космического излучения от высоты. С ростом высоты интенсивность космического излучения вначале растет, затем начинает уменьшаться. И после достижения некоторой величины остается практически постоянной.

Геомагнитный эффект. Широтный эффект. Восточно-западная аномалия. Лучи, достигающие земной поверхности, имеют некоторую минимальную энергию. Это связано с тем, что Земля окружена магнитным полем. Заряженная частица, входящая в магнитное поле Земли, будет взаи-

модействовать с ним, в результате чего частица может не достичь поверхности Земли. Частицы, совершая сложное движение, будут стекать вдоль силовых линий магнитного поля к полюсам. Минимальная энергия, с которой частица может достичь поверхности Земли при нормальном падении, определяется широтой φ:

$$E = 1{,}9 \cdot 10^{10} \cos^4 \varphi \ \textit{эв}.$$

В связи с тем, что минимальная энергия, с которой частицы могут достичь Земли, уменьшается с ростом широты, интенсивность космического излучения возрастает с ростом широты: на экваторе она меньше, чем на полюсе. Это явление носит название широтного эффекта и связано с существованием магнитного поля Земли. Интенсивность космического излучения, распространяющегося в западном направлении, больше интенсивности космического излучения, распространяющегося в восточном направлении (восточно-западная аномалия). Аномалия связана с природой космического излучения. Она говорит о том, что число положительных частиц в космическом излучении больше числа отрицательных частиц.

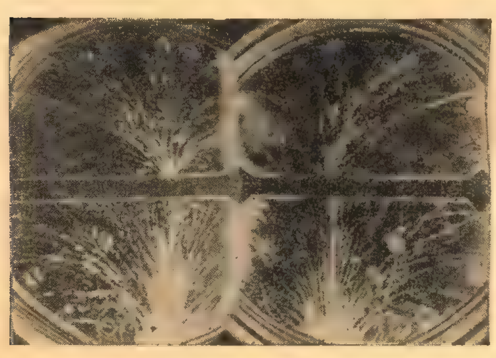


Рис. 293

П е р в и ч н о е и в т о р и ч н о е и з л у ч е н и е. Излучение, наблюдаемое на высоте в несколько десятков километров, называется первичным. Оно состоит в основном из протонов (до 91%), (α-частиц 7,5%) и ядер легких (до $Z<41$) элементов. Первичное излучение представляет собой излучение, приходящее на землю из Космоса. Вторичное излучение представляет собой продукты взаимодействия первичного излучения с атмосферой Земли. Оно состоит из электронов, позитронов, мезонов, фотонов.

М я г к а я и ж е с т к а я к о м п о н е н т ы к о с м и ч е с к и х л у ч е й. Изучая кривую поглощения космических лучей, физики обратили внимание, что их интенсивность с ростом толщины поглощающего слоя вначале падает быстро, затем очень медленно. Это говорит о том, что в составе вторичных космических лучей имеется сильно поглощаемая компонента (мягкая составляющая) и мало поглощаемая компонента (жесткая составляющая). Мягкая компонента состоит из электронов, позитронов и фотонов. Жесткая — из мезонов (в основном мюонов). О энергии и проникающей способности жесткой составляющей говорят опыты с погружением счетчиков на дно Баденского озера, на глубину до одного километра, где космические лучи были зафиксированы надежно.

М е т о д ы и з у ч е н и я к о с м и ч е с к и х л у ч е й. Космические лучи как потоки частиц большой энергии изучаются в принципе теми же методами, что и различные ядерные излучения. К этим методам относятся: камеры Вильсона в магнитном поле; счетчики, включаемые, как правило, в схемах совпадений; фотоэмульсии.

Камеры Вильсона позволяют определять импульс и знак заряда частиц; фотоэмульсии — пробег, тип частиц по толщине трэка, счетчики — наличие частиц, времена жизни и другие параметры. В последние годы большой материал получен при размещении регистрирующей аппаратуры на высотных ракетах и спутниках Земли.

Л и в н и. Одно из своеобразных и специфических явлений, наблюдаемых с космическими лучами, относится к образованию потоков частиц —

ливней. Ливни наблюдаются при прохождении частиц через любое вещество, но обычно они наблюдаются при прохождении космических частиц через тяжелые элементы, например, пластины свинца. Если в камере Вильсона поместить свинцовую пластинку, то приблизительно в 20 снимках из 100 наблюдается образование каскадных ливней: десять-двадцать частиц вылетают из пластины как бы из одного места. Теория образования каскадных ливней построена Ландау, Таммом и Беленьким. Картина образования ливня сводится к следующему. Релятивистский электрон, проходя в веществе, будет испытывать торможение в поле ядер, что приведет к излучению им γ-кванта в направлении своего движения. γ-квант порождает пару электрон — позитрон с большой энергией. Тройка заряженных частиц порождает в свою очередь γ-кванты с энергией, приблизительно равной половине их энергии, фотоны в свою очередь порождают пары электрон—позитрон. Совокупность электронов, позитронов и γ-квантов и образует ливень, называемый каскадным по механизму своего образования. На рис. 293 приведена фотография в камере Вильсона одного из ливней. Ливни могут образовать и мезоны и нейтральные частицы.

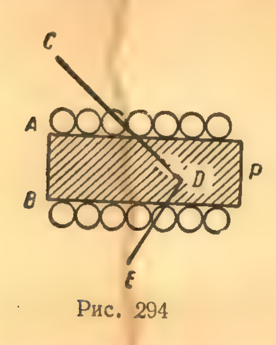


Рис. 294


Рис. 295

Ливни Оже. Оже обнаружил ливни, которые занимают огромные площади. Счетчики, разнесенные на расстояния до километра, дают совпадение отсчетов. Энергия первичных частиц, вызывающих подобные ливни, оценивается величиной 10^{16}—10^{17} *эв* (!) при «средней» энергии космических лучей порядка 10^{10} *эв*. Наличие частиц с такой энергией позволяет проводить ряд интересных исследований с космическими лучами, поскольку эта энергия превосходит энергию частиц в современных ускорителях в десятки миллионов раз.

Распад мезонов. Мезоны впервые были открыты в космических лучах. То, что мезоны не могут входить в состав первичного излучения, вытекает из их радиоактивности. Распад мезонов наблюдается в камерах Вильсона. Время жизни мезонов измеряется с помощью различных радиотехнических схем со счетчиками. Схема измерения времени жизни представлена на рис. 294. P-пластина плотного вещества, в котором происходит поглощение мезонов, A и B ряды счетчиков, соединенных параллельно; C — траектория мезона, застрявшего в поглотителе, E — траектория продукта распада мезона. Время жизни покоящегося мезона определяется по интервалу времени между сигналами от блока счетчиков A, фиксирующего вхождение в поглотитель мезона, и блока B, фиксирующего выход из поглотителя продукта распада. Если обозначить период полураспада покоящегося мезона через τ_0, то период полу-

распада движущегося мезона оказывается большим при измерении «покоящимся» наблюдателем в силу релятивистской зависимости времени от скорости движения:

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Это объясняет тот факт, что мезоны, рожденные в атмосфере на высоте в несколько километров, могут достигать поверхности Земли. Время пролета τ в десятки раз превышает время жизни покоящегося мезона $\tau_0 \approx 2$ *мк/сек*.

Мезоны космических лучей так же, как и мезоны, получаемые на ускорителях, при встрече с ядрами могут приводить к расщеплению ядра с образованием звезд (рис. 295).

§ 23. Элементарные частицы

В настоящее время процесс познания природы материи сведен в основном к познанию свойств некоторой совокупности частиц, носящих название элементарных. Название отражает тот факт, что они не состоят из каких-либо других частиц, они неразложимы далее, но вместе с тем их основное свойство — взаимопревращаемость.

Основные характеристики элементарных частиц. К основным характеристикам элементарных частиц относятся: масса, заряд, спин, магнитный момент, время жизни. К числу элементарных частиц относятся: электрон, протон, нейтрон, фотон, мезоны, гипероны, нейтрино, странные частицы и античастицы некоторых из перечисленных частиц.

Фотон является элементарным носителем электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами. Сам он не имеет заряда. Его энергия определяется его частотой:

$$E = h\nu,$$

масса

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c},$$

импульс

$$mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Он имеет вращательный момент-спин, равный 1 (в $\hbar$). Фотон может существовать только в движении со скоростью $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, он не имеет массы покоя: $m_0 = 0$, его невозможно «остановить», он не может служить началом отсчета. Фотон имеет одну и ту же скорость — c в любой инерциальной системе координат. Фотон является бозоном, т. е. подчиняется статистике Бозе—Эйнштейна. При взаимодействии с веществом он может испытывать упругие или неупругие столкновения. Фотонов в атоме, ядре в «готовом» виде нет, они порождаются в момент перестройки структуры атома, молекулы, ядра.

Электрон является элементарным устойчивым носителем отрицательного заряда (—1) (в $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ $СГСЭ_q$), стабилен. Масса покоя $m_0 = 9{,}108 \cdot 10^{-28}$ *г* является основной мерой массы элементарных частиц. Спин его 1/2, он подчиняется статистике Ферми—Дирака, является фермионом, для него справедлив принцип запрета Паули. Электрон описывается полувекторным уравнением Дирака, из которого вытекает наличие антиэлектрона, который получил название позитрона.

Позитрон как античастица электрона имеет массу покоя $m_0 = 9{,}108 \cdot 10^{-28}$ *г*, спин 1/2, заряд (+1). Магнитный момент его совпадает по направлению со спином. Позитроны были открыты впервые в 1932 г. Андерсеном, Блэкетом и Оккиалини при исследовании космических лучей. Вскоре пары электрон — позитрон были обнаружены в камере Вильсона при облу-

чении ее γ- лучами с энергией более 1 *Мэв.* На рис. 296 приведена картина образования пар в камере Вильсона, заполненной криптоном и помещенной в магнитное поле так, что позитрон отклоняется вправо, а электрон — влево. Позитроны не долговечны. При встрече с электроном они аннигилируют, образуя два γ-фотона с энергией не менее 0,511 *Мэв* каждый.

П р о т о н, или ядро легкого изотопа водорода, является элементарным носителем единичного (+ 1) положительного заряда. Его масса $M_p = 1836,13\, m_0$, спин равен 1/2, магнитный момент $\mu_p = 2,79\, \mu_я$, где $\mu_я$—ядерный магнетон Бора, $\mu_я = \frac{e\hbar}{2M_p c}$. Протон стабилен, в свободном состоянии протон захватывает электрон, образуя атом водорода. Он является одним из составных частей всех ядер. Протоны ядра могут превращаться в нейтроны с испусканием позитрона и нейтрино:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu.$$

Превращение протона в нейтрон в ядре приводит к позитронной радиоактивности, которая наблюдается у многих искусственно радиоактивных веществ.

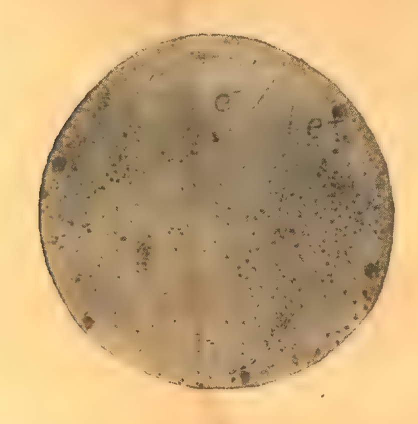


Рис. 296

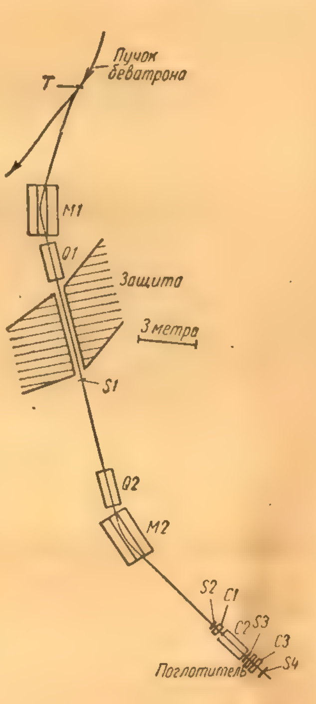


Рис. 297

А н т и п р о т о н. Теория Дирака позволяет ожидать, что протон может иметь античастицу, которая должна иметь отрицательный заряд. Для создания пары протон — антипротон необходима энергия $2M_pc^2 = 1872$ *Мэв.* Этой энергии достаточно в системе центра инерции пары, т. е., если соударяющиеся частицы с равными массами движутся навстречу друг другу с одинаковыми энергиями, около 940 *Мэв.* Но если ядро-мишень покоится, а ядро-снаряд движется, то минимальная энергия, необходимая для создания пары, должна быть больше. Это связано с законом сохранения импульса — при ударе «снаряда» ядро-мишень будет двигаться, на создание этого движения требуется дополнительная энергия.

Пороговое значение кинетической энергии частицы снаряда с массой m_1, падающей на покоящуюся частицу с массой m_2 для создания пары частиц с массами M, равно:

$$T = 2\,\frac{Mc^2 (m_1 + m_2 + M)}{m_2}\,.$$

Для создания пары нуклонов, например, $M = m_p$ при столкновении протонов $m_1 = m_2 = m_p$ необходима энергия $T = \frac{2m_p c^2 \cdot 3m_p}{m_p} \sim 6\ m_p c^2$, т. е. энергия приблизительно 6 *Бэв*, а не 2 *Бэв*.

Если пара рождается γ-квантом ($m_1 = 0$) или электроном ($m_1 \approx 0$), то пороговое значение $T = 4\ m_p c^2$.

Антипротоны до 1955 г. наблюдались при исследовании космических лучей, однако, следы, приписываемые антипротонам, не были отождествлены с достаточной уверенностью. Впервые антипротоны были созданы на бева-

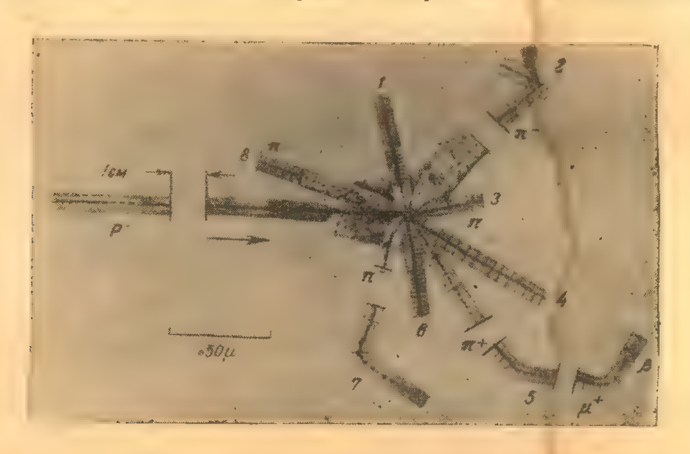


Рис. 298

Аннигиляционная звезда C^6, в которой обнаруживаются следующие частицы:

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Вид частицы	p?	π^-	π?	p	π^+	H^3 (?)	π^-	π
T (*Мэв*)	10	43	175	70	30	82	34	125

Полная видимая энергия 1300 *Мэв*. Полное выделение энергии больше 1400 *Мэв*

троне в Беркли (США) осенью 1955 г. Чемберленом, Ипсилантисом, Сегре, Вигендом. На рис. 297 приведена схема масс-спектрографа, на котором были отождествлены антипротоны.

Отождествление антипротона сводится к нахождению частицы с зарядом $(-e)$ и массой протона. Масса m_0 вычисляется из импульса $p = \frac{m_0 c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Импульс измеряется экспериментально по траектории в магнитном поле магнитов M_1 и M_2. Скорость $\beta = \frac{v}{c}$ определяется по времени пролета между счетчиками. Протоны из пучка беватрона в мишени T создают пары. Антипротон попадает в магнит M, по отклонению в котором можно судить о знаке частицы.

Сцинтилляционные счетчики S_1, S_2, S_3 дают импульсы, обладающие такой же амплитудой, как и импульсы от протонов той же энергии, что говорит о том, что заряд $(-e)$, а не $(-2e)$.

Время пролета между счетчиками S_1 и S_2 контролируется счетчиком Черенкова C_1, реагирующим на частицы с $0{,}75 < \beta < 0{,}78$, и C_2, реагирующим на частицы с $\beta > 0{,}79$; M_1 и M_2 — отклоняющие, а Q_1 — Q_2 — фокусирующие магниты. Более светосильная установка позволяет получать один прошедший через схему антипротон на каждые 10^{10} протонов, ударяющихся в углеродную мишень. Через установку проходят только 3% входящих в нее антипротонов, остальные аннигилируют или рассеиваются.

Тождественность масс протона и антипротона подтверждена с точностью до 2%.



Рис. 299

Спин и магнитный момент непосредственно еще не измерены.

При аннигиляции протон — антипротон в основном порождаются пионы, но возможны и другие механизмы выделения энергии.

На рис. 298 показана фотография звезды, возникающей при аннигиляции антипротонов. Большинство наблюденных аннигиляций происходит на ядрах. При этом выделяется энергия > 1872 *Мэв*.

Нейтрон. Это частица, имеющая нулевой электрический заряд, спин его равен 1/2.

Не имея электрического заряда, он тем не менее имеет магнитный момент.

Свободный нейтрон имеет массу $m_n = 1838{,}6\ m_0$, больше $m_e + m_p$, поэтому он оказывается радиоактивным с периодом полураспада $T \sim 1040$ *сек*:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Антинейтрон. Антинейтрон также нейтральная частица с массой, равной массе покоя нейтрона, со спином 1/2 и тем же магнитным моментом. Но в отличие от нейтрона, для которого магнитный момент направлен против спина ($\mu_n = -1{,}830\ \mu_я$), магнитный момент $\tilde{n}$ направлен по спину, является положительным.

Свободный антинейтрон радиоактивен, распадается на антипротон, позитрон и нейтрино с периодом $T \sim 1040$ *сек*:

$$\tilde{n} \rightarrow \tilde{p} + e + \nu.$$

Экспериментально антинейтроны наблюдаются при перезарядке антипротонов $\tilde{p} \rightarrow \tilde{n} + e^- + \tilde{\nu}$.

Этот процесс наблюдается на фотографиях в пузырьковых камерах в виде резко обрывающегося трэка антипротона, с появлением аннигиляционной звезды на его продолжении (рис. 299). Кроме того, $\tilde{n}$ обнаружены путем наблюдения со счетчиком: антипротоны, попадая в поглотитель, «пропадали». Из поглотителя не вылетали заряженные частицы, но аннигиляционный счетчик показывал наличие выходящей нейтронной частицы.

Антинейтрон может аннигилировать с нейтроном.

Нейтрино и антинейтрино (см. § 12, разд. 8).

π-мезоны. π-мезоны наблюдаются в космических лучах и при облучении мишени пучком частиц в ускорителях. Наблюдаются заряженные и нейтральные пионы: π^+, π^-, π°.

Они имеют нулевой спин, масса заряженных равна 273, 2 m_0, а нейтральных — 264,2 m_0.

Они не стабильны, и распадаются по уравнению:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu \; (T \sim 2{,}6 \cdot 10^{-8} \; сек),$$
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu} \; (T \sim 2{,}6 \cdot 10^{-8} \; сек),$$
$$\pi^\circ \rightarrow \gamma + \gamma \; (T \sim 10^{-10} - 10^{-15} \; сек).$$

Пионы являются носителями поля ядерных сил, они были впервые постулированы Юкавой для теоретического объяснения ядерных сил.

Согласно мезонной теории ядерных сил, нуклонное взаимодействие возникает в результате обмена π-мезонами. Каждый нуклон окружен облаком пионов, имеющим небольшой размер. При сближении нуклонов до расстояния, приблизительно равного размерам пионного облака, между нуклонами наступает сильное взаимодействие, обусловленное обменом π-мезонами.

μ-мезоны. Мюоны являются продуктами распада π-мезонов или порождаются самостоятельно при взаимодействиях других частиц, $m_\mu \sim 206{,}7\, m_e$, $T \sim 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ *сек*. Мюон распадается на легкую заряженную частицу и пару $\nu + \tilde{\nu}$, например, $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \tilde{\nu}$, $T \sim 2{,}2 \cdot 10^{-6}$.

K-мезон. К числу мезонов относятся K-мезон (K^-, K^+, K_1^0, K_2^0). K^- и K^+ являются античастицами по отношению друг к другу. K_1^0 и K_2^0 различаются временами жизни.

Гипероны. Кроме указанных частиц, наблюдается целый ряд сверхтяжелых частиц — барионов, или гиперонов, среди которых различают Ξ^--, Σ^+ и Λ°-частицы, с массами, превышающими массу нуклонов (см. таблицу на стр. 497).

Число таких частиц непрерывно увеличивается. Так, например, появились сообщения, что в 1960 г. в Дубне открыт антисигма минус гиперон $\tilde{\Sigma}^-$, который является античастицей гиперона Σ^-, но не тождествен с Σ^+, хотя имеет одинаковый с ним заряд.

Типы взаимодействия между частицами. Все возможные взаимодействия распадаются на три типа: сильные, электромагнитные и слабые. Сильные взаимодействия проявляются при взаимодействии нуклонов. Носителями этого взаимодействия являются пионы (кванты ядерного поля). Обмен пионами между нуклонами называют также процессом Юкавы.

Взаимодействие, обусловленное существованием электрического заряда, называют электромагнитным.

Носителем электромагнитного взаимодействия является фотон (процесс Дирака). При слабом взаимодействии, типичным примером которого является бета-распад, испускается электрон и антинейтрино (процесс Ферми). Процесс

Свойства элементарных частиц

	Частица		Спин (в $\hbar$)	Масса покоя (в m_0)	Среднее время жизни (в *сек*)	Продукты распада
Барионы	кси	Ξ^-	½ (?)	2585	от 10^{-10} до 10^{-9}	$\Lambda^\circ + \pi^-$
		Ξ°	½ (?)	Не обнаружена		
	сигма	Σ^+	½	2325	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$p + \pi^\circ$; $n + \pi^+$
		Σ^-	½	2341	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$n + \pi^-$
		Σ°	½	2324	$< 10^{-11}$	$\Lambda^\circ + \gamma$
	лямбда	Λ°	½	2182	$2,7 \cdot 10^{-10}$	$p + \pi^-$, $n + \pi^\circ$
	протон	p	½	1836,2	Стабилен	
	нейтрон	n	½	1838,6	$\sim 1010 \pm 26$	$p + e^- + \tilde{\nu}$
Мезоны	К-мезон	K^+	0	966,5	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu$; $\pi^+ + \pi^\circ$; $\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ $\pi^+ + \pi^\circ + \pi^\circ$; $\mu^+ + \nu + \pi^\circ$; $e^+ + \nu + \pi^\circ$
		K^-	0	966,5	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$\mu^- + \tilde{\nu}$; $\pi^- + \pi^\circ$; $\pi^- + \pi^- + \pi^+$ $\pi^- + \pi^\circ + \pi^\circ$; $\mu^- + \tilde{\nu} + \pi^\circ$; $e^- + \tilde{\nu} + \pi^\circ$
		K_1°	0	965	$1 \cdot 10^{-10}$	$\pi^+ + \pi^-$; $\pi^\circ + \pi^\circ$
		K_2°	0	965	От $3 \cdot 10^{-8}$ до 10^{-6}	$\pi^+ + e^- + \tilde{\nu}$; $\pi^- + e^+ + \nu^-$ $\pi^+ + \mu^- + \tilde{\nu}$; $\pi^- + \mu^+ + \nu^-$ $\pi^+ + \pi^- + \pi^\circ$; $\pi^\circ + \pi^\circ + \pi^\circ$
	пион	π^+	0	273,2	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu$
		π^-	0	273,2	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^- + \tilde{\nu}$
		π°	0	264,2	От 10^{-16} до 10^{-15}	$\gamma + \gamma$
	мюон	μ^-	½	206,7	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$e^- + \nu + \tilde{\nu}$
Лептоны	электрон	e^-	½	1	Стабилен	
	нейтрино	ν	½	$< 2 \cdot 10^{-4}$	Стабилен	
	фотон	γ	1	0	Стабилен	

Юкавы связывает тяжелые частицы (нуклоны) с π-мезонами. Процесс Ферми связывает тяжелые частицы с легкими. Однако в эту схему не укладываются μ- и K-мезоны и гипероны, которые были названы в силу этого «странными» частицами. Времена их жизни лежат в интервале 10^{-8}—10^{-10} *сек*, что характерно для слабых взаимодействий. Однако они образуются при сильных взаимодействиях с нуклонами, для которых характерное время порядка 10^{-23} *сек*. Это расхождение между ожидаемыми и наблюдаемыми временами жизни (в 10^{14} раз) и обусловило их название — «странные частицы».

Решение этого парадокса было найдено в гипотезе «совместного рождения» — странные частицы рождаются группами, по нескольку штук.

Сильное взаимодействие действует только на несколько частиц одновременно. Поэтому и обратная реакция «сильного» типа должна протекать с несколькими частицами, что мало вероятно, поэтому обратная реакция не протекает и происходит распад по слабому типу. Странные частицы уходят

от своей гибели по сильному типу в результате разлета совместно рожденных частиц.

Принцип совместного рождения (не менее двух частиц) отражается в законе сохранения изотопического спина.

Изотопический спин. Ядерные силы (сильное взаимодействие) обладают свойством зарядовой независимости — взаимодействие $p-p$, $n-n$, $p-n$ одинаково. Поэтому если отвлечься от электрических полей, то протон и нейтрон становятся как бы неразличимы — они ведут себя одинаковым образом. Поэтому нуклон можно считать частицей, которая может находиться в двух зарядовых состояниях: $+1$ (протон) и 0 (нейтрон), он образует зарядовый дублет со средним зарядом 1/2. Эту идею Гейзенберг воплотил в систему математических уравнений, формально напоминающих уравнения Паули для электрона, учитывающих спин. Математическую величину, учитывающую зарядовое состояние, Гейзенберг назвал по аналогии изотопическим спином. Изотопический спин нуклона равен 1/2. Его «проекция» на направление отсчета, равная $+ 1/2$, соответствует протону, и $- 1/2$ — нейтрону. Факт зарядовой независимости формулируется в виде закона сохранения изотопического спина.

Понятие изотопического спина было распространено на пионы, которые образуют зарядовый триплет π^+, π^-, π^0, со средним зарядом 0.

Триплет можно описать в виде пиона с изотопическим спином 1, с проекциями 1,0 — 1,

Понятие странности. Важной физической величиной, сохраняющейся при реакциях между элементарными частицами, является странность, которая вводится следующим образом. Каждый зарядовый мультиплет характеризуется определенным средним зарядом. Например, нуклон имеет средний заряд 1/2 (в единицах e), антинуклон — 1/2. Пион имеет нулевой заряд и т. д. За начало отсчета среднего заряда принимается заряд нуклона, т. е. 1/2. Странностью мультиплета называется физическая величина, равная удвоенному расстоянию между ее средним зарядом и зарядом нуклона. Тогда, по определению, странность нуклона равна нулю. Странность Σ- гиперона равна (—1), странность антинуклона равна 0, его заряд является началом отсчета для античастиц. Можно ожидать, что существует антисигма-гиперон со странностью $+1$. Действительно, $\tilde{\Sigma}^-$ открыт в 1960 г. Для мезонов за начало отсчета принят средний заряд пиона, т. е. 0. Тогда странность K-частицы будет равна $(+1)$ для дублета (K^+, K^0) и (-1) для дублета (K^-, K^0).

В теории элементарных частиц доказывается, что странность сохраняется при сильных и электромагнитных взаимодействиях. Поэтому странность вступающих в реакцию частиц должна равняться странности продуктов распада. Это полностью объясняет гипотезу совместного рождения. При столкновении обычных частиц могут образоваться только такие странные частицы, полная странность которых равна нулю.

Проблема элементарных частиц. Эта проблема является одной из важнейших современной физики. Необходимо создание новой теории, которая объяснила бы наблюдаемый спектр масс частиц, взаимодействие между ними, времена жизни и другие их характеристики. Первые теории (Гейзенберг) повлекли за собой введение новых физических идей — нелинейное уравнение, квантование пространства. Возможно, что для ее создания потребуется коренная ломка современных представлений.

РАЗДЕЛ ДЕВЯТЫЙ

Физика твердого тела

§ 1. Виды связей атомов в твердых телах

Свойство твердых тел сохранять свою форму объясняется сильной связью между составляющими его атомами. По характеру связей твердые тела можно разбить на несколько типов.

Молекулярная связь. Твердые тела с молекулярной связью характеризуются малой твердостью и низкой температурой плавления. Типичными примерами молекулярных твердых тел являются органические вещества. Отдельные атомы в них образуют комплексы, группы, которые связаны между собой слабыми силами, такого же типа, как и в жидкостях.

Гетерополярная, или ионная связь. Типичными примерами веществ с гетерополярным типом связи являются соединения щелочных металлов с галогенами, например, NaCl. В результате образования ионов Na^+ и Cl^- между ними возникает кулоновское притяжение. Взаимодействие большого числа ионов разного знака приводит к образованию устойчивой конфигурации, в которой, как правило, ионы занимают периодически правильные положения в пространстве, т. е. вещества с ионной связью образуют обычно кристаллы.

Гомополярная, или атомная связь. Атомная связь является наиболее сильной из всех типов связи. Вещества с атомной связью также образуют кристаллы. Типичными примерами веществ с атомной связью является алмаз, кремний, германий. Атомная связь возникает между одинаковыми атомами в результате особого квантовомеханического эффекта, называемого обменным эффектом. Обменные силы возникают при взаимодействии между атомами, которое приводит к обобщению их электронов, к обмену электронами. Важнейшей особенностью обменных сил является их резкая зависимость от направления спинов электронов, осуществляющих связь между взаимодействующими атомами. Связь будет сильной только в том случае, если спины антипараллельны. Второй важнейшей особенностью обменных сил является то, что они обладают свойством насыщения — связь осуществляется лишь парой электронов. Добавление третьего электрона не приводит к увеличению связи. Эта особенность обменных сил вытекает из первой особенности, поскольку добавление третьего электрона приводит к образованию связи, в которой два электрона имеют параллельные спины. В силу этого атомная связь называется парно-электронной связью. Принимать участие в обменных связях могут лишь электроны наружной незаполненной оболочки атомов, поэтому атомную связь называют валентной или ковалентной. При атомной связи вероятность обнаружить электрон вблизи одного из ядер взаимодействующих атомов может быть или одинаковой, или разной. Предельным случаем атомной связи является ионная связь.

Металлическая связь. Одной из разновидностей атомной связи является металлическая связь. Обычно считается, что валентные электроны атомов металлов коллективизируются, принадлежат одновременно всей решетке. Это коллективизирование относится и к электронам внутренних оболочек, однако их «свобода» значительно ограничена.

§ 2. Элементы зонной теории твердого тела

Общее понятие о зонной структуре. Зонная структура кристаллов (твердых тел) является основой большинства современных представлений о механизмах различных явлений в изоляторах (диэлектриках), полупроводниках и проводниках (металлах). В самых общих чертах это представление сводится к тому, что электрон в твердом теле имеет энергию, непрерывно меняющуюся в определенных интервалах $(E_{1\,мин}, E_{1\,макс})$, $(E_{2\,мин}, E_{2\,макс})$, $(E_{3\,мин}, E_{3\,макс})$, разделенных областями запрещенных значений энергии.

Интервалы разрешенных значений носят название зон разрешенных значений энергии, интервалы энергий, не осуществляющихся в кристаллах, носят название запрещенных зон. Число возможных состояний в разрешенных зонах конечно, что в силу запрета Паули приводит к конечному числу электронов, обладающих энергией в данной зоне. Переход электрона из зоны в зону связан с изменением энергии на величину не меньше ширины запрещенной зоны. Переход может осуществляться за счет энергии тепловых колебаний решетки, освещения, электрического поля. Теоретически зонная структура кристаллов появляется при решении уравнения Шредингера для кристалла после ряда упрощений, сводящих задачу для кристалла к одночастичной задаче. К зонной структуре можно подойти, исходя из опыта. Например, спектры поглощения твердых тел в оптической области и области мягких рентгеновских лучей состоят из отдельных широких полос. Это говорит о том, что электроны твердого тела могут поглощать только такую энергию, которая не меньше ширины запрещенной зоны:

$$h\nu \geqslant E_{n+1\,мин} - E_{n\,макс},$$

и не больше расстояния между дном одной зоны и потолком другой, более высокой, зоны.

§ 3. Функция Гамильтона для кристалла

Гамильтониан кристалла как квантомеханической системы учитывает энергию движения электронов и ядер, энергию частиц в полях и энергию их взаимодействия. Состояние кристалла описывается уравнением Шредингера для стационарного состояния:

$$\hat{H}\Psi = \left[\sum_i -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + \sum_\alpha -\frac{\hbar^2}{2M_\alpha}\Delta_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{r_{ij}} + U(\mathbf{r}_i\,\mathbf{R}_\alpha) + V_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots)\right]\Psi = E\Psi,$$

где первые два члена представляют собой операторы кинетической энергии электронов и ядер, третий член — энергия попарного взаимодействия электронов, четвертый член — энергия взаимодействия всех электронов со всеми ядрами; пятый член — энергия взаимодействия ядер между собой: $\Psi(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_\alpha)$— волновая функция кристалла, зависящая от координат электронов $\mathbf{r}_i$ и ядер $\mathbf{R}_\alpha$; E — искомое значение энергии кристалла. Решив это уравнение, можно найти все собственные функции и собственные значения энергии. Собственная функция, дающая максимальную вероятность, позволит найти наиболее устойчивую комбинацию атомов, т. е. теоретически получить структуру кристалла. Однако это уравнение содержит $3(Z+1)n$ координат частиц. Естественно, что уравнение, содержащее столь большое число переменных, не ре-

шается точно. Это уравнение может быть решено лишь путем сведения уравнения для кристалла к уравнению для одной частицы. Сведение проводится путем ряда более или менее естественных предположений. Ими являются адиабатическое и одноэлектронное приближение.

А д и а б а т и ч е с к о е п р и б л и ж е н и е. Согласно адиабатическому приближению частицы кристалла делятся на легкие — электроны и тяжелые — ядра. Характер движения тех и других различен. Очевидно, что скорости движения тяжелых частиц много меньше скорости движения легких частиц. За некоторое малое время, когда легкие частицы пройдут большой путь, положение тяжелых частиц изменится мало, поэтому можно считать, что ядра находятся в состоянии покоя. В таком случае гамильтониан упрощается: второй член в нем обращается в ноль, пятый член — энергия взаимодействия ядер — превращается в константу, и выбором начала отсчета энергии ее можно обратить в ноль. Точность адиабатического приближения по энергии велика — порядка $\frac{m}{M}$, т. е. сотые доли процента, тем не менее оно не учитывает целого ряда важных эффектов, прежде всего сопротивление электрическому току. Для описания подобных явлений необходимо предполагать, что ядра совершают движение, простейшей формой которого являются малые колебания вокруг положения равновесия. Математически движение ядер вводится в уравнение путем предположения, что волновую функцию кристалла можно представить в виде произведения двух функций:

$$\Psi\left(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{R}_\alpha\right) = \tilde{\Psi}\left(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{R}_\alpha\right)\xi\left(\mathbf{R}_\alpha\right),$$

где $\xi\left(\mathbf{R}_\alpha\right)$ описывает «медленное» движение ядер, которое оказывает воздействие на движение электронов посредством параметрической зависимости волновой функции электронов $\tilde{\Psi}$ от координат ядер $\mathbf{R}_\alpha$

Таким образом, адиабатическое приближение сводит написанное выше уравнение для кристалла к уравнению вида:

$$\sum_i -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i\Psi\left(\mathbf{r}_i\ \mathbf{R}_\alpha^0\right) + \left[\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{\mathbf{r}_{ij}} + U\left(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{R}_\alpha^0\right)\right]\Psi = E\Psi\left(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{R}_\alpha^0\right),$$

которое также является уравнением со многими переменными и не может быть точно решено.

О д н о э л е к т р о н н о е п р и б л и ж е н и е. Наиболее кардинальным шагом в теории твердого тела является переход от многочастичной задачи к задаче одноэлектронной. Для этого гамильтониан реально взаимодействующих частиц кристалла необходимо заменить гамильтонианом невзаимодействующих частиц, который имеет вид суммы гамильтонианов для частиц.

Энергию взаимодействия электронов с ядрами можно представить в виде суммы членов, каждый из которых представляет собой энергию одного электрона в поле всех покоящихся ядер:

$$U\left(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \ldots,\ \mathbf{R}_1^0,\ \mathbf{R}_2^0,\ldots\right) = \sum_i U_i\left(\mathbf{R}_1^0,\ \mathbf{R}_2^0,\ \ldots\right) = \sum_i U\left(\mathbf{r}_i\right).$$

Необходимо теперь упростить энергию взаимодействия электронов. Выделим мысленно один электрон и будем следить за его движением. Он будет двигаться в потенциальном поле всех ядер и всех остальных электронов. Если обозначить поле, создаваемое всеми остальными движущимися электронами в месте нахождения выделенного электрона, через $\Omega(\mathbf{r}_i)$, то в таком случае энергию попарного взаимодействия можно представить в виде суммы

$$\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{r_{ij}}=\sum\Omega(\mathbf{r}_i).$$

Потенциальное поле $\Omega(r_i)$ носит название самосогласованного поля. Замена кулоновского поля электронов неким самосогласованным полем является наиболее слабым пунктом зонной теории. Это вытекает хотя бы из того, что поле $\Omega(\mathbf{r}_i)$ не может быть теоретически вычисленно (даже для атома, где существуют приближенные методы Хартри и Фока). Фактически оно сводится к константе с тем, чтобы его можно было положить равным нулю. Однако в настоящее время это единственно возможный путь для решения задачи о кристалле. Замена системы взаимодействующих частиц системой невзаимодействующих частиц сводит многочастичную задачу к одночастичной. Так, как теперь гамильтониан кристалла можно представить в виде суммы гамильтонианов невзаимодействующих частиц:

$$\hat{H}=\sum_i \hat{H}_i=\sum_i\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i+U(\mathbf{r}_i)+\Omega(\mathbf{r}_i)\right],$$

то решение этого уравнения находится элементарно: волновая функция системы представляет собой произведение волновых функций каждого электрона, а энергия кристалла представляет собой сумму энергий каждого электрона:

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \ldots)=\psi_1(\mathbf{r}_1)\,\psi_2(\mathbf{r}_2)\ldots;\quad E=\sum_i E_i.$$

При этом волновая функция и величина энергии произвольного электрона находятся из решения уравнения (индекс «i» опущен):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r})+[\Omega(\mathbf{r})+U(\mathbf{r})]\,\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r})].$$

Поля Ω и U можно объединить в одно поле $V(\mathbf{r})=\Omega(\mathbf{r})+U(\mathbf{r})$. Относительно поля $V(\mathbf{r})$ можно сказать, что оно представляет собой поле решетки кристалла (вместе с остальными электронами). Самое общее предположение, какое можно сделать о его характере, состоит в том, что $V(\mathbf{r})$ является периодическим полем с периодом решетки кристалла;

$$V(\mathbf{r}+\mathbf{a})=V(\mathbf{r});\quad \mathbf{a}=n_1\mathbf{a}_1+n_2\mathbf{a}_2+n_3\mathbf{a}_3,$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа, а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ периоды решетки по осям кристалла.

Уравнение Шредингера для электрона в периодическом поле. Решение уравнения Шредингера обладает одним очень важным свойством. Пусть $\psi(\mathbf{r})$ является решением уравнения

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(\mathbf{r})\,\psi=E\psi,$$

где $V(\mathbf{r}+\mathbf{a})=V(\mathbf{r})$ есть периодическая функция. Перенесем начало отсчета координат на целое число периодов решетки:

$$x'\to x+n_1a_1;\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'},$$

$$y'\to y+n_2a_2;$$
$$z'\to z+n_3a_3;$$

тогда

$$\Delta\psi(x+n_1a_1,\ \ldots)+\frac{2m}{\hbar^2}[E-U(x+n_1a_1,\ \ldots)]\cdot\psi(x+n_1a_1,\ \ldots)=0,$$

Но так как $U(x+n_1 a_1, \ldots) = U(x, y, z)$, то $\psi(x+n_1 a_1, y+n_2 a_2, z+n_3 a_3)$ удовлетворяет тому же самому уравнению, что и $\psi(x, y, z)$. В таком случае эти решения должны отличаться лишь множителем, равным по модулю единице (условие нормировки). Следовательно, $\psi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = e^{i\alpha}\psi(\mathbf{r})$, где α — произвольная вещественная величина. Естественно, желательно ввести в условие вектор трансляции (смещения начала координат) **a**. Его можно ввести, если положить: $\alpha = (\mathbf{ka})$. Тогда $\psi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = e^{i(\mathbf{ka})}\psi(\mathbf{r})$, где **k** — произвольный постоянный вектор. Это основное трансляционное условие, накладываемое на решение уравнения Шредингера в периодическом поле.

Функция Блоха. Это условие будет выполнено автоматически, если искать решение в виде $\psi(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{kr})}\varphi(\mathbf{r})$, где $\varphi(\mathbf{r})$ должна быть периодической функцией с периодом кристалла $\varphi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{r})$. Тогда

$$\psi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = e^{i(\mathbf{k},\, \mathbf{r}+\mathbf{a})}\varphi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = e^{i(\mathbf{ka})}\psi(\mathbf{r}).$$

Решение в таком виде представляет собой плоскую волну, модулированную по амплитуде с периодом, равным периоду решетки Вектор **k** имеет размерность обратной длины, поэтому его можно назвать волновым вектором. Ему можно сопоставить некоторый вектор $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}$, который называется квазиимпульсом. Название «квазиимпульс» отражает тот факт, что плоская волна свободного движения определяется импульсом частицы, роль которого в кристалле играет квазиимпульс. Кроме того, квазиимпульс для движения в кристалле имеет то же значение, что и импульс для свободного движения.

Периодичность квазиимпульса. Квазиимпульс **P** или **k** определяется с точностью до вектора обратной решетки умноженного на 2π. Обратная решетка определяется своим базисом b_1, b_2, b_3, который связан с базисом прямой решетки соотношением:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3])} = \frac{1}{V_a}[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3];$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{V_a}[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1];$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{V_a}\cdot[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2].$$

В таком случае

$$(\mathbf{b}_i\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}.$$

Если определить два вектора

$$\mathbf{a} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a} + n_3\mathbf{a}_3; \quad \mathbf{b} = m_1\mathbf{b} + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3,$$

где n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 — целые числа, то скалярное произведение $(\mathbf{ab})$ дает целое число:

$$(\mathbf{ab}) = n_1 m_1 a_1 b_1 + n_2 m_2 a_2 b_2 + n_3 m_3 a_3 b_3 = n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3.$$

В таком случае, если $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$, то

$$e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{a})} = e^{i(\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b},\, \mathbf{a})} = e^{i\mathbf{ka}}.$$

Замена **k** на $\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b}$ дает физически эквивалентное состояние, поэтому $E(\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b}) = E(\mathbf{k})$.

Нормировка в ящике. Пусть твердое тело представляет собой куб с ребром L. В этом случае все пространство можно представить заполненным подобными кубами В этом случае нормированная к единице по объему куба волновая функция будет иметь вид:

$$\psi(\mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i(\mathbf{kr})}\varphi(\mathbf{r});$$

Чтобы избежать граничных условий, удобно задать условие периодичности в виде:

$$\psi(x+L, y, z) = \psi(x, y+L, z) = \psi(x, y, z+L) = \psi(x, y, z).$$

Это условие приводит к тому, что квазиимпульс (волновой вектор) оказывается дискретным:

$$\psi(x+L, y, z) = e^{i[(K_x(x+L)+K_y y+K_z z)]}\varphi(\mathbf{r}) = e^{iK_x L}\psi(\mathbf{r}),$$

или

$$K_x L = 2\pi m,$$

$$K_x = \frac{2\pi}{L} m; \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2...$$

Если учесть, что квазиимпульс определяется с точностью до вектора обратной решетки, то можно сказать, что «главное значение» квазиимпульса лежит в интервале:

$$K_x = 0, \ \frac{2\pi}{Na}; \ \frac{4\pi}{Na}; \ ...; \ \frac{2\pi(N-1)}{Na}; \ \frac{2\pi}{a},$$

где N число атомов вдоль ребра куба (для каждой компоненты волнового вектора).

Уравнение для кристалла может быть решено только приближенными методами теории возмущения. Существуют два приближения — теория свободного (квазисвободного) электрона и теория связанного (квазисвязанного) электрона. Они отличаются выбором волновой функции нулевого приближения, но приводят в конечном счете к одинаковым результатам — зонной структуре спектра энергии кристалла.

Теория связанного электрона: а) Волновая функция нулевого приближения.

Чтобы найти энергию электрона в кристалле с известным распределением потенциала $V(\mathbf{r})$, необходимо составить уравнение Шредингера:

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

где

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}).$$

Чтобы решить это уравнение, будем исходить из уравнения для атома:

$$\hat{H}_0\psi_0(\mathbf{r}) = E_a\psi_0(\mathbf{r}); \quad \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} + U(\mathbf{r}).$$

Если положим, что $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, то

$$\hat{W} = \hat{H} - \hat{H}_0 = V(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}),$$

т. е. оператор возмущения будет равен разности между периодическим полем кристалла и полем изолированного атома в данном месте. Очевидно, что вблизи ядра $\hat{W} \approx 0$. Максимальное значение $\hat{W}$ будет в области, наиболее удаленной от ядер. Чтобы найти величину энергии электрона в кристалле, необходимо исходить из волновых функций атома. Волновая функция какого-либо атома, занимающего узел решетки с координатами ($n_1 a_1$, $n_2 a_2$, $n_3 a_3$), будет зависеть от расстояния до ядра. Если же ввести текущий, переменный радиус-вектор $\mathbf{r}$, а положение ядра характеризовать вектором $\mathbf{n} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$, тогда выражение для расстояния от ядра для электрона в данном атоме будет равно $\mathbf{r} - \mathbf{n}$. Следовательно, атомную функцию можно представить в виде $\psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{n})$.

Можно ли считать, что $\psi_0(\mathbf{r}-\mathbf{n})$ или их сумма является достаточно верным выражением для нулевого приближения волновой функции электрона в кристалле? Нет, потому что она не удовлетворяет основному условию — условию при трансляции. Такой волновой функцией будет следующая комбинация:

$$\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = C \sum_{n_1, n_2, n_3} e^{i(\mathbf{kn})} \psi_0(\mathbf{r}-\mathbf{n}).$$

Действительно, если $\mathbf{m} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3$; m_1, m_2, m_3 — целые числа, то

$$\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}+\mathbf{m}) = C\sum_{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{kn})}\psi_0(\mathbf{r}+\mathbf{m}-\mathbf{n}) =$$

$$= Ce^{i(\mathbf{km})}\sum_{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k},\,\mathbf{n}-\mathbf{m})}\psi_0[\mathbf{r}-(\mathbf{n}-\mathbf{m})] = Ce^{i(\mathbf{km})}\times$$

$$\times\sum_{\mathbf{l}} e^{(\mathbf{kl})}\psi_0(\mathbf{r}-\mathbf{l}) = e^{i(\mathbf{km})}\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}).$$

б) Энергия электрона в кристалле. Для вычисления энергии электрона в кристалле будем исходить из $\psi_{0\mathbf{k}}$, E_a и $\hat{W}$. Тогда, согласно теории возмущения, поправка к энергии в первом приближении равна среднему значению оператора возмущения. Для усреднения необходимо взять собственную функцию невозмущенного состояния:

$$E = E_a + \langle\hat{W}\rangle = E_a + \frac{\int \psi_{0\mathbf{k}}^* \hat{W}\psi_{0\mathbf{k}}\,d\tau}{\int \psi_{0\mathbf{k}}^*\psi_{0\mathbf{k}}\,d\tau},$$

или это выражение можно получить непосредственной подстановкой $\psi_{0\mathbf{k}}$ в уравнение $(\hat{H}_0 + \hat{W})\psi_{0\mathbf{k}} = E\psi_{0\mathbf{k}}$. После умножения на $\psi_{0\mathbf{k}}^*$ и интегрирования по всему кристаллу получится как раз написанное выше соотношение. Его необходимо упростить. Для этого в полученное уравнение подставим:

$$\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = C\sum_{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{kn})}\psi_0(\mathbf{r}-\mathbf{n}),$$

$$\psi_{0\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) = C\sum_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{kl})}\psi_0^*(\mathbf{r}-\mathbf{l}).$$

Получаем:

$$E = E_a + \frac{\int\sum_{\mathbf{l},\,\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k},\,\mathbf{l})}\psi_{0\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}-\mathbf{l})\,[V(\mathbf{r})-U(\mathbf{r}-\mathbf{n})]\,e^{i(\mathbf{kn})}\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}-\mathbf{n})\,d\tau}{\sum_{\mathbf{l},\,\mathbf{n}}\int e^{i(\mathbf{kl})}\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}-\mathbf{l})\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}-\mathbf{n})\,e^{i(\mathbf{kn})}\,d\tau}.$$

Упрощаем знаменатель:

$$\int\psi_{0\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}-\mathbf{l})\psi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{r}-\mathbf{n})\,d\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{l}=\mathbf{n}, \\ S_{\mathbf{ln}} & \text{при } \mathbf{l}\neq\mathbf{n}. \end{cases}$$

$S_{\mathbf{ln}}$ — величина, много меньшая единицы; она определяется перекрытием волновых функций различных атомов. Но волновые функции атомов убывают вдали от ядер по экспоненциальному закону. В таком случае знаменатель будет равен:

$$N\sum_{\mathbf{n}-\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k},\,\mathbf{n}-\mathbf{l})}S_{\mathbf{ln}} \approx N,$$

где N — число атомов в данном кристалле. Упростим числитель. Для этого необходимо учесть, что он зависит фактически не от $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$, а от их разности. Действительно, положим $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{l}$, т. е. зафиксируем положение некоторого ядра ($\mathbf{l}$). Тогда

$$\sum_{\mathbf{l},\, \mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k},\, \mathbf{n}-\mathbf{l})} \int \psi_{0\mathbf{k}} (\mathbf{r}') [V(\mathbf{r}') - U[(\mathbf{r}' - (\mathbf{n} - \mathbf{l})]\, \psi_{0\mathbf{k}} [\mathbf{r}' - (\mathbf{n} - \mathbf{l}d) \cdot \tau].$$

Но $\mathbf{r}'$ — это переменная интегрирования, она пробегает те же значения, что и $\mathbf{r}$, поскольку интегрирование ведется по объему одного и того же кристалла. Полученное выражение показывает, что $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$ входят действительно только в виде разности $\mathbf{n} - \mathbf{l} = \mathbf{m}$, но при этом сумма содержит N одинаковых членов:

$$E = E_a + N \sum_{m} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{m})} \frac{1}{N} \int \psi^*_{o\mathbf{k}} (\mathbf{r}') [V(\mathbf{r}') - U(\mathbf{r}' - \mathbf{m})] \times$$
$$\times \psi_{o\mathbf{k}} (\mathbf{r}' - \mathbf{m})\, d\tau'.$$

Рассмотрим интеграл при $\mathbf{m} = 0$; он зависит только от разности $V(\mathbf{r}') - U(\mathbf{r}') = W(\mathbf{r}')$. Обозначим интеграл через C: $C = \int |\psi_0 (\mathbf{r}')|^2 W(\mathbf{r}')\, d\tau'$. (Всего таких интегралов будет N.) Величина C дает усредненное значение поля возмущения. Знак ее зависит от хода $W(\mathbf{r}')$. Если $W(\mathbf{r}') \gtreqless 0$, то и $C \gtreqless 0$. Если $W(\mathbf{r}')$ — знакопеременная функция, то величина и знак C будет зависеть как от хода $W|\mathbf{r}'|$, так и от $|\psi_0 (\mathbf{r}')|^2$. Знак C определяет, будет ли атомный уровень E_a опускаться ($C < 0$), или подниматься ($C > 0$) при переходе от свободного атома к кристаллу.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{m} \neq 0$. Очевидно, что если $\mathbf{m}$ — велико, то перекрытие волновых функций $\psi_{o\mathbf{k}} (\mathbf{r}')$ и $\psi_{o\mathbf{k}} (\mathbf{r}' - \mathbf{m}')$ не произойдет, интеграл обратится в нуль. Следовательно, интеграл и сумму необходимо распространить только на ближайших соседей.

Интеграл можно обозначить через $A(\mathbf{m})$:

$$A(\mathbf{m}) = \int \psi^*_{O\mathbf{k}} (\mathbf{r}') [V(\mathbf{r}') - U(\mathbf{r} - \mathbf{m})]\, \psi_{0\mathbf{k}} (\mathbf{r}' - \mathbf{m})\, d\tau.$$

Он представляет собой величину, определяемую перекрытием волновых функций разных атомов и потенциалом возмущения, так что он представляет собой обменный интеграл, т. е. описывает взаимодействие соседних атомов, которое приводит к обмену состояниями, или грубо говоря, электронами Это специфически квантовый эффект, он является следствием неразличимости электронов. В таком случае:

$$E = E_a + C + \sum_{\mathbf{m}} A(\mathbf{m})\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{m})},$$

при этом сумма берется по малым $\mathbf{m}$. Величина суммы существенно зависит от характера поля $W(\mathbf{r})$. Если $W(\mathbf{r}) = W(r)$, т. е. поле кристалла изотропно, то $A(\mathbf{m}) = A$. Тогда для простой кубической решетки ближайшие атомы к данному имеют координаты (в постоянных решетки a_i):

$$\mathbf{m} = \begin{cases} (1,\ 0,\ 0); & (-1,\ \ 0,\ \ 0); \\ (0,\ 1,\ 0); & (0,\ -1,\ \ 0); \\ (0,\ 0,\ 1); & (0,\ \ 0,\ -1); \end{cases}$$

$$E = E_a + C + 2A (\cos k_1 a_1 + \cos k_2 a_2 + \cos k_3 a_3).$$

Экстремальное значение энергии будет равно

$$E_{\text{макс}} = E_a + C + 6|A|;$$
$$E_{\text{мин}} = E_a + C - 6|A|.$$

Таким образом, при образовании кристалла из свободных атомов путем их сближения энергетические уровни атома начинают смещаться на величину C и расщепляться в зону шириной 12 A для кристалла с простой кубической решеткой, $24A$ для гранецентрированной решетки и 16 A для объемноцентрированной решетки.

В этих случаях выражение для энергия имеет следующий вид:

$$E = E_a + C + 2A\left(\cos\frac{\xi+\eta}{2} + \cos\frac{\xi-\eta}{2} + \cos\frac{\eta+\zeta}{2} + \cos\frac{\eta-\zeta}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\zeta+\xi}{2} + \cos\frac{\zeta-\xi}{2}\right) \text{ (гранецентрированная);}$$

$$E = E_a + C + 8A\cos\frac{\xi}{2}\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\zeta}{2} \text{ (объемноцентрированная),}$$

где $\xi = (\mathbf{ka}_1)$; $\eta = (\mathbf{ka}_2)$; $\zeta = (\mathbf{ka}_3)$.

Если кристалл неограниченный, то в зоне энергия меняется непрерывно, так как $\mathbf{k}$ меняется непрерывно.

Если кристалл ограничен, то $\mathbf{k}$ дискретно, и уровень расщепляется в зону, содержащую большое число подуровней.

в) Зависимость энергии от квазиимпульса. Исследуем выражение для энергии и ее зависимость от квазиимпульса. В кристалле в виде куба с ребром L квазиимпульс принимает значения:

$$k_x = 0, \quad \pm\frac{2\pi}{L}, \quad \pm\frac{4\pi}{L}, \quad \pm\frac{6\pi}{L}, \ldots$$

Для характеристики состояния можно ограничиться изменением k_x от 0 до $\frac{2\pi}{a}$, или от $-\frac{\pi}{a}$ до $\frac{\pi}{a}$. Последние пределы наиболее употребительны. Ниже будем считать, что k_x изменяется именно в этих пределах. Из выражения для пределов видно, что максимальное значение k зависит от периода решетки. Ограничимся случаем $a_1 = a_2 = a_3 = a$:

$$E = E_a + C + 6A\cos ka.$$

При $ka \approx 0$ и $ka \approx \pi$

$$\cos ka = 1 - \frac{1}{2}(ka)^2 \text{ и } \cos ka = -\left[1 - \frac{1}{2}(\pi - ka)^2\right]$$

соответственно в первом и втором случае. Таким образом, можно сказать, что вблизи дна и потолка зон энергия зависит от квазиимпульса по квадратичному закону. При этом необходимо учитывать периодичность квазиимпульса.

Будет ли при $k = 0$ максимум или минимум зависит от знака A. Если $A > 0$, то

$$E = E_a + C + 6A - 3Aa^2k^2,$$

и, следовательно, при $k = 0$ $E = E_{\text{макс}}$.

Если $A < 0$, то

$$E = E_a + C - 6A + 3Aa^2k^2,$$

и при $k = 0$ $E = E_{\text{мин}}$.

На рис. 300 дана графическая зависимость E от k для обоих случаев.

Выводы зонной теории кристаллов: 1) Спектр энергии электрона в кристалле состоит из последовательности зон. Интервалы возможных значений энергии, называемые разрешенными зонами, разделены интервалами запрещенных значений энергии, называемой запрещенными зонами. К зонной структуре энергии приводит как теория свободного электрона, так и теория связанного электрона.

В первой теории образование запрещенных зон обязано невозможности движения с определенными значениями импульса в определенных направлениях, для которых выполняется условие вульф-брегговского отражения.

Во второй теории энергетические зоны образуются в результате расщепления атомных уровней энергии, обусловленного взаимодействием атомов.

2) Теория связанного электрона приводит к тому, что энергетические уровни атома смещаются на величину C и расщепляются в зону шириной $(E_{макс} - E_{мин})$ (рис. 301).

3) Ширина зоны прямо пропорциональна обменной энергии A. Коэффициент пропорциональности зависит от типа решетки и, например, равен 12, 24, 16 для простой кубической, гранецентрированной и объемноцентрированной решеток.

4) Величина обменного интеграла A определяется областью перекрытия волновых функций двух соседних атомов, поэтому ширина зоны не зависит от размеров кристалла (от числа атомов в нем). На рис. 302 изображено образование зон при сближении атомов Na, r_0 соответствует постоянной решетки кристалла натрия.

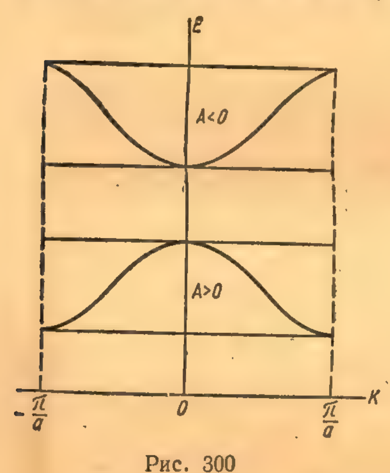


Рис. 300

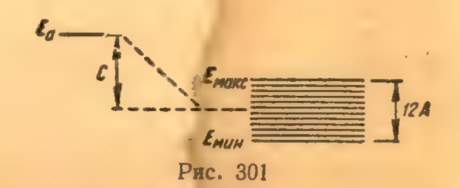


Рис. 301

5) Для кристалла конечных размеров, содержащего N атомов, зона состоит из N подуровней.

Расстояние между подуровнями обратно пропорционально числу атомов в кристалле.

6) С ростом энергии ширина зон возрастает, и ширина запрещенных зон уменьшается. Это связано с тем, что с ростом главного квантового числа электрона в атоме его энергия и размер оболочки возрастают, поэтому область перекрытия волновых функций, а следовательно, и величина обменного интеграла растет при переходе от внутренних электронных оболочек к внешним (рис. 303). Уменьшение ширины запрещенных зон связано при этом также с уменьшением расстояний между атомными уровнями энергии.

7) Изменение расстояния между атомами приводит к изменению ширины зон.

8) Если некоторое состояние в атоме было вырожденным, то при взаимодействии с соседними атомами решетки вырождение может быть снято, вследствие чего каждое из вырожденных состояний дадут свои зоны, которые могут перекрываться, образуя сложную зону.

9) Каждому энергетическому состоянию внутренних электронов соответствует узкая зона энергии. Но не каждому уровню энергии внешних (валентных) электронов свободного атома соответствует энергетическая зона в кристалле. Это связано с тем, что взаимодействие атомов в кристалле приводит к резкому изменению электронной оболочки атомов, вследствие чего структура уровней претерпевает существенное изменение подобно тому, как при образовании молекул структура уровней атомов заменяется совершенно непохожей на нее структурой уровней молекулы.

Поэтому картина образования зон электронов внутренних оболочек лучше описывается теорией связанного электрона, а образование зон, соответствующих возбужденным состояниям атома, описывается теорией свободного электрона.

10) Для понимания большинства процессов в полупроводниках достаточно использовать верхнюю заполненную, первую свободную зоны и интервал между ними (т. е. запрещенную зону).

Состояние электрона в кристалле и принцип Паули. Для характеристики индивидуальности состояния электрона в атоме используется набор из четверки механических величин. Например E_1, $|\mathbf{M}|$, M_Z, s_z, или соответствующие им четыре квантовых числа n, l, m_l, s_z. У N невзаимодействующих атомов будет N состояний и в них разместится N электронов. Если пренебречь тонкой структурой, то в отсутствие магнитного поля в состояниях nl будет располагаться $N \cdot 2(2l+1) = Nf$ электронов.

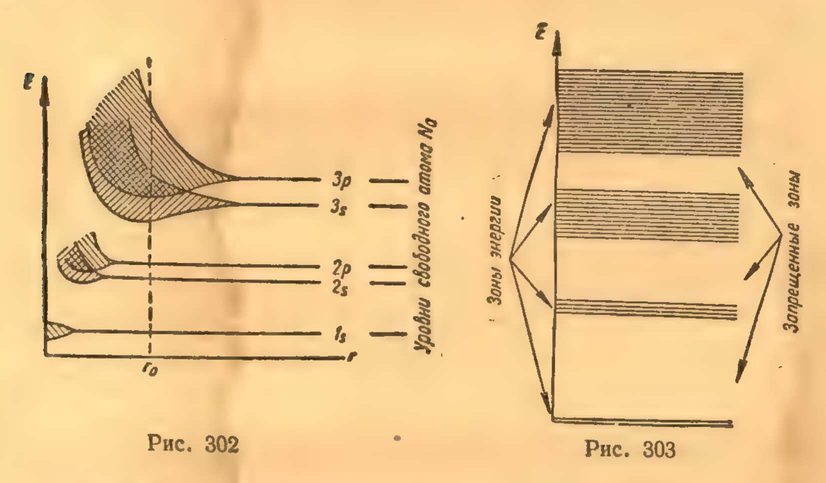


Рис. 302

Рис. 303

В кристалле использование набора nlm_ls_z становится неоправданным. В этом случае необходимо использовать набор из четырех величин k_1, k_2, k_3, s_z.

В таком случае принцип Паули гласит: в состоянии (k_1, k_2, k_3, s_z) может быть не более одного электрона.

Так как энергия E есть четная функция волнового вектора: $E(\mathbf{k}) = E(-\mathbf{k})$, то принцип Паули можно сформулировать таким образом: *на любом энергетическом подуровне E зоны может находиться не более двух электронов.*

Если зона получена из f-кратно вырожденного атомного состояния nl, то образуются f различных или совпадающих зон, в таком случае в этих зонах разместится Nf электронов.

Из сказанного можно сделать вывод: *число состояний в зоне равно числу соответствующих атомных состояний.*

Связь между средней скоростью и квазиимпульсом. Квазиимпульс определяет среднюю скорость движения электрона в кристалле. Оператор скорости

$$\hat{v} = \frac{d}{dt}\hat{r} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{H}\hat{r} - \hat{r}\hat{H}).$$

Чтобы выразить скорость через квазиимпульс, необходимо перейти в К — представление. Расчет показывает, что средняя скорость

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{d\mathbf{k}} = \frac{dE}{d\mathbf{P}},$$

аналогично движение свободного электрона

$$\mathbf{v} = \frac{dE}{d\mathbf{p}}.$$

Квазиимпульс, связь с энергией, закон изменения квазиимпульса во времени. Эффективная масса. Квазиимпульс определяется уравнением

$$\mathbf{P} = \hbar \mathbf{k}.$$

Средняя скорость движения электрона в периодическом поле кристалла определяется условием

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{dE}{d\mathbf{P}} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{d\mathbf{k}};$$

т. е.

$$\langle \mathbf{v} \rangle = (v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial E}{\partial k_x}, \frac{\partial E}{\partial k_y}, \frac{\partial E}{\partial k_z} \right).$$

На границах зон $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$, что соответствует вульф-брегговскому отражению.

Если электрон попадает в поле, то его энергия начинает меняться и вместе с этим меняется и квазиимпульс. Закон изменения квазиимпульса:

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}] = \hat{\mathbf{F}} = -\nabla \hat{U}.$$

Элементарно этот закон можно получить из следующих соображений: Энергия меняется в результате работы силы: $dE = (\mathbf{P}\, d\mathbf{s}) = (\mathbf{v}\mathbf{F}\, dt)$. Но из определения средней скорости следует, что $dE = (\langle \mathbf{v} \rangle d\mathbf{P})$.

Приравнивая эти уравнения, получим:

$$d\mathbf{P} = \mathbf{F}\, dt, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{H}].$$

Чтобы это выражение имело форму второго закона Ньютона, мы должны записать:

$$\hbar \mathbf{k} = \mathbf{P} = m^* \langle \mathbf{v} \rangle = m^* \frac{dE}{d\mathbf{P}}.$$

Продифференцируем еще раз по k:

$$\hbar = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{k}} = m^* \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{d\mathbf{k}} = m^* \frac{d^2 E}{d\mathbf{k}^2} \cdot \frac{1}{\hbar}; \quad 1 = m^* \frac{d^2 E}{d\mathbf{P}^2};$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{d^2 E}{\hbar^2 d\mathbf{k}^2}, \quad \text{или} \quad m^* \mathbf{a} = \mathbf{F}; \quad \mathbf{a} = \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt}.$$

Откуда

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{d\mathbf{k}^2} \right) \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{m^*} \mathbf{F},$$

где

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial k_x^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_y^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_z^2} \end{pmatrix}.$$

Обратная величина эффективной массы m^* определяется как тензор второго ранга. Поэтому

$$a_x = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k_x^2}F_x + \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_y}F_y + \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_z}F_z.$$

Вблизи дна зоны $\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} > 0$ и электроны ведут себя нормальным образом, только вместо обычной массы используется эффективная.

Если у границы

$$E = \frac{6Aa^2 k^2}{2},$$

то

$$\frac{d^2 E}{dk^2} = 3Aa^2 = \frac{\hbar^2}{m^*},$$

откуда

$$m^* = \frac{\hbar^2}{3Aa^2},$$

т. е. эффективная масса обратно пропорциональна обменному интегралу, или ширине зоны. Чем меньше обменный интеграл, тем меньше связь между соседними атомами, тем труднее с помощью внешнего поля ускорять электрон.

У потолка зоны $\frac{d^2 E}{dk^2} < 0$ и электрон ведет себя аномально — он движется против силы, или по полю **E**, т. е. ведет себя как положительная частица («дырка»).

Ниже, в таблице приведены опытные данные для тензора эффективных масс электрона m_n^* и дырки m_p^*, полученные различными методами:

$$m^* = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_4 \\ 0 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Вещество		$\frac{m_1}{m_0}$	$\frac{m_2}{m_0}$	$\frac{m_3}{m_0}$
Ge	m_p	0,3		
		0,043	—	—
	m_n	0,082	0,082	1,64
		0,042		
Si	m_p	~0,5		
		~0,17	—	—
	m_n	0,19	0,19	0,98
InSb	m_p	~0,2	—	—
	m_n	от 1,3 до 0,03	—	—
InAs	m_n	0,03	—	—

Классификация твердых тел по электропроводности. По своим электрическим свойствам твердые тела разделяются на металлы (проводники), полупроводники и диэлектрики (изоляторы).

К проводникам (металлам) относятся вещества, имеющие или не полностью заполненную энергетическую зону, или частично перекрывающиеся полностью заполненную и свободную зоны, что в конечном счете приводит к неполностью заполненной зоне. В таком случае при наложении внешнего электрического поля электроны могут переходить на более высокие энергетические уровни в зоне, вследствие чего они приобретут скорость направленного движения и будут осуществлять перенос электрического заряда (рис. 304, *а*).

К полупроводникам относятся вещества, имеющие полностью заполненные зоны, а ближайшая свободная зона, незанятая электронами, отстоит на расстоянии порядка 2—3 *эв* (рис. 304, *б*). В этом случае все состояния в зоне заняты, переходы с одного уровня на другой запрещены принципом Паули, и наложение внешнего электрического поля не приводит к направленному движению электронов, т. е. к возникновению электрического тока.

Для того, чтобы в полупроводнике мог возникнуть электрический ток, часть его электронов необходимо перенести в свободную зону. Для этого потребуется определенная энергия. Это означает, что проводящее состояние полупроводника есть возбужденное состояние твердого тела. Из сказанного вытекает, что отличительной чертой полупроводников является зависимость их электропроводимости от внешних условий: температуры, освещенности,

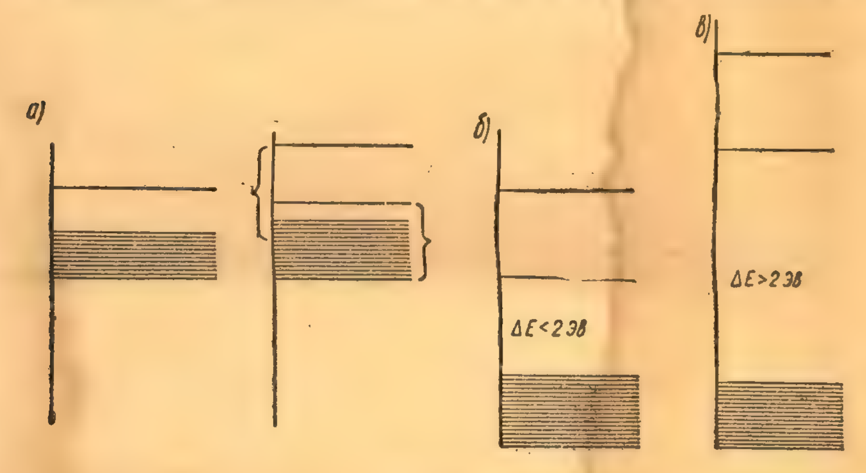


Рис. 304

внешних полей, давления и других факторов, способных изменить энергетическое состояние твердого тела.

К изоляторам относятся вещества, у которых ближайшая свободная зона расположена от заполненной на расстоянии не менее 2—3 *эв* (рис. 304, *в*). Деление твердых тел на полупроводники и изоляторы условно.

§ 4. Металлы. Статистика электронов в металлах

Общие понятия. К металлам относятся вещества, обладающие хорошей проводимостью, теплопроводностью, вязкостью, ковкостью, «металлическим» блеском, прочностью на разрыв, упругостью при деформациях

и целым рядом других свойств. Все перечисленные свойства отражают внутреннюю природу металлических тел, которая в основных чертах может свестись к представлению о коллективизированных электронах: в металлах электроны принадлежат всей кристаллической решетке, а не отдельным атомам или ионам. Благодаря коллективизации электронов возникают особые силы, приводящие к устойчивости кристаллической решетки металлов, возникает так называемый металлический тип связи атомов в решетке, являющийся предельным случаем обменного эффекта, когда обмен происходит не между отдельными атомами, а между всеми атомами решетки. Именно это представление о коллективизированных электронах позволяет в общих чертах объяснить основные особенности металлов.

Классическая теория свободных электронов и ее недостатки. Представление о том, что в металлах имеются свободные, не связанные с отдельными атомами, электроны, было развито в классической электронной теории. Друде предположил, что электроны образуют в металлах своеобразный «электронный» газ, принимающий участие в термодинамических процессах металла и подчиняющийся законам термодинамики, подобно идеальному газу. Отсюда следовало, что средняя энергия электрона E определяется температурой тела

$$E = \frac{3}{2} kT.$$

Электроны движутся хаотически, так что средний заряд, переносимый ими через любое сечение за некоторый интервал времени, равен нулю. Но если наложить внешнее электрическое поле, то на тепловую скорость наложится некоторая скорость направленного движения: вся совокупность электронов будет смещаться против поля, «сдуваться» полем с некоторой средней скоростью v_d, называемой дрейфовой скоростью:

$$v_d = \frac{1}{2} v_{d\,\text{макс}} = \frac{1}{2} \frac{eE\tau}{m} = \frac{e\tau}{2m} E,$$

где E—напряженность электрического поля, τ—среднее время свободного пробега электронов между двумя столкновениями. Средняя скорость дрейфового движения пропорциональна напряженности поля E. Коэффициент пропорциональности от поля не зависит и является характеристикой вещества. Он называется подвижностью электронов. В таком случае:

$$v_d = \mu E; \quad \mu = \frac{e\tau}{2m} = \frac{el}{2mv_T},$$

где l—длина свободного пробега, v_T — скорость теплового движения. Отсюда получается известная формула Друде:

$$j = env_d = en\mu E = \sigma E; \quad \sigma = \frac{e^2 nl}{2mv_T} = \frac{e^2 n\tau}{2m}.$$

С ростом температуры длина свободного пробега уменьшается, а скорость увеличивается, поэтому время свободного пробега уменьшается, а следовательно, уменьшается и проводимость и сопротивление растет. Объяснение электропроводности, теплопроводности, получение теоретически закона Ома и Джоуля — Ленца явилось крупным достижением электронной теории металлов, несмотря на то, что само представление о невзаимодействующих свободных электронах отнюдь не очевидно, поскольку они заряжены и находятся во взаимодействии с остальными электронами и ионами решетки. Однако классическая электронная теория приводит к неправильному выражению для теплоемкости. Действительно, ионы решетки имеют кинетическую и потенциальную энергию, среднее значение полной энергии должно быть $6\,kT/2$ ($3/2\,kT$ — кинетическая энергия и столько же потенциальная энергия). Кроме того, свободные электроны должны иметь кинетическую энергию $3/2\,kT$. Концентрация электронов совпадает по порядку величины с концентрацией ионов, поэтому полная энергия должна была бы быть $3\,kT +$

$+ 3/2\ kT$ на грамм-атом, откуда молярная теплоемкость должна быть не менее 9 *кал/моль*, что находится в противоречии с законом Дюлонга — Пти, из которого следует, что электроны не участвуют в аккумулировании тепловой энергии, а следовательно, они не могут иметь средней энергии $3/2\ kT$. Но это говорит о полной неприменимости классических представлений о свободном электронном газе с максвелловским распределением электронов по скоростям (энергиям).

Распределение Ферми. Неприменимость классических представлений вытекает из того факта, что они игнорируют волновые свойства электронов, определяющих их поведение в решетке. Учет волновых свойств приводит к замене распределения Максвелла на распределение Ферми электронов по состояниям:

$$f = \frac{1}{e^{\frac{(E-F)}{kT}} + 1}.$$

Величина F (обозначаемая также через μ) носит название энергии или уровня Ферми.

Свойства распределения Ферми: а) $T = 0$. Если $T = 0$, то $f = 1$ при $E < F$ и $f = 0$ при $E > F$, т. е. все состояния с $E < F$ заняты электронами, а все состояния с $E > F$ свободны. Отсюда вытекает, что энергия Ферми представляет собой величину, численно равную максимальной энергии, которую имеют электроны в металле при $T = 0$.

б) $T > 0$. Если температура тела больше нуля, то f близко к единице при $E \ll F$, близко к нулю при $E \gg F$, равно $1/2$ при $E = F$ и быстро меняется от единицы до нуля при изменении энергии от величины, на несколько единиц kT меньше F до величин, на несколько единиц kT больше F. На рис. 305 приведено распределение Ферми при $T = 0$ и $T > 0$.

в) При $T > 0$ и $E \gg F$ распределение Ферми переходит в распределение Максвелла — Больцмана:

$$E \gg F; \quad e^{\frac{E-F}{kT}} \gg 1, \quad \frac{1}{e^{\frac{E-F}{kT}} + 1} \approx e^{+\frac{F}{kT}} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

г) Системы, описываемые распределением Ферми, называются вырожденными.

Плотность состояний. Число состояний $N(E)$ в единице объема приходящихся на единичный интервал энергии E, называется плотностью состояний. Зная эту величину и вероятность заполнения, можно подсчитать среднюю энергию электронов. Нахождение плотности состояний основано на соотношении неопределенности и принципе Паули. В фазовом пространстве — пространстве импульсов и обычном пространстве выделяются элементарные ячейки объемом h^3, в которых могут помещаться не более двух электронов с противоположно направленными спинами, или элементарный объем в пространстве импульсов в единичном объеме кристалла:

$$dp_x\, dp_y\, dp_z = \frac{h^3}{V}.$$

На интервал энергии dE в фазовом пространстве придется объем шарового слоя $4\pi p^2\, dp$ в пространстве импульсов и объеме V кристалла. Число состояний, следовательно, будет равно $4\pi p^2\, dp \frac{V}{h^3}$.

Для нахождения $N(E)$ необходимо перейти к E, пользуясь связью между E и p:

$$E=\frac{p^2}{2m};\ dE=\frac{p}{m}dp \quad \text{или} \quad dp=\frac{m}{p}dE;$$

и разделить это число состояний на объем кристалла V. Тогда

$$N(E)dE=2\frac{1}{V}\cdot\frac{4\pi p^2\,dpV}{h^3}=2\cdot\frac{4\pi m\sqrt{2mE}}{h^3}dE=4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}E^{1/2}\,dE.$$

Выражение показывает, что с ростом энергии число состояний на единицу энергии возрастает. Множитель «2» обусловлен спином электрона.

Энергия Ферми. Величину энергии Ферми можно найти из следующих соображений. Число электронов, приходящихся на интервал энергии dE в единице объема кристалла:

$$dn=N(E)f(E,T)\,dE.$$

Отсюда концентрацию электронов n можно выразить следующим образом:

$$n=\int\limits_0^\infty N(E)f(E,T)\,dE.$$

При $T=0$ этот интеграл легко берется:

$$n=\int\limits_0^{F_0}4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}E^{1/2}\,dE=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}F_0^{3/2},$$

откуда

$$F_0=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}.$$

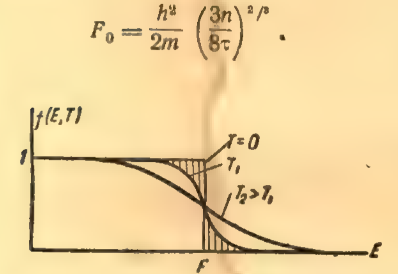


Рис. 305

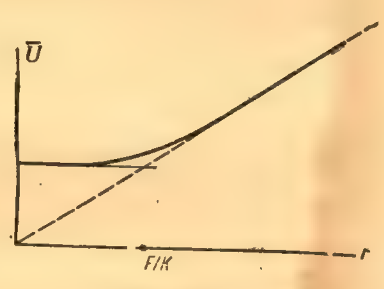


Рис. 306

Зависимость уровня Ферми от температуры:

$$F=F_0\left[1-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{kT}{F_0}\right)^2\right],$$

где F_0 — величина уровня Ферми при $T=0$.

Средняя энергия электронов в металле. Средняя энергия электронов в металле Е найдется следующим образом. В интервале энергии E; $E+dE$ имеется $N(E)\,dE$ состояний, на которых размещено $N(E)\,f\,dE$ электронов; так как они имеют энергию

$$N(E)f\,dE\cdot E,$$

то энергия всех электронов

$$U=\int\limits_0^\infty EN(E)f(E,T)\,dE.$$

Средняя энергия электронов

$$E=\frac{U}{n}=\frac{3}{5}F_0\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{F_0}\right)^2\right]$$

много больше $\frac{3}{2}kT$, как это следует из классической статистики.

Таким образом, в вырожденном электронном газе средняя энергия электронов практически не зависит от температуры.

Теплоемкость электронного газа. Энергия единицы объема электронного газа:

$$U=n\frac{3}{5}F_0\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{F_0}\right)^2\right],$$

отсюда удельная теплоемкость

$$c_V=\frac{dU}{dT}=\frac{\pi^2 nk^2}{2F_0}T.$$

Таким образом, теплоемкость вырожденного газа много меньше теплоемкости невырожденного газа и зависит от температуры, при $T=0$ и $c_V=0$. Справедливость закона Дюлонга — Пти определяется тем, что электроны не участвуют в аккумулировании тепловой энергии. С ростом температуры газа теплоемкость электронного газа будет возрастать, энергия газа будет увеличиваться пропорционально температуре. При больших T распределение Ферми переходит в распределение Максвелла — Больцмана. Газ становится невырожденным. На рис. 306 приведена кривая изменения энергии единицы объема газа с ростом температуры. Предельную температуру вырождения можно определить условием: $kT_{\text{выр}}=F_0$.

Для металлов эта величина составляет десятки и сотни тысяч градусов.

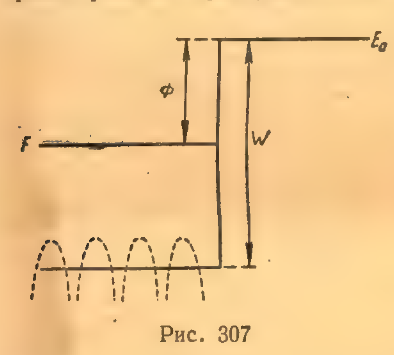


Рис. 307

Работа выхода. Опыт показывает, что металлы представляют собой потенциальную яму для электронов. Это означает, что потенциальная энергия электрона вне металла больше, чем внутри металла. Именно этим обеспечивается устойчивое нахождение электронов в металле, в противном случае электроны могли бы покинуть металл. Разность потенциальных энергий электрона вне металла и внутри металла носит название истинной работы выхода W. Если обозначить энергию электрона в вакууме через E_a, тогда в металле она будет E_a-W (рис. 307). Энергия W представляет собой усредненную энергию решетки (пунктирная кривая на рис. 307).

Кинетическая энергия электрона в основном меньше работы выхода W. Но с ростом температуры электроны увеличивают свою энергию, переходят на другие энергетические уровни. У некоторой части электронов энергия E может оказаться больше работы выхода и электрон может выйти из металла. Минимальная скорость, необходимая для выхода, должна определяться соотношением $\frac{mv^2_{\text{мин}}}{2}=E_a$. За время dt из металла будет вынесен заряд электронами, имеющими скорость в интервале v_x, v_x+dv_x, равный $env_x\,dtf$.

Полный заряд, прошедший в единицу времени через единичную площадку (плотность тока), будет равен:

$$j = en \int_{E_a}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} v_x f(E, T)\, dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= \frac{4\pi m^3 k^2 e}{h^3} T^2 e^{-\frac{E_a - F}{kT}} = AT^2 e^{-\frac{\Phi}{kT}},$$

где $A = 120$ *а/см² град*, $\Phi = E_a - F$ — термодинамическая, или эффективная работа выхода. Она имеет наглядный смысл: Ф равна той работе, которую необходимо затратить для удаления электрона с уровня Ферми.

Уровень Ферми системы тел. Если имеется система тел, которая находится в термодинамическом равновесии, то уровни Ферми всех тел системы совпадают.

Внутренняя и внешняя контактная разность потенциалов. Если два куска металла с различными энергиями Ферми привести в контакт, то уровни Ферми должны совпасть. В таком случае на границе между металлами возникнет скачок потенциала $U_i = \frac{F_1 - F_2}{e}$ (рис. 308). Внутренняя контактная разность потенциалов равна разности энергий Ферми изолированных кусков металлов.

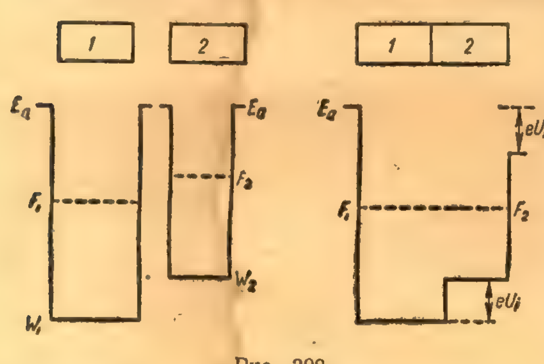


Рис. 308

Между двумя кусками металлов, разделенных воздушным промежутком некоторой ширины, возникает контактное поле U_k, носящее название внешней контактной разности потенциалов. Она равна разности термодинамических работ выхода:

$$eU_k = \Phi_1 - \Phi_2 \text{ (рис. 308).}$$

Это вытекает из закона сохранения энергии.

§ 5. Полупроводники

Общая характеристика. С точки зрения зонной теории к полупроводникам относятся вещества, ширина запрещенной зоны которых не превосходит 2—3 *эв*. Важнейшим свойством и признаком полупроводников является зависимость электрических свойств от внешних условий: температуры, освещенности, давления, внешних полей. Формальным, но не решающим, признаком принадлежности вещества к классу полупроводников является величина электропроводности, которая для них может принимать значение в пределах $\sigma = 10^4 \div 10^{-10}$ *ом*$^{-1}$ *см*$^{-1}$. К металлам (проводникам) относятся вещества с удельной проводимостью $\sigma \sim 10^6 \div 10^5$ *ом*$^{-1}$ *см*$^{-1}$, к изоляторам относятся вещества с $\sigma < 10^{-14}$ *ом*$^{-1}$ *см*$^{-1}$.

Температурная зависимость сопротивления и проводимости полупроводников. Сопротивление полупроводников с ростом температуры падает. Опыт дает зависимость сопротивления от температуры в виде

$$R = R_0 e^{\frac{B}{T}}$$

и проводимости в виде

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{B}{T}} = \sigma_0 e^{-\frac{E_a}{kT}},$$

Величина E_a носит название энергии активации. По своему физическому смыслу энергия активации различна для полупроводников различного типа. На рис. 309 приведен ряд зависимостей σ и R от T и $1/T$ для металлов и полупроводников.

В некоторой области температур сопротивление полупроводника может возрастать с ростом температуры. Такие полупроводники называются вырожденными.

Ионные и электронные полупроводники. Полупроводниковые вещества разделяются на ионные и электронные по типу носителей тока. В ионных полупроводниках носителями тока являются ионы решетки, в электронных — электроны или дырки. Ионные полупроводники не могут найти применение для стационарных приборов, поскольку прохождение через них тока приводит к переносу вещества и разрушению полупроводника. Практическое значение имеют электронные полупроводники.

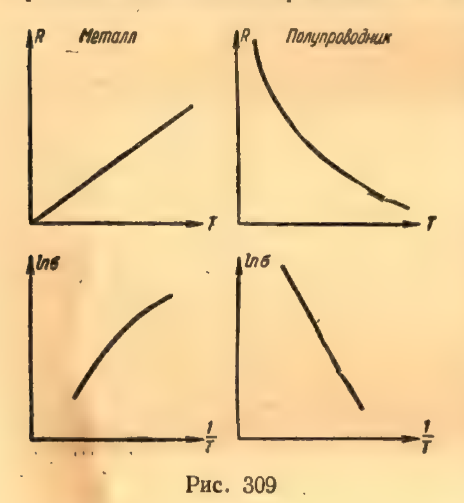


Рис. 309

Типы полупроводниковых веществ. К классу полупроводниковых веществ относятся большинство веществ. К ним принадлежат: 1) чистые элементы: B, C, Si, P, S, Ge, As, Se, Sn, Sb, Te, J. Указанные элементы обведены чертой в части таблицы Менделеева (рис. 310). Справа — указана ширина запрещенной зоны в *эв*. Ширина запрещенной зоны растет по группам слева направо, по периодам — снизу вверх; 2) большинство минералов; 3) соединения типа $A^{I}B^{VII}$ (CuCl, AgBr, ...); 4) соединения типа $A^{II}B^{VI}$ (ZnS, CdS, ZnO, ...); 5) соединения типа $A^{III}B^{V}$ (AlP, AlBi, GaP, GaAs); 6) соединения типа $A^{IV}B^{IV}$ (Si C, Ge Si); 7) соединения типа $A^{I}B^{VI}$ (CuS, CuO, Cu_2O, ...); 8) соединения типа $A^{IV}B^{VI}$ (PbS, PbTe, ...); 9) многие органические соединения.

Собственные и примесные полупроводники. Полупроводники, проводимость которых обусловлена переходами электронов из заполненной, или валентной, зоны в свободную зону, называются собственными. Полупроводники, проводимость которых обусловлена ионизацией примеси, называются примесными. Примесные полупроводники делятся на электронные и дырочные. В электронном полупроводнике основными носителями тока являются электроны. Они возникают при ионизации атомов примеси — атомы примеси отдают свои электроны, превращаясь тем самым в положительно заряженные ионы. Такие примеси называются донорными, или донорами (отдающими). В дырочном полупроводнике основными носителями тока являются дырки. Они возникают в валентной зоне при переходе электронов из нее к атомам примеси, которые тем самым пре-

вращаются в отрицательно заряженные ионы. Такие примеси носят название акцепторных, или акцепторов (принимающих).

Механизм проводимости в собственном полупроводнике. Рассмотрим его на примере элемента четвертой группы Ge. Атомы германия четырехвалентны. Они образуют кубическую решетку, в которой каждый атом связан парноэлектронной связью с четырьмя ближайшими атомами (рис. 311). На том же рисунке связь атомов германия дана на плоской диаграмме. Из рис. 311 видно, что все электроны связаны со своими атомами. При этом необходимо иметь в виду, что каждый электрон может

группы / периоды	II	III	IV	V	VI	VII	
II	Be	B (1,1)	C (5,2)	N	O		
III		Al	Si (1,1)	P (1,5)	S (2,5)	Cl	
IV		Ca	Ge (0,75)	As (1,2)	Se (1,7)	Br	
V		In	Sn (0,08)	Sb (0,12)	Te (0,36)	J (1,25)	Xe
VI			Pb	Bi	Po	At	

Рис. 310

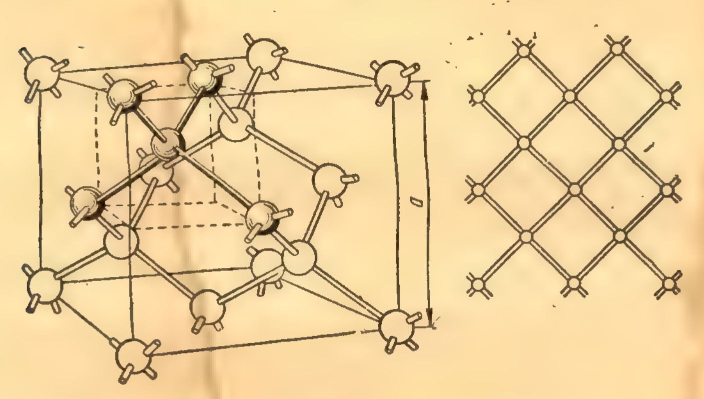


Рис. 311

переходить от атома к атому при встречном движении другого электрона — атомы могут обмениваться электронами. Однако эти электроны не переносят ток — средний заряд, переносимый ими, равен нулю. Прикладываемое внешнее электрическое поле не может вызвать электрического тока, поскольку обычные поля не могут порвать связь электронов с атомами. Для этого требуются поля, сравнимые с внутриатомными. В энергетическом изображении такое состояние кристалла германия можно изобразить в виде полностью заполненной валентной зоны и совершенно пустой верхней зоны; в верхней — зоне проводимости или свободной зоне — нет носителей, а в нижней — валентной или заполненной зоне — имеются электроны, которые однако не могут переносить ток, поскольку это связано с переходом на более высокие

энергетические уровни, которые все заняты. Чтобы электрон стал свободным, необходимо затратить некоторую энергию, чтобы разорвать его связь с определенным атомом. Такой энергией может явиться энергия тепловых колебаний решетки, энергия фотона, корпускулярного излучения. Поглотив фотон или фонон достаточной энергии, электрон становится свободным и может теперь осуществлять перенос тока. Это обычный электронный механизм переноса тока. Но в собственном полупроводнике возможен и другой механизм. Действительно, в валентной зоне появилось одно свободное состояние— «дырка» в распределении электронов по состояниям валентной зоны. Но это свободное состояние позволяет электронам валентной зоны перемещаться против поля, в результате чего свободное состояние — дырка — будет перемещаться по полю. Перемещение дырки — это перемещение одного нескомпенсированного положительного заряда атома. Поэтому движение дырки, обусловленное движением совокупности электронов в противоположном направлении, осуществляет перенос положительного заряда. В собственном полупроводнике, следовательно, осуществляется электронный (отрицательный) и дырочный (положительный) механизм переноса тока. Число электронов в свободной зоне всегда равно числу дырок в валентной зоне в собственном полупроводнике. Как показывает опыт и расчет, движение свободного состояния можно рассматривать как движение некоторой частицы, имеющей положительный заряд и некоторую эффективную массу. Если подвижность дырок и электронов обозначить через μ_p и μ_n, концентрацию электронов через n, а дырок — p, то проводимость собственного полупроводника можно записать в виде:

$$\sigma = en\,\mu_n + ep\mu_p = en\mu_p\,(1 + b),$$

где b — отношение подвижностей:

$$b = \frac{\mu_n}{\mu_p}.$$

Донорная примесь. Пусть в германии имеется в виде примеси элемент пятой группы, например, фосфор. Атом его имеет пять валентных электронов. Четыре из них осуществят парноэлектронную связь с ближайшими четырьмя атомами германия. Но один из валентных электронов фосфора оказывается незанятым. Он испытывает притяжение со стороны соседних атомов. Его энергия связи с атомом фосфора уменьшается приблизительно в ε^2 раз, где ε — диэлектрическая постоянная германия, равная 16. Поэтому достаточно незначительной энергии, чтобы оторвать этот электрон от атома P, электрон тем самым становится свободным носителем тока. Но положительный заряд, возникший в результате ионизации P, связан с ним. Поэтому при наложении внешнего электрического поля ток будет осуществляться только свободными электронами. Следовательно, донорная примесь обусловливает электронный механизм проводимости (электронный полупроводник или полупроводник n-типа). В электронном полупроводнике возможно некоторое количество дырок, обусловленных переходами электронов из валентной зоны, т. е. при ионизации атомов самого германия. Но так как для этого требуется значительно большая энергия, то концентрация дырок будет много меньше концентрации электронов до тех пор, пока в полупроводнике имеется неионизованная примесь. Дырки в электронном полупроводнике называются неосновными носителями. Проводимость электронного полупроводника можно выразить в виде $\sigma = en\mu_n$.

В энергетическом представлении донорный полупроводник можно изобразить с помощью примесного уровня энергии, расположенного в запрещенной зоне на небольшом расстоянии от дна свободной зоны (рис. 312).

Акцепторная примесь. Пусть в германии введен в качестве примеси элемент третьей группы, например, бор. Он имеет три валентных электрона, которые могут осуществить связь с тремя атомами германия. Одна связь оказывается незавершенной. Для ее завершения бор должен за-

хватить электрон, принадлежащий атомам германия. В этом случае атом бора будет осуществлять связь с четырьмя атомами германия, превратившись в отрицательный ион. Отрицательный заряд будет локализован на атоме бора. Но незавершенная связь у пары атомов германия может блуждать по кристаллу. Блуждание незавершенной связи представляет собой перемещение нескомпенсированного положительного заряда-дырки в связях. При наложении внешнего поля дырка будет двигаться, дрейфовать по полю, отрицательный же заряд связан с атомом бора и принимать участие в переносе тока не будет. Следовательно, в акцепторном полупроводнике носителями тока будут дырки. В нем могут быть и электроны при переходе их из валентной зоны в свободную. Но для полного отрыва электрона от атома германия требуется значительно больше энергии, чем для перевода его к атому бора, поэтому свободных электронов в германии с примесью бора будет много меньше, пока не все атомы примеси ионизованы. В энергетическом представлении акцепторный полупроводник можно представить энергетическим уровнем в запрещенной зоне вблизи потолка валентной зоны (рис. 313).

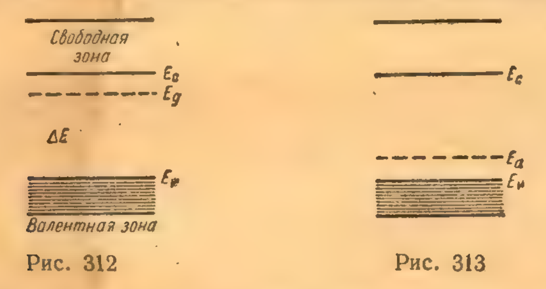


Рис. 312 Рис. 313

Амфотерные полупроводники. Большинство собственных полупроводников могут быть сделаны n- или p-типа введения соответствующих примесей. Такие полупроводники называются амфотерными. Некоторые полупроводники известны только одного типа или n-, или p-типа. Например, ZnO, CdS только электронные, а Cu_2O только дырочные. Тип атомного полупроводника, при введении в него примеси, можно определить по так называемому простому правилу валентности: если атом примеси имеет меньшую валентность, чем атомы основного вещества, то он будет акцептором, если большую — донором. При применении этого правила к сложному полупроводнику, например, типа $A^{III}B^{V}$ необходимо знать, какую из компонент замещает данный атом. Например, если элемент четвертой группы замещает A^{III}, то он будет выступать в качестве донора. Однако здесь важен целый ряд других факторов, например, размер атома. Атомы лития чаще бывают донорами, а не акцепторами, что связано с большим размером атома, который не вмещается в решетку многих веществ. С другой стороны, атомы кислорода чаще бывают акцепторами в силу большой электроотрицательности.

Изменение проводимости полупроводников в основном связано с изменением концентрации носителей и в значительно меньшей степени подвижности. Изменение концентрации примеси сильно влияет на проводимость, в большинстве случаев увеличение количества примеси приводит к уменьшению сопротивления, но возможны случаи, когда увеличение концентрации примеси приводит к уменьшению проводимости. Концентрация примеси в полупроводниках может меняться от 10^{12} атомов на $см^3$ до 10^{21} атомов на $см^3$. Подвижность носителей в полупроводниках может быть как больше, чем в металлах, так и меньше. Они могут иметь большую подвижность при малой электропроводности. Например, алмаз, облученный светом, имеет $\mu \approx 1000$ $см^2/в \cdot сек$. Такие полупроводники, как In*Sb* и In A*s*, имеют ко-

лоссальную подвижность в 80 000 и 30 000 $см^2/в \cdot сек$ соответственно в то время, как в металлах μ измеряется десятками и сотнями $см^2/в \cdot сек$.

Если в полупроводнике имеется и акцепторная и донорная примесь, то происходит взаимная компенсация их. При равной концентрации полупроводник будет вести себя как собственный. При неравной концентрации его тип определяется компонентой, имеющей большую концентрацию. Один и тот же элемент в данном веществе может давать как донорные уровни, так и акцепторные. Например, золото в германии может быть донором Au^+ и акцептором с тремя различными уровнями Au^-, Au^{--} и Au^{---}.

Примеры. На рис. 314 приведено изменение сопротивления в кремнии с изменением температуры. Повышение температуры приводит к уменьшению сопротивления (правая часть кривой). В некоторой области температур со-

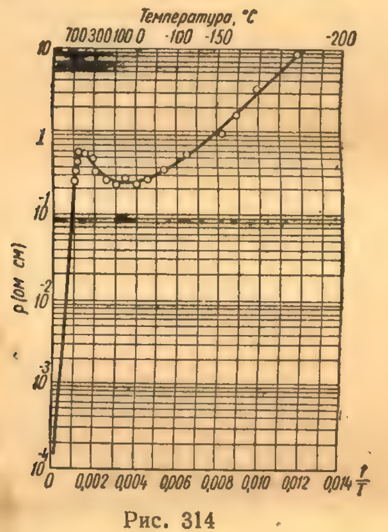


Рис. 314

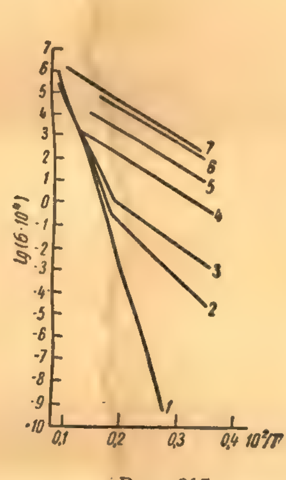


Рис. 315

противление с ростом T возрастает — полупроводник вырожденный — концентрация носителей перестает расти в силу того, что вся примесь уже ионизована, а для собственной проводимости температура еще мала, но подвижность при этом уменьшается. Дальнейшее повышение температуры приводит к появлению собственной проводимости, поэтому сопротивление снова уменьшается.

На рис. 315 приведена зависимость проводимости от температуры в закиси меди чистой (№ 1) и с примесью кислорода. С ростом концентрации наклон кривых уменьшается; это значит, что энергия активации с ростом концентрации уменьшается; наклон кривых в области примесной проводимости меньше наклона в области собственной проводимости. Угол наклона позволяет определить энергию активации.

Зонная структура германия и кремния. Расчет приводит к следующему выражению для связи энергии с квазиимпульсом в германии и кремнии.

Для дырок:

$$E_{1,2} = -\frac{1}{2m_0}\left\{AP^2 \pm \sqrt{B^2 P^4 + C^2\left(P_x^2 P_y^2 + P_y^2 P_z^2 + P_z^2 P_x^2\right)}\right\},$$

$$E_3 = -\Delta - \frac{A}{2m_0} P^2.$$

Из этих выражений следует, что в Ge и Si имеется три ветви $E(P)$, соответствующие трем типам дырок. Две ветви сливаются при $P = 0$. Третья зона при $P = 0$ лежит ниже двух других, поэтому экспериментально эта зона не проявляется. В опыте обнаруживаются только два типа дырок. Постоянные имеют значение:

	A	B	C
Ge	$13{,}1 \pm 0{,}4$	$8{,}3 \pm 0{,}6$	$12{,}5 \pm 0{,}5$
Si	$4{,}0 \pm 0{,}1$	$1{,}1 \pm 0{,}4$	$4{,}1 \pm 0{,}4$

На рис. 316 приведена структура зон германия и кремния вдоль направления 100 и 111. Из рис. 316 видно, что минимальное расстояние между зонами энергии, т. е. ширина запрещенной зоны, приходится на различные значения квазиимпульса в свободной и валентной зонах. Эффективная масса носителей вдоль различных кристаллографических направлений различна.

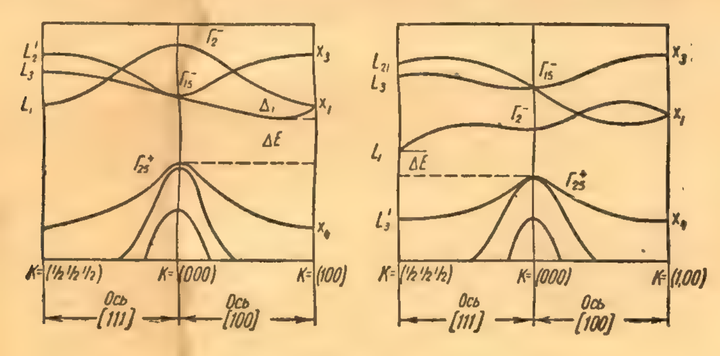


Рис. 316

Эффект Пуля. С ростом напряженности электрического поля проводимость, начиная с некоторого значения поля E_k начинает расти по экспоненциальному закону: $\sigma = \sigma_0 e^{\alpha(E-E_K)}$. Возрастание проводимости связано с ростом концентрации носителей, при больших полях происходит вырывание полем носителей из связей или ионизация атомов свободными носителями, получившими достаточную для ионизации энергию на длине свободного пробега (ударная ионизация).

Эффект Зинера. Одним из механизмов, приводящих к пробою в сильных полях, является эффект Зинера. В сильных полях зоны энергии наклонены. В таком случае электрон с некоторой энергией может пройти через «запрещенную зону» туннельным эффектом, т. е. туннельным переходом между двумя точками, разделенным потенциальным барьером конечной высоты и ширины, в результате чего он оказывается в свободной зоне. Вероятность перехода связана с напряженностью поля E и шириной запрещенной зоны E_g:

$$\sim e^{-\gamma \frac{E_g^{3/2}}{E}}.$$

Зависимость подвижности от температуры. В идеальной решетке электроны должны двигаться без сопротивления, т. е. без рассеяния. В реальных кристаллах имеются различные нарушения идеальности решетки. Это приводит к рассеянию электронной волны, что макроскопически проявляется как сопротивление электрическому току. Электроны (дырки) могут испытывать рассеяние на различных нарушениях идеальности

решетки: тепловые колебания атомов решетки (столкновение носителей с фононами), ионы примеси, фотоны, корпускулярные частицы большой энергии, дислокации, экситоны, электроны, дырки, пустые узлы или смещенные в междоузлие атомы вещества.

Эффективные сечения рассеяния на различных нарушениях идеальности решетки различны. Наибольшее значение в большинстве случаев имеют рассеяния на тепловых колебаниях и ионах примеси. Именно они определяют температурную зависимость подвижности носителей. Рассеяние на тепловых колебаниях решетки приводит к зависимости подвижности от температуры в виде

$$\mu_T = c\,\frac{T^{-3/2}}{m^{5/2}}\,,$$

где c — некоторая константа, связанная с упругими характеристиками кристалла,

m — эффективная масса.

Чем больше температура, тем сильнее колебания решетки, тем меньше длина свободного пробега и меньше подвижность. Рассеяние на ионах примеси приводит к следующей зависимости подвижности от температуры:

$$\mu_i \approx \frac{T^{3/2}}{N_i\,m^{1/2}}\,,$$

где N_i — концентрация ионов примеси. Так как вероятности рассеяния на различных нарушениях решетки аддитивны, то обратные величины подвижностей, обусловленные различными факторами, складываются, поэтому

$$\frac{1}{\mu} = aT^{3/2} + \frac{b}{T^{3/2}}\,.$$

Опыт дает не только зависимость типа 3/2 или —3/2, но и 5/2, 7/2, 1/2. Для германия и кремния эмпирическая зависимость дрейфовой подвижности от температуры имеет вид:

германий:

$$\mu_p = 9{,}1\cdot 10^8\,T^{-2,3}\ \text{см}^2/\text{в}\cdot\text{сек},$$

$$\mu_n = 3{,}5\cdot 10^7\,T^{-1,67}\ \text{см}^2/\text{в}\cdot\text{сек}.$$

При комнатной температуре получаются значения $\mu_n = 3\,800$ *см²/в · сек*; $\mu_p = 1\,800$ *см²/в · сек*;

кремний:

$$\mu_n = 4{,}72\cdot 10^9\,T^{-2,6}\ \text{см}^2/\text{в}\cdot\text{сек},$$

$$\mu_p = 2{,}95\cdot 10^8\,T^{-2,3}\ \text{см}^2/\text{в}\cdot\text{сек}.$$

Приведенные данные относятся к рассеянию на тепловых колебаниях.

Плотность квантовых состояний в зонах. Вблизи границ зон зависимость между энергией и квазиимпульсом можно представить в виде квадратичной функции. Это позволяет написать выражение для плотности квантовых состояний у границ зон совершенно аналогично плотности квантовых состояний в металлах с учетом того, что энергия в зоне должна отсчитываться от границы, а именно:

$$N(E) = 4\pi\left(\frac{2m_n}{h^2}\right)^{3/2}(E - E_c)^{1/2},$$

и

$$N(E) = 4\pi\left(\frac{2m_p}{h^2}\right)^{3/2}(E_v - E)^{1/2}.$$

Первое выражение относится к свободной зоне, E_c — энергия на дне зоны; второе — к валентной зоне, E_v — энергия у потолка зоны, m_n, m_p — эффективные массы электрона и дырки. Найти вид N (E) внутри зоны невозможно, так как неизвестна связь E с k по всей зоне. Но N (E) должно быть плавной функцией, а интеграл от N(E) по всей зоне должен равняться числу состояний в зоне.

Плотность квантовых состояний примесных уровней. Плотность квантовых состояний в примесных уровнях представляет собой δ-функцию и имеет вид:

$$N(E) = N_д \delta (E - E_д); \quad N(E) = N_а \delta (E - E_а),$$

где $N_д$ и $N_а$ — концентрация атомов доноров и акцепторов.

Функция распределения дырок. Эта функция легко находится из условия, что вероятность того, занято состояние электроном или дыркой (отсутствие электрона), есть вероятность достоверного события (или электрон присутствует или отсутствует, других возможностей нет):

$$f_n + f_p = 1.$$

Отсюда функция распределения дырок по состояниям имеет вид:

$$f_p(E, T) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{E-F}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{F-E}{kT}} + 1}.$$

Она совершенно тождественна функции распределения электронов, если энергию для дырок отсчитывать в противоположном направлении по сравнению с электроном, т. е. энергия дырок меньше у потолка зоны, чем в глубине.

Количество электронов на донорном уровне. Количество электронов в некотором интервале энергии находится простым интегрированием произведения плотности состояний на вероятность нахождения электронов на данных уровнях по значениям энергии интервала:

$$\int dn = \int N(E) f(E, T) dE.$$

Для примесного донорного уровня это дает (интегрирование с δ-функцией!):

$$n_д = \frac{N_д}{e^{\frac{E_д - F}{kT}} + 1},$$

где $N_д$ — концентрация доноров,
а $E_д$ — энергия донорного уровня.

Количество дырок на акцепторном уровне. Количество дырок, связанных с акцепторным уровнем, можно найти как разность между концентрацией акцепторов и концентрацией электронов на нем, или непосредственно с помощью функции распределения дырок. При этом атом акцептора считается поставщиком дырок: если на нем нет электрона, то на нем находится дырка:

$$p_а = \frac{N_а}{e^{\frac{F - E_а}{kT}} + 1}.$$

Эффективное число состояний. Если уровень Ферми лежит ниже дна зоны проводимости, то функция распределения Ферми для электронов переходит в функцию распределения Максвелла — Больцмана:

$$\text{при } \frac{(E_c - F)}{kT} \gg 1 \text{ и } e^{\frac{E_c - F}{kT}} \gg 1,$$

$$f(E, T) \simeq e^{-\frac{E-F}{kT}}.$$

Совершенно аналогично для дырок: если уровень Ферми лежит выше потолка зоны проводимости, то

$$\frac{(F - E_v)}{kT} \gg 1,$$

$$e^{\frac{F-E}{kT}} \gg 1, f_p(E, T) = e^{-\frac{F-E}{kT}}.$$

В таком случае количество электронов в свободной зоне можно представить в виде:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} e^{-\frac{E-F}{kT}} dE = 2\left(\frac{2\pi\, m_n\, kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_c - F}{kT}}.$$

Величина

$$2\left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2}\right)^{3/2} = N_c = 4{,}82 \cdot 10^{15} \left(\frac{m_n}{m_0}\right)^{3/2} T^{3/2}$$

носит название эффективного числа состояний в свободной зоне. Аналогично для дырок:

$$p = 2\left(\frac{2\pi m_p\, kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{F-E_v}{kT}} = N_v\, e^{-\frac{F-E_v}{kT}},$$

где

$$N_v = 2\left(\frac{2\pi\ m_p k\ T}{h^2}\right)^{3/2} = 4{,}82 \cdot 10^{15} \left(\frac{m_p}{m_0}\right)^{3/2} T^{3/2} -$$

эффективное число состояний в валентной зоне.

Произведение концентраций электронов в свободной зоне и дырок в валентной зоне определяется только шириной запрещенной зоны и температурой, не зависит от наличия примеси:

$$np = N_c N_v e^{-\frac{E_c - E_v}{kT}} = 2{,}31 \cdot 10^{31}\ T^3 \left(\frac{m_n\, m_p}{m_0^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = n_i^2$$

и равно произведению концентрации носителей в собственном полупроводнике при данной температуре T. Введение примесей меняет соотношение электронов и дырок, оставляя их произведение неизменным.

Собственная проводимость германия и кремния. Собственную проводимость германия и кремния можно подсчитать, зная ширину запрещенной зоны и подвижность носителей. Собственная концентрация носителей в германии при $T \approx 300°$ К:

$$n = p = 2{,}41 \cdot 10^{19}\, e^{\frac{-6{,}36}{0{,}026}} = 2{,}4 \cdot 10^{13}\ см^{-3}.$$

При вычислении эффективные массы считаются равными массе электрона, а ширина запрещенной зоны при комнатной температуре $\Delta E \approx 0{,}72$ *эв*.

Для кремния ширина запрещенной зоны при комнатной температуре равна 1,08 *эв*, поэтому

$$n = p = 2{,}41 \cdot 10^{19}\ e^{\frac{-E_c - E_v}{2kT}} = 2{,}4 \cdot 10^{10}\ см^{-3}.$$

Тогда для германия:

$$\sigma = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, 1800 \cdot 3{,}1 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{13} = 0{,}0214\ ом^{-1}\ см^{-1},$$

или $\rho = 48$ *ом · см*.

Для кремния аналогичный подсчет дает $\rho = 1,4 \cdot 10^5$ *ом · см.*

Для получения собственной проводимости образцы должны быть очищены очень тщательно. Например, в германии концентрация примеси должна составлять не более 10^{12} $см^{-3}$, а в кремнии $10^{10}-10^{9}$ $см^{-3}$. В случае германия подобная степень чистоты достигнута; германий с собственной проводимостью получен, это значит, что в нем на каждые 10^{12} атомов германия приходится менее одного атома примеси. Кремний с собственной проводимостью не получен. Имеются образцы с удельным сопротивлением порядка 1000 *ом·см*, что далеко еще от собственной проводимости.

Положение уровня Ферми в полупроводнике. Оно определяется из условия электронейтральности: полный заряд в единице объема равен нулю, или число положительно заряженных частиц должно равняться числу отрицательно заряженных частиц:

$$n + N_а^- - p - N_д^+ = 0,$$

где n — концентрация электронов в свободной зоне, $N_а^-$ — отрицательно заряженных ионов акцепторов, p — дырок в валентной зоне, $N_д^+$ — положительно заряженных ионов доноров. Так как

$$N_а^- = N_а - p_а, \text{ а } N_д^+ = N_д - n_д,$$

где $n_д$ — количество электронов на донорном уровне, а $p_а$ — количество дырок на акцепторном уровне, то

$$n + n_д - p - p_а = N_д - N_а.$$

Выражая концентрацию электронов и дырок с помощью плотности состояний и функции распределения, можно получить основное уравнение для определения положения уровня Ферми (или электрохимического потенциала) в полупроводнике:

$$\frac{4\pi (2m_n)^{3/2}}{h^3} \int_{E_c}^{\infty} \frac{(E-E_c)^{1/2}dE}{e^{\frac{E-F}{kT}}+1} + \frac{N_д}{e^{\frac{E_д-F}{kT}}+1} -$$

$$-\frac{4\pi (2m_p)}{h^3} \int_{-\infty}^{E_v} \frac{(E_v-E)^{1/2}dE}{e^{\frac{F-E}{kT}}+1} - \frac{N_а}{e^{\frac{F-E_а}{kT}}+1} = N_д - N_а.$$

а) *Собственный полупроводник.* В собственном полупроводнике уровень Ферми должен лежать ниже E_c, но выше E_v. Поэтому можно воспользоваться максвелл-больцмановским приближением и записать:

$$N_c e^{-\frac{E_c-F}{kT}} = N_v e^{-\frac{F-E_v}{kT}},$$

откуда

$$F = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{N_c}{N_v} = \frac{E_c + E_v}{2} + kT \ln \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{3/4},$$

При $T = 0$ уровень Ферми лежит точно посредине запрещенной зоны. С ростом T он повышается $\sim T$ при $m_p > m_n$ (рис. 317).

б) *Донорный полупроводник.* Приближенное решение уравнения приводит к выражению:

$$F = \frac{E_c + E_д}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{N_c}{N_д}.$$

При $T = 0$ уровень Ферми лежит в середине между E_c и донорным уровнем. С ростом температуры уровень Ферми повышается, приближаясь к дну зоны проводимости, проходит через максимум, затем опускается. По мере истощения донорного уровня F опускается ниже $F_д$ и в дальнейшем будет приближаться к середине запрещенной зоны, что соответствует преобладанию собственной проводимости при больших температурах (рис. 317, 318). Концентрация электронов связана с концентрацией доноров соотношением:

$$n = \sqrt{N_д N_c}\, e^{-\frac{E_c - F_д}{2kT}}.$$

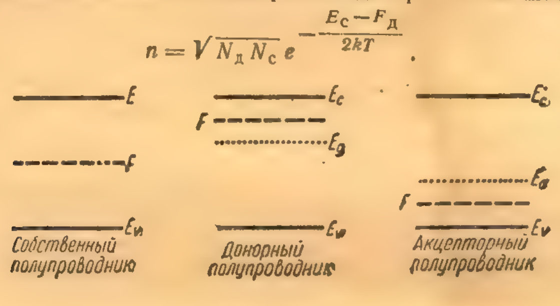


Рис. 317

При большой концентрации примеси и сильной ионизации ее уровень Ферми равен $F = E_c + kT\, ln \frac{N_д}{N_c}$, т. е. полупроводник вырожденный, концентрация электронов в свободной зоне практически не зависит от температуры (полупроводник вырожденный подобен металлу, где концентрация носителей также не зависит от температуры).

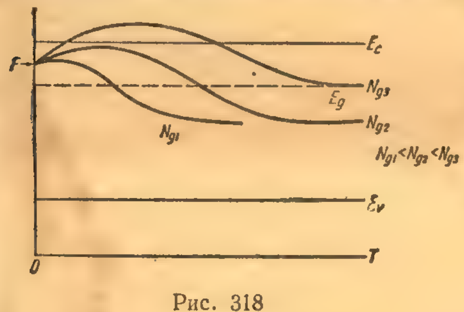


Рис. 318

в) *Акцепторный полупроводник.* Все результаты для донорного полупроводника справедливы и для акцепторного полупроводника при соответствующей замене характеристик донора на характеристики акцептора: при низкой температуре (слабая ионизация акцептора)

$$F = \frac{E_a + E_v}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_v}{N_a};$$

сильно ионизованная примесь

$$F = E_v - kT \ln \frac{N_a}{N_v}.$$

г) *Общий случай при* $N_д > N_а$ (слабая ионизация):

$$F = E_д + kT \ln \frac{N_д - N_а}{N_а}.$$

Концентрация электронов в свободной зоне равна

$$n = \frac{N_д - N_а}{N_а} N_c e^{-\frac{\Delta E_д}{kT}}.$$

З а в и с и м о с т ь ш и р и н ы з а п р е щ е н н о й о б л а с т и о т т е м п е р а т у р ы. Опыт показывает, что экспериментально определенные зна-

чения произведенной концентраций невполне точно совпадают со значением, вычисленным по формуле:

$$np = N_c N_v e^{-\frac{\Delta E}{kT}}.$$

Для совпадения можно ввести некоторый коэффициент $\alpha > 1$ так, чтобы

$$np = \alpha N_c N_v e^{-\frac{\Delta E}{kT}}.$$

Но его можно представить в виде

$$\alpha = e^{\frac{\beta}{k}},$$

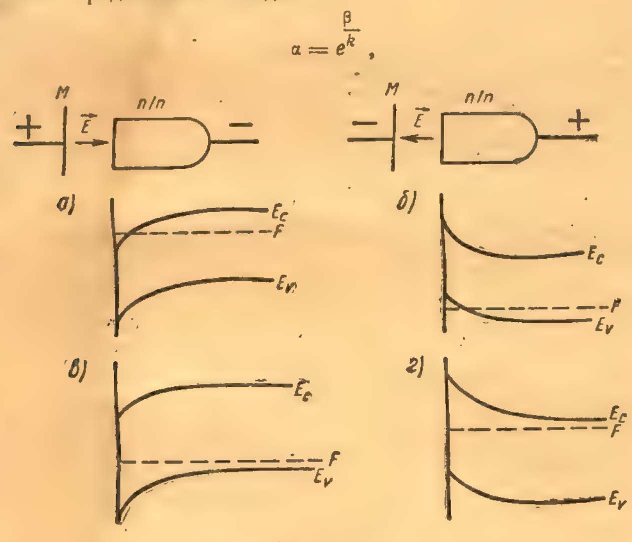


Рис. 319

что можно истолковать как изменение ширины запрещенной зоны с температурой:

$$np = N_c N_v e^{-\frac{\Delta E}{kT}} e^{\frac{\beta}{k}} = N_c N_v e^{-\frac{\Delta E - \beta T}{kT}}.$$

Для кремния $\beta = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ *эв/град*; для германия $\beta = 1 \cdot 10^{-4}$ *эв/град*. Тогда

	$T = 0°$ K	$T \simeq 300°$ K
Ge	$\Delta E = 0{,}75$ *эв*	0,72 *эв*
Si	$\Delta E = 1{,}18$ *эв*	1,08 *эв*

Изменение ширины запрещенной зоны обусловлено изменением обменного интеграла при изменении расстояния между атомами при нагреве, так как перекрытие волновых функций при этом меняется.

Дебаевская длина экранирования. При помещении полупроводника в электрическое поле происходит перераспределение свободных зарядов, и зоны энергии искривляются. Зоны опускаются, если на полупроводник наложен «минус», и поднимаются, если — наложен «плюс» (рис. 319). Искривление зон означает, что концентрация носителей в поверхностном слое меняется, а следовательно, меняется и сопротивление. На рис. 319 показано положение зон в полупроводнике при наложении поля. Случаи а и б соответствуют обогащению слоя носителями и увеличению про-

водимости, случаи в и г — обеднению носителями и увеличению сопротивления. При сильном искривлении зон в приповерхностном слое может измениться тип полупроводника: в *n*-полупроводнике появляется *p*-область а в *p*-полупроводнике — *n*-область. Переход между областями носит название *p-n*-перехода, *p-n*-переходы играют основную роль в работе полупроводниковых приборов.

Контакт полупроводника с металлом. При контакте полупроводника с металлом происходит перераспределение зарядов и возникновение контактных полей. При образовании контакта электроны уходят из тела, в котором уровень Ферми лежит выше, в тело, где он лежит ниже.

Однако переход некоторого количества носителей приводит к тому, что тела заряжаются. Возникшее электрическое поле будет направлено таким образом, что оно должно препятствовать дальнейшему переходу носителей. Контактное поле выравнивает уровни Ферми в контактирующих телах. Но появление контактного поля приводит к появлению объемного заряда в полупроводнике и, следовательно, к искривлению зон. При контакте донорного полупроводника с меньшей работой выхода, чем у металла, и акцепторного — с большой работой выхода, чем у металла, возникает слой повышенного сопротивления. Замечательной особенностью контакта является то, что его сопротивление зависит от направления внешнего поля, если внешнее поле направлено против контактного поля, то высота потенциального барьера уменьшается и ток резко возрастает с ростом напряжения на переходе. Если же внешнее поле совпадает с контактным полем, то оно увеличивает потенциальный барьер, и ток остается практически постоянным (и малым) через переход. Такой переход носит название выпрямляющего.

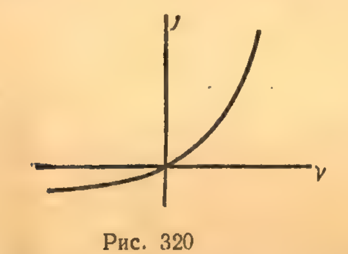


Рис. 320

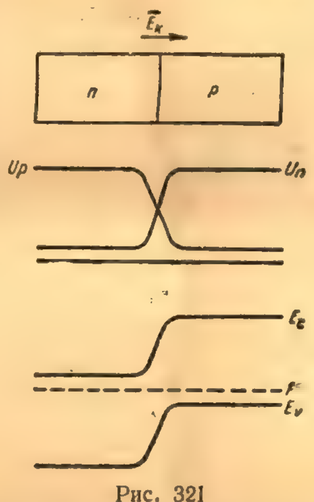


Рис. 321

Вольт-амперная характеристика его приведена на рис. 320.

Создание *p-n*-перехода. *P-n*-переход может быть создан путем введения в полупроводник примесей различного типа — доноров и акцепторов. Слой разделяющий *p*- и *n*-области полупроводника является *p-n*-переходом. В большинстве приборов *p-n*-переход создается именно таким способом.

Так как в одной части полупроводника имеется большая концентрация электронов, а в другой — дырок, то возникает их диффузия в соседние области. Но уход электронов из *n*-области нарушает электронейтральность этой области: она заряжается положительно за счет положительного заряда ионов доноров. К этому же приводит приход дырок в *n*-область. Наоборот, *p*-область заряжается отрицательно за счет пришедших электронов и нескомпенсированных зарядов акцепторов. Но если две части полупроводника заряжаются, то между ними должно возникнуть электрическое поле, направленное от

n-области к *p*-области. Это поле препятствует дальнейшему переходу электронов из *n*-области в *p*-область и обратному потоку дырок. Другими словами, возникают два потока — диффузионный и дрейфовый, которые уравновешивают друг друга, так что ток через *p-n* -переход равен нулю. Наличие контактного поля приводит к тому, что энергия электронов в *p*-области возрастает (она заряжается отрицательно), а энергия дырок возрастает в *n*-области. В области *p-n*-перехода возникает искривление энергетических зон, в результате чего возникают потенциальные барьеры как для электронов, так и для дырок. Потенциальные барьеры способствуют уходу из данной области неосновных носителей (рис. 321). В таком случае, чтобы перевести электрон из *n*-области в *p*-область, необходимо затратить энергию на преодоление потенциального барьера. Высота барьера определяется первоначальной разностью положений уровней Ферми в *p*- и *n*-областях. Так как в примесных полупроводниках уровень Ферми лежит вблизи разрешенных зон

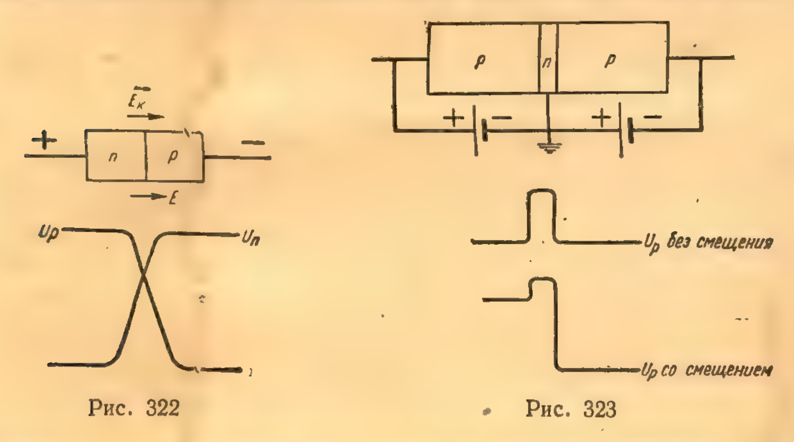


Рис. 322 Рис. 323

энергии, то высота потенциального барьера будет равна приблизительно ширине запрещенной зоны. Так как с изменением температуры уровень Ферми в примесном полупроводнике смещается, то, следовательно, высота потенциального барьера будет меняться. Но приборы основаны на использовании *p-n*-переходов, поэтому их характеристики, зависящие от высоты потенциального барьера, будут меняться. Например, при переходе к собственной проводимости потенциальный барьер исчезает, так как уровень Ферми в *p* - и *n*-областях располагается посредине запрещенной области. А это означает, что полупроводник теряет свойство выпрямления и усиления.

В ы п р я м л е н и е н а *p-n*-п е р е х о д е. О *p-n*-переходе, включенном в электрическую цепь так, что внешнее поле совпадает по направлению с контактным полем, говорят, что он включен в запирающем направлении (рис. 322) (на *n*-область подан плюс, а на *p*-область минус). При таком включении в цепи будет течь малый ток, величина которого практически не зависит от напряжения на переходе. Если внешнее поле направлено против внутреннего поля (плюс на *p*-область, минус на *n*-область), то о таком переходе говорят, что он включен в пропускном направлении. Величина тока резко зависит от напряжения на переходе.

Механизм выпрямления легко понять из энергетической диаграммы. Если внешнее поле включено параллельно внутреннему, то они препятствуют движению основных носителей — электронов из *n*-области в *p*-область и дырок из *p* - в *n*-область. Таким образом, ток через переход основными носителями не переносится. Но поле способствует переходу через переход неосновных носителей. Но так как их концентрация мала, то и ток будет мал.

Независимость тока от внешнего напряжения объясняется тем, что уже контактное поле полностью захватывало все неосновные носители, поэтому дальнейшее увеличение поля не может привести к росту тока, который достигает насыщения. Таким образом, при включении p - n - перехода в запирающем направлении ток через переход осуществляется только неосновными носителями, концентрация которых мала, поэтому в цепи будет идти ток небольшой величины, который называется обратным током выпрямителя. Если же включить внешнее поле антипараллельно внутреннему, то внешнее поле компенсирует внутреннее поле, уменьшает высоту потенциального барьера, в результате чего поток основных носителей —электронов из n - и дырок и p-областей — через переход возрастает, и в цепи начинает идти ток. С ростом поля высота барьера уменьшается все больше и больше, что приводит к все большему росту тока:

$$I = I_s \left(e^{\frac{eV}{kT}} - 1\right); \quad (I_s \text{ — обратный ток}).$$

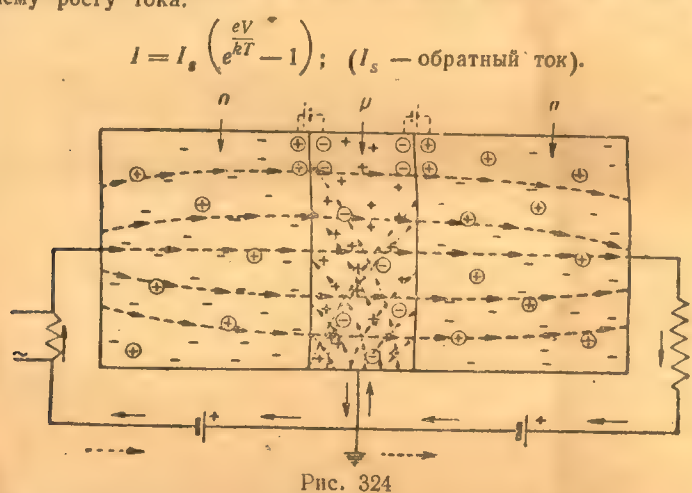


Рис. 324

Механизм выпрямления можно объяснить и несколько иначе. Выпрямление на p - n - переходе происходит в результате того, что сопротивление его зависит от направления внешнего поля. Если поле перемещает электроны вглубь n = области, а дырки — p - области, то область p - n - перехода, обедненная носителями, с большим сопротивлением. возрастает, потому растет сопротивление цепи и ток в цепи падает. Если же под действием внешнего поля электроны и дырки направляются к области перехода, то его сопротивление падает, благодаря чему общее сопротивление цепи падает.

Инжекция неосновных носителей. При равновесии в полупроводнике имеется определенное количество основных и неосновных носителей. Однако эту равновесную концентрацию можно нарушить. Увеличение концентрации неосновных носителей по сравнению с равновесной называется инжекцией (введением) неосновных носителей. Она может осуществляться светом, тепловым импульсом, полем. Инжекция играет решающую роль при работе полупроводниковых триодов-транзисторов.

Механизм работы плоскостного транзистора можно понять из рис. 323 и 324. Триод представляет собой два p - n - перехода, разделенных небольшим расстоянием, называемым базой. Различают триоды p - n - p - типа и n - p - n - типа, принцип их действия одинаков. Они отличаются только типом носителей в соответствующих областях. Один переход носит название эмиттерного, он соединен с низковольтной цепью (с усиливаемым сигналом). Другой переход носит название коллекторного, он соединен с высоковольтной цепью и приводит к усилению напряжения и мощности сигнала.

Если на эмиттер подается положительный сигнал, то высота потенциального барьера для дырок уменьшается, и их поток в n-область увеличивается, таким образом, p - n - переход приводит к инжекции дырок в базу (n - область). Введенные в базу носители, дырки, являются неосновными и неравновесными. Они начинают рекомбинировать с электронами и диффундировать ко второму переходу n - p. Если толщина базы невелика, то почти все дырки достигнут коллекторного перехода, где они будут подхвачены полем и переведены в p-область. Через коллекторный переход потечет возросший по сравнению с равновесным ток. Ток через коллекторный переход будет не больше тока через эмиттерный переход (несколько меньше), так что в транзисторе коэффициент усиления по току несколько меньше единицы. Но благодаря тому, что коллекторный переход включен в запирающем направлении, на нем происходит большое падение напряжения, что позволяет получать усиление по напряжению и мощности.

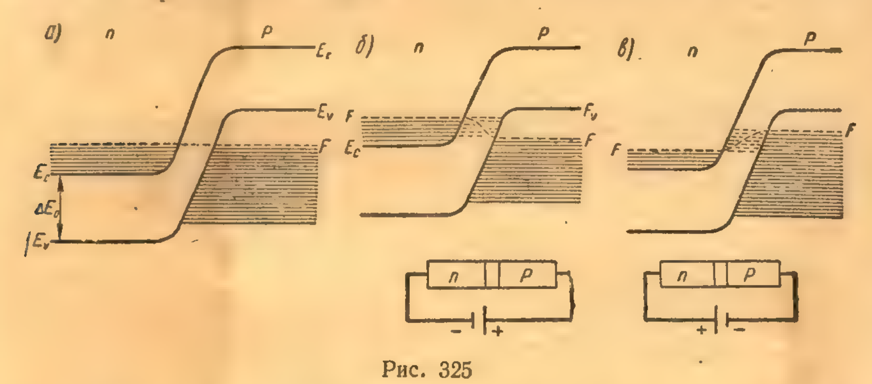


Рис. 325

Туннельный диод. В 1958 г. японский физик Есаки открыл новый тип полупроводникового прибора — туннельный диод. Его действие основано на явлении туннельного эффекта. Для его создания необходимо: 1) чтобы p - n - переход был узким ($\sim 10^{-5} - 10^{-6}$ *см*); 2) чтобы материал был вырожденным, т. е. сильно легированным.

При этом вырождение приводит к расположению свободных уровней энергии зоны проводимости против уровней энергии занятых электронами в валентной зоне, а узость перехода обеспечивает большую вероятность туннельного перехода. На рис. 325 представлена энергетическая схема p-n-перехода туннельного диода без внешнего напряжения; n и p обозначают электронную и дырочную области полупроводника; E_c — дно свободной зоны; E_v— потолок валентной зоны. Вырождение проявляется в том, что уровень Ферми F лежит выше E_c в n-области и ниже E_v в p-области. Ниже уровня Ферми лежат в основном занятые состояния, выше F — свободные, что указано условно штриховкой. Электрон, обладая некоторой энергией E, может находиться как в n-, так и в p-области, и значит, он может переходить из n- в p-область и наоборот. Но этот переход связан с преодолеванием потенциального треугольного барьера. На рис. 326 изображен идеализированный p-n-переход с постоянным в нем электрическим полем.

Для перехода электрона из состояния *1* в состояние *2* электрон должен пройти сквозь треугольный потенциальный барьер с основанием a и высотой ΔE. Если считать поле в переходе постоянным, то для прозрачности барьера можно получить выражение:

$$D = D_0 e^{-\frac{\sqrt{2m}}{2\hbar e}\cdot\frac{\Delta E_0^{3/2}}{\mathscr{E}}} = D_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}e\hbar}\cdot\frac{\sqrt{m}\,\Delta E_0^{3/2}}{\mathscr{E}}}.$$

Но величина поля $\mathscr{E}$ приближенно равна $\mathscr{E} \approx \frac{\Delta E_0}{ea}$, поэтому

$$D = D_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{2} e\hbar} \cdot \sqrt{m} E_0^{1/2} a}.$$

Выражение показывает, что вероятность туннельного прохождения будет тем больше, чем меньше a и m. Поэтому для работы туннельного диода необходимо, чтобы переход был по возможности поуже, а в качестве материалов используются интерметаллы $A^{III} B^{V}$, для которых эффективная масса электрона очень мала.

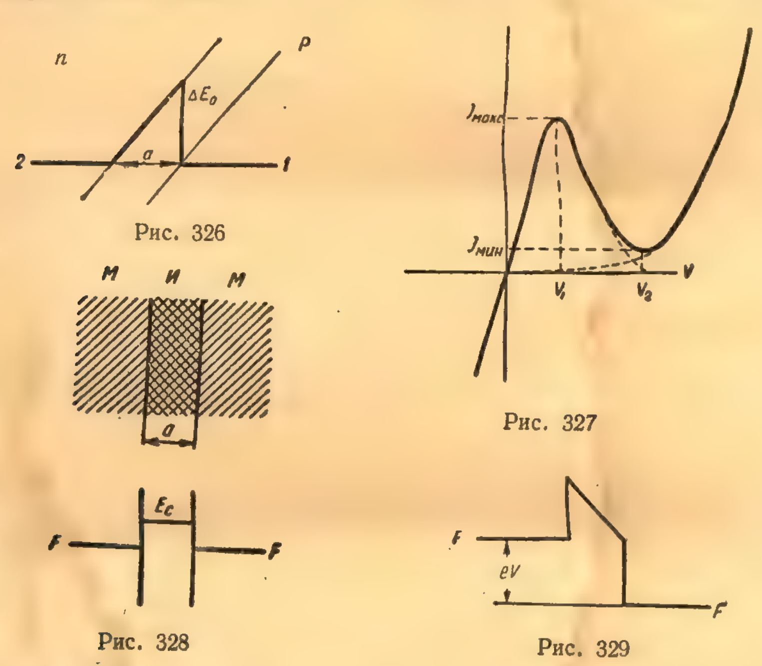


Рис. 326

Рис. 327

Рис. 328

Рис. 329

Если на диод не наложено внешнее поле, то ток через переход равен нулю, так как число переходов слева и справа одинаково.

Пусть на переход наложено внешнее поле в пропускном направлении, т. е. к n-области подсоединен минус батареи (рис. 325, *б*). В этом случае уровни в p-области опускаются вниз по сравнению с уровнями n-области и число переходов слева будет больше числа переходов справа; через переход потечет ток от p- к n-области. С ростом напряжения число переходов из n- в p-область будет возрастать. Однако, начиная с напряжения, равного приблизительно $\frac{(F - E_c)}{e}$, число свободных состояний в p-области, расположенных против занятых состояний в n-области, будет уменьшаться и в тот момент, когда F в n-области будет совпадать с E_v, переход электронов прекратится. В этот момент ток за счет туннельного эффекта прекратиться. При дальнейшем увеличении напряжения ток снова будет возрастать за счет обычного механизма проводимости диода. Таким образом, вольт-амперная характеристика туннельного диода имеет падающий участок

(рис. 327). Это позволяет использовать туннельный диод в качестве усилителя и генератора. Основные параметры туннельного диода: $I_{макс}$, $V(I_{макс})$; $I_{мин}$, $V(I_{мин})$; $V(I_{макс})$ измеряется сотыми и десятыми долями вольта; $V\,I_{мин}$) — порядка $0{,}5 \div 0{,}7$ *в*. Отношение $I_{макс} : I_{мин}$ равно 15:1 для германиевых диодов и 60 : 1 для диодов из GaAs.

Туннельный диод используется для генерирования и усиления колебаний до частоты $10^9 - 10^{10}$ *гц* и может быть использован до 10^{12} *гц*.

Так как его действие основано на использовании основных носителей, то он слабо меняет свои параметры при изменении внешних условий (температуры, облучения и др.).

Туннельный диод на основе изоляционных пленок. Система, состоящая из металла, изоляционной пленки толщиной 100—150° *А* и металла, представляет для электрона потенциальный барьер (рис. 328) толщиной *a* и высотой $E_c - F$, где F — уровень Ферми металла, E_c — дно свободной зоны изолятора. Если $E_c - F$ измеряется несколькими десятыми долями *эв* и больше, то барьер практически не прозрачен. Но если на систему наложить внешнее напряжение V, то барьер видоизменяется (рис. 329), его прозрачность увеличивается. Теперь при наложении внешнего переменного напряжения барьер будет обладать односторонней проводимостью. При температуре жидкого гелия на вольт-амперной характеристике диода наблюдается участок с отрицательным сопротивлением.

Р А З Д Е Л   Д Е С Я Т Ы Й

Значение мировых постоянных

Вспомогательные таблицы

Ниже приведены значения основных мировых констант, принятые Международным конгрессом в Турине (Италия) в 1955 г.

I. Вспомогательные физические константы

Постоянная Ридберга для бесконечной массы

$$R_{\infty} = (109\,737{,}309 \pm 0{,}012)\ см^{-1}.$$

Постоянные Ридберга для легких ядер:

$$R_H = (109\,677{,}576 \pm 0{,}012)\ см^{-1},$$
$$R_D = (109\,707{,}419 \pm 0{,}012)\ см^{-1},$$
$$R_{He^3} = (109\,717{,}345 \pm 0{,}012)\ см^{-1},$$
$$R_{He^4} = (109\,722{,}267 \pm 0{,}012)\ см^{-1}.$$

Скорость света

$$c = (299\,793{,}0 \pm 0{,}3)\ км/сек.$$

Атомная масса нейтрона

$$m_n = 1{,}008982 \pm 0{,}000003 \text{ (физическая шкала).}$$

Атомная масса водорода

$$H = 1{,}008142 \pm 0{,}000003 \text{ (физическая шкала).}$$

Отношение атомных масс водорода и протона

$\frac{H}{m_p} = 1{,}00054461$ (при вычислениях использована атомная масса электрона $m_0 = 0{,}00054875$) (физическая шкала).

Атомная масса протона

$$m_p = 1{,}007593 \pm 0{,}000003 \text{ (физическая шкала).}$$

Атомная масса дейтерия

$$D = 2{,}014735 \pm 0{,}000006 \text{ (физическая шкала).}$$

Отношение атомных масс дейтерия и дейтона

$\frac{D}{M_d} = 1{,}00027244$ (при вычислениях использовано значение атомной массы электрона $m_0 = 0{,}00054875$) (физическая шкала).

Отношение массы протона к массе электрона

$$\frac{m_p}{m_0} = 1836{,}12 \pm 0{,}02.$$

Приведенная масса электрона в водородном атоме

$$\mu = \frac{mm_p}{\mathrm{H}} = (9{,}1034 \pm 0{,}0003) \cdot 10^{-28}\ г.$$

Постоянная Шредингера для неподвижного ядра

$$\frac{2m}{\hbar^2} = (1{,}63836 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{27}\ эрг^{-1}\ см^{-2}.$$

Постоянная Шредингера для водородного атома

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} = (1{,}63748 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{27}\ эрг^{-1}\ см^{-2}.$$

Радиус первой Боровской орбиты

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{(me^2)} = \frac{\alpha}{(4\pi R_\infty)} = (5{,}29172 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-9}\ см.$$

Радиус электронной орбиты H^1 в нормальном состоянии, отнесенный к центру масс,

$$a_0' = a_0 (1 - \alpha^2)^{1/2} = (5{,}29158 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-9}\ см.$$

Расстояние между протоном и электроном в нормальном состоянии H^1

$$a_0'' = a_0' \frac{R_\infty}{R_H} = (5{,}29446 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-9}\ см,$$

Комптоновская длина волны электрона:

$$\lambda_{ce} = \frac{h}{mc} = (24{,}2626 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-11}\ см.$$

$$\lambda\!\!\!^{-}_{ce} = \frac{\lambda_{ce}}{2\pi} = (3{,}86151 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{-11}\ см.$$

Комптоновская длина волны протона:

$$\lambda_{cp} = \frac{h}{m_p c} = (13{,}2141 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{-14}\ см,$$

$$\lambda\!\!\!^{-}_{cp} = \frac{\lambda_{cp}}{2\pi} = (2{,}10308 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-14}\ см.$$

Комптоновская длина волны нейтрона:

$$\lambda_{cn} = \frac{h}{m_n c} = (13{,}1959 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{-14}\ см,$$

$$\lambda\!\!\!^{-}_{cn} = \frac{\lambda_{cn}}{2\pi} = (2{,}10019 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-14}\ см.$$

Классический радиус электрона:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = (2{,}81785 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{-13}\ \textit{см},$$

$$r_0^2 = (7{,}94030 \pm 0{,}00021) \cdot 10^{-26}\ \textit{см}^2.$$

Томсоновское сечение

$$\left(\frac{8}{3}\right)\pi r_0^2 = (6{,}65205 \pm 0{,}00018) \cdot 10^{-25}\ \textit{см}^2.$$

Расщепление дублета тонкой структуры в водороде

$$\Delta E_{\mathrm{H}} = \left(\frac{1}{16}\right) R_H \alpha^2 \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} + \left(\frac{5}{8} - \frac{5{,}946}{\pi^2}\right)\alpha^2\right] =$$
$$= (0{,}365871 \pm 0{,}000003)\ \textit{см}^{-1} = (10968{,}56 \pm 0{,}10)\ \textit{гц}^{-1}.$$

Расщепление тонкой структуры в дейтерии

$$\Delta E_D = \Delta E_H \frac{R_D}{R_H} = (0{,}365970 \pm 0{,}000003)\ \textit{см}^{-1} = (10971{,}54 \pm 0{,}10)\ \textit{гц}^{-1}.$$

Зеемановское расщепление

$$\frac{e}{4\pi mc^2} = (4{,}66885 \pm 0{,}00006) \cdot 10^{-5}\ \textit{см}^{-1}\ \textit{гс}^{-1}.$$

Постоянная Больцмана

$$k = \frac{R_0}{N} = (1{,}38044 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{-16}\ \textit{эрг}\ \textit{град}^{-1} =$$

$$= (8{,}6167 \pm 0{,}0004) \cdot 10^{-5}\ \textit{эв} \cdot \textit{град}^{-1},\quad \frac{1}{k} = (11\,605{,}4 \pm 0{,}5)\ \textit{град}\ \textit{эв}^{-1}.$$

Первая константа излучения

$$c_1 = 8\pi hc = (4{,}9918 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{-13}\ \textit{эрг} \cdot \textit{см}.$$

Вторая константа излучения

$$c_2 = \frac{hc}{k} = (1{,}43880 \pm 0{,}00007)\ \textit{см} \cdot \textit{град}.$$

Константа атомной теплоемкости

$$\frac{c_2}{c} = \frac{h}{k} = (4{,}79931 \pm 0{,}00023) \cdot 10^{-11}\ \textit{сек} \cdot \textit{град}.$$

Постоянная Вина

$$\lambda_{\text{макс}} T = c_2/4{,}96511423 = (0{,}289782 \pm 0{,}000013)\ \textit{см} \cdot \textit{град}.$$

Постоянная Стефана — Больцмана

$$\sigma = \left(\frac{\pi^2}{60}\right)\left(\frac{k^4}{h^3 c^2}\right) = (0{,}56687 \pm 0{,}00010) \cdot 10^{-4}\ \textit{эрг} \cdot \textit{см}^{-2} \cdot \textit{град}^{-4}\ \textit{сек}^{-2}.$$

Постоянная Саккур — Тетроде:

$$\frac{S_0}{R_0} = \frac{5}{2} + \ln\left[(2\pi R_0)^{3/2} h^{-3} N^{-4}\right] = -5{,}57324 \pm 0{,}00007,$$

$$S_0 = -(46{,}3524 \pm 0{,}0020) \cdot 10^7\ \textit{эрг} \cdot \textit{моль}^{-1}\ \textit{град}^{-1}$$ (физическая шкала).

Магнетон Бора

$$\mu_0 = \frac{he}{4\pi mc} = (0{,}92731 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-20} \textit{ эрг} \cdot \textit{гс}^{-1}.$$

Поправка на аномальный момент электрона

$$1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 2{,}973\frac{\alpha^2}{\pi^2} = \frac{\mu_e}{\mu_0} = (1{,}001145358 \pm 0{,}000000005)$$

$$\left(\text{при вычислении использовалось значение } \frac{1}{\alpha} = 137{,}0373\right).$$

Магнитный момент электрона

$$\mu_e = (0{,}92837 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-20} \textit{ эрг} \cdot \textit{гс}^{-1}.$$

Ядерный магнетон

$$\mu_я = \frac{he}{(4\pi m_p c)} = (0{,}505038 \pm 0{,}000018) \cdot 10^{-23} \textit{ эрг} \cdot \textit{гс}^{-1}.$$

Магнитный момент протона

$$\mu_p = (2{,}79275 \pm 0{,}00003) \text{ ядерных магнетонов} =$$
$$= (1{,}41044 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{-23} \textit{ эрг} \cdot \textit{гс}^{-1}.$$

Гиромагнитное отношение протона в водороде (без поправки на диамагнетизм)

$$\gamma' = (2{,}67523 \pm 0{,}00004) \cdot 10^4 \textit{ рад} \cdot \textit{сек}^{-1} \textit{ гс}^{-1}.$$

Гиромагнитное отношение протона (с поправкой)

$$\gamma = (2{,}67530 \pm 0{,}00004) \cdot 10^4 \textit{ рад} \cdot \textit{сек}^{-1} \textit{ гс}^{-1}.$$

Множитель при выражении (константа Кюри) $\frac{1}{2} x^{1/2}$, дающем магнитный момент, отнесенный в молекуле:

$$\left(\frac{3k}{N}\right)^{1/2} = (2{,}6178 \pm 0{,}00010) \cdot 10^{-20} (\textit{эрг} \cdot \textit{моль} \cdot \textit{град}^{-1})^{1/2}.$$

Соотношения между энергией и массой:

$$1 \textit{ г} = (5{,}61000 \pm 0{,}00011) \cdot 10^{26} \textit{ Мэв},$$
$$1 \text{ электронная масса} = (0{,}510976 \pm 0{,}000007) \textit{ Мэв},$$
$$1 \text{ единица атомной массы} = (931{,}141 \pm 0{,}010) \textit{ Мэв},$$
$$1 \text{ протонная масса} = (938{,}211 \pm 0{,}010) \textit{ Мэв},$$
$$1 \text{ нейтронная масса} = (939{,}505 \pm 0{,}010) \textit{ Мэв}.$$

Соотношения между единицами энергии E:

$$1 \textit{ эв} = (1{,}60206 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-12} \textit{ эрг},$$
$$\frac{E}{\tilde{\nu}} = hc = (1{,}98618 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{-16} \textit{ эрг} \cdot \textit{см},$$
$$E\lambda_g = (12397{,}67 \pm 0{,}22) \cdot 10^{-6} \textit{ эв} \cdot \textit{см},$$
$$E\lambda_s = (12372{,}44 \pm 0{,}16) \textit{ кв } X\text{-единиц},$$
$$\frac{E}{\nu} = (6{,}62517 \pm 0{,}00023) \cdot 10^{-27} \textit{ эрг} \cdot \textit{сек} =$$
$$= (4{,}13541 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{-15} \textit{ эв} \cdot \textit{сек},$$

$$\frac{\tilde{\nu}}{E} = (5{,}03479 \pm 0{,}00017) \cdot 10^{15}\ см^{-1}\ эрг^{-1} =$$

$$= (8065{,}03 \pm 0{,}14) \cdot см^{-1}\ эв^{-1}\,,$$

$$\frac{\nu}{E} = (1{,}50940 \pm 0{,}00005) \cdot 10^{26}\ сек^{-1}\ эрг^{-1} =$$

$$= (2{,}41814 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{14}\ сек^{-1}\ эв^{-1}\,.$$

Газовая постоянная на моль

$$R_0 = (8{,}31696 \pm 0{,}00034) \cdot 10^{7}\ эрг/моль \cdot град.$$

Стандартный объем идеального газа

$$V_0 = (22\,420{,}7 \pm 0{,}6)\ см^3 \cdot атм/моль.$$

Постоянная Авогадро

$$N_0 = (6{,}02486 \pm 0{,}00016) \cdot 10^{23}\ (г \cdot моль)^{-1}\,.$$

Постоянная Лошмидта

$$L_0 = \frac{N_0}{V_0} = (2{,}68719 \pm 0{,}00010) \cdot 10^{19}\ см^{-3}\,.$$

Заряд электрона

$$e = (4{,}80286 \pm 0{,}00009) \cdot 10^{-10}\ \text{СГСЭ} = (1{,}60206 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-20}\ \text{СГСМ}.$$

Масса покоя электрона

$$m = (9{,}1083 \pm 0{,}0003) \cdot 10^{-28}\ г.$$

Масса покоя протона

$$m_p = (1{,}67239 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{-24}\ г.$$

Масса покоя нейтрона

$$m_n = (1{,}67470 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{-24}\ г.$$

Постоянная Планка

$$h = (6{,}62517 \pm 0{,}00023) \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек,$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = (1{,}05443 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек.$$

Коэффициент перехода от X-единиц к миллиангстремам

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_s} = 1{,}002039 \pm 0{,}000014.$$

Число Фарадея

$$F = N_0 e = (2{,}89366 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{14}\ \text{ед. СГСЭ}/г \cdot моль =$$

$$= (9652{,}19 \pm 0{,}11)\ \text{ед. СГСМ}/г \cdot моль.$$

Удельный заряд электрона

$$\frac{e}{m} = (5{,}27305 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{17}\ \text{ед. СГСЭ}/г =$$

$$= (1{,}75890 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{7}\ \text{ед. СГСМ}/г.$$

Отношение

$$\frac{h}{e} = (1{,}37942 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-17}\ эрг \cdot сек/\text{ед. СГСЭ}.$$

Масса электрона

$$m_e = (5{,}48763 \pm 0{,}00006) \cdot 10^{-4}\ а.\ е.\ м.$$

II. Новые значения некоторых констант

В 1957 г., два года спустя после Международного конгресса в Турине, было установлено, что теоретическое значение для аномального момента электрона равно

$$\frac{\mu_e}{\mu_0} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328\frac{\alpha^2}{\pi^2} = 1,0011596,$$

а не 1,00114358, как это было принято в 1955 г. Но изменение одной из констант влечет за собой изменение других констант, так как они образуют единую систему взаимосвязанных величин. Учет нового значения аномального момента электрона приводит к следующим значениям основных констант (Дж. Дю-Монд, УФН, т. 73, в. 2, стр. 333, 1961 г.):

$e = 4,80273$ СГСЭ;
$m = 9,1082 \cdot 10^{-28}$ *г*;
$h = 6,62491 \cdot 10^{-27}$ *эрг · сек*;
$F = 2,89366 \cdot 10^{-14}$ СГСЭ/*г · моль*;
$F = 9652,18$ СГСМ/*г · моль*;
$\alpha = 7,29719 \cdot 10^{-3}$;
$\alpha^{-1} = 137,0391$;
$\frac{\lambda_g}{\lambda_s} = 1,002031$;
$N_0 = 6,02502 \cdot 10^{-23}$ $(г \cdot моль)^{-1}$.

XII Генеральная ассамблея Международного научного союза по радиосвязи рекомендовала принять для скорости света новое значение:

$$c = (299792,5 \pm 0,4) \text{ км/сек}.$$

Международная система единиц (СИ)

В октябре 1960 г. в Париже состоялась XI Генеральная конференция по мерам и весам. Конференция приняла новые определения таких основных единиц, как метр и секунда.

Новое определение метра. Первоначально, в 1791 г. при введении метрической системы метр был определен как одна десятимиллионная часть четверти парижского меридиана. В 1799 г. на основе измерений части дуги меридиана был выполнен эталон метра в виде платиновой концевой меры.

Созданная по инициативе Российской Академии наук Международная комиссия по прототипам метрической системы, учитывая возможность более точных измерений меридиана, приняла рекомендацию об отказе от естественного эталона и о принятии в качестве исходной меры метра Архива. В 1889 г. I Генеральная конференция по мерам и весам утвердила платиноиридиевый штриховой эталон метра в качестве международного прототипа метра.

Учитывая, что никакое усовершенствование платино-иридиевого прототипа метра не позволяет повысить его точность выше достигнутой в 0,1 *мк*, и имея возможность выбрать длину волны излучения атома в качестве естественного эталона длины, дающего точность воспроизведения почти на два порядка больше, XI Генеральная конференция решила: *метр есть длина, равная 1 650 763, 73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями* $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона 86.

В Международном бюро мер и весов и национальных метрологических лабораториях созданы приборы для воспроизведения метра в длинах световых волн на основе излучения лампы, наполненной изотопом криптона 86. Лампа помещается в дюаровский сосуд и охлаждается до температуры тройной точки азота. Для сличения штриховых и концевых мер с эталонной длиной световой волны используется интерференционный фотоэлектрический компаратор.

Новое определение секунды. До последнего времени секунда определялась как $\frac{1}{86\ 400}$ часть средних солнечных суток, однако оказалось, что вращение Земли подвержено нерегулярным колебаниям. Так, с 1872 по 1903 гг. средняя продолжительность суток увеличилась на семь тысячных секунды, с 1903 по 1934 гг. она уменьшилась на пять тысячных секунды, а затем вновь возрастает. Средние сутки определены с точностью до 10^{-7}, что недостаточно для использования их в качестве эталона при современной технике частот.

XI Генеральная конференция по мерам и весам связывает определение секунды не с вращением Земли вокруг своей оси, а с движением Земли по орбите вокруг Солнца. В качестве эталона времени принимается длительность тропического года, т. е. промежуток времени между двумя последовательными весенними равнодействиями. Согласно новому определению: *секунда является* $\frac{1}{31556925{,}9747}$ *частью тропического года для 1900 года января 0 в 12 часов эфемеридного времени.*

Указание на 1900 г. связано с тем, что сам по себе тропический год не является постоянным и при определении эталона следует исходить из определенного года. Указанная в определении дата выражена в принятом астрономами счете времени и соответствует полудню 31 декабря 1899 г. Эфемеридным временем называется время, по которому вычисляют эфемериды—координаты небесных тел, устанавливаемое по результатам астрономических наблюдений Луны и не зависящее от колебаний скорости вращения Земли.

Новое определение секунды делает ее равной средней длительности старой секунды за последние три столетия. Таким образом, не изменяя величины единицы времени, оно позволяет более строго пользоваться естественным эталоном, определяемым по совокупности видимых движений небесных тел.

Новые государственные стандарты на единицы физических величин. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР 24 августа 1961 г. утвердил новый ГОСТ 9867—61 «Международная система единиц». Согласно этому стандарту «Международная система единиц» сокращенно обозначается русскими буквами СИ, что соответствует обозначению, принятому XI Генеральной конференцией по мерам и веса «SI».

В ГОСТе содержится перечень шести основных единиц СИ и таблица дополнительных и производных единиц.

Определения основных единиц Международной системы единиц

Метр — длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона 86.

Килограмм — единица массы — представлен массой Международного прототипа килограмма.

Секунда — $\frac{1}{31556925{,}9747}$ часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенного на расстоянии 1 *м* один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2\cdot10^{-7}$ единиц силы Международной системы на каждый метр длины.

Градус Кельвина — единица измерения температуры по термодинамической температурной шкале, в которой для температуры тройной точки воды установлено значение 273,16° К (точно)

Свеча — значение единицы силы света, которое принимается таким, чтобы яркость полного излучателя при температуре затвердевания платины была равна 60 *св* на 1 $см^2$.

Единицы Международной системы, установленные Государственными Стандартами СССР

Наименование величин	Единицы измерения	Сокращенное обозначение единиц измерения
	Основные единицы	
Длина	метр	*м*
Масса	килограмм	*кг*
Время	секунда	*сек*
Сила электрического тока	ампер	*а*
Термодинамическая температура	градус Кельвина	°K
Сила света	свеча	*св*
	Дополнительные единицы	
Плоский угол	радиан	*рад*
Телесный угол	стерадиан	*стер*
	Производные единицы	
	а) механические единицы	
Частота	герц	*гц*
Угловая скорость	радиан в секунду	$\frac{рад}{сек}$
Угловое ускорение	радиан на секунду в квадрате	$\frac{рад}{сек^2}$
Скорость	метр в секунду	$\frac{м}{сек}$
Ускорение	метр на секунду в квадрате	$\frac{м}{сек^2}$
Площадь	квадратный метр	$м^2$
Объем	кубический метр	$м^3$
Плотность	килограмм на кубический метр	$\frac{кг}{м^3}$
Сила	ньютон	*н*
Удельный вес	ньютон на кубический метр	$\frac{н}{м^3}$
Момент инерции (динамический)	килограмм-метр в квадрате	$кг \cdot м^2$
Работа и энергия	джоуль	*дж*
Мощность	ватт	*вт*
Напряжение (давление)	ньютон на квадратный метр	$\frac{н}{м^2}$
Динамическая вязкость	ньютон-секунда на квадратный метр	$\frac{н \cdot сек}{м^2}$
Кинематическая вязкость	квадратный метр на секунду	$\frac{м^2}{сек}$

Наименование величин	Единицы измерения	Сокращенное обозначение единиц измерения
	б) тепловые единицы	
Количество теплоты, термодинамический потенциал	джоуль	*дж*
Удельная теплота (фазового превращения, химической реакции)	джоуль на килограмм	$\frac{\text{дж}}{\text{кг}}$
Теплоемкость системы	джоуль на градус	$\frac{\text{дж}}{\text{град}}$
Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-градус	$\frac{\text{дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$
Энтропия системы	джоуль на градус	$\frac{\text{дж}}{\text{град}}$
Удельная энтропия	джоуль на килограмм-градус	$\frac{\text{дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$
Тепловой поток	ватт	*вт*
Поверхностная плотность теплового потока	ватт на квадратный метр	$\frac{\text{вт}}{\text{м}^2}$
Коэффициент теплопроводности	ватт на квадратный метр-градус	$\frac{\text{вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$
Коэффициент температуропроводности	квадратный метр на секунду	$\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$
Температурный градиент	градус на метр	$\frac{\text{град}}{\text{м}}$
	в) электрические и магнитные единицы	
Работа и энергия	джоуль	*дж*
Активная мощность	ватт	*вт*
Полная мощность	вольт-ампер	*ва*
Реактивная мощность	вар	*вар*
Количество электричества (электрический заряд)	кулон или ампер-секунда	*к* или *а·сек*
Поток электрического смещения (поток электрической индукции)	кулон	*к*
Электрическое смещение (электрическая индукция)	кулон на квадратный метр	$\frac{\text{к}}{\text{м}^2}$
Разность электрических потенциалов, электрическое напряжение, электродвижущая сила	вольт	*в*
Напряженность электрического поля	вольт на метр	$\frac{\text{в}}{\text{м}}$
Электрическое сопротивление	ом	*ом*
Электрическая проводимость	сименс	*сим*
Электрическая емкость	фарада	*ф*
Магнитный поток	вебер	*вб*

Продолжение

Наименование величин	Единицы измерения	Сокращенное обозначение единиц измерения
Магнитная индукция	тесла или вебер на квадратный метр	*тл* или $\frac{вб}{м^2}$
Индуктивность и взаимная индуктивность	генри	*гн*
Магнитодвижущая сила и разность магнитных потенциалов	ампер или ампер-виток	*а* или *ав*
Напряженность магнитного поля	ампер на метр или ампер-виток на метр	$\frac{а}{м}$ или $\frac{ав}{м}$
г) акустические единицы		
Звуковое давление	ньютон на квадратный метр	$\frac{н}{м^2}$
Объемная скорость	кубический метр в секунду	$\frac{м^3}{сек}$
Акустическое сопротивление	ньютон-секунда на метр в пятой степени	$\frac{н \cdot сек}{м^5}$
Механическое сопротивление	ньютон-секунда на метр	$\frac{н \cdot сек}{м}$
Интенсивность звука	ватт на квадратный метр	$\frac{вт}{м^2}$
Плотность звуковой энергии	джоуль на кубический метр	$\frac{дж}{м^3}$
д) световые единицы		
Световой поток	люмен	*лм*
Световая энергия	люмен-секунда	*лм·сек*
Светность	люмен на квадратный метр	$\frac{лм}{м^2}$
Освечивание	свеча-секунда	*св·сек*
Яркость	нит или свеча на квадратный метр	*нт* или $\frac{св}{м^2}$
Освещенность	люкс	*лк*
Количество освещения	люкс-секунда	*лк·сек*

С 1 июля 1961 г. введены новые государственные стандарты: ГОСТ 7664-61 «Механические единицы» и ГОСТ 8550—61 «Тепловые единицы».

ГОСТ «Механические единицы» допускает для получения механических величин применение трех систем единиц: МКС, СГС и МКГСС. В стандарте указывается, что преимущественно должна употребляться система МКС, являющаяся частью «Международной системы единиц». Вместе с тем допускается применение внесистемных единиц, среди которых единицы: длины — микрон; массы — тонна, центнер и карат; времени — час и минута; плоского угла — градус, минута и секунда; площади — ар и гектар; объема — литр; угла поворота — оборот; угловой скорости — оборот в минуту и оборот в се-

кунду; давления — бар и техническая атмосфера и т. д. ГОСТ 8550—61 «Тепловые единицы» устанавливает применение для измерения тепловых величин системы единиц МКГСС, основными единицами которой являются метр, килограмм, секунда и градус Кельвина. Эта система является частью «Международной системы единиц». Стандарт допускает применение внесистемных единиц, основанных на калории в качестве единицы количества теплоты, и производных единиц, основанных на часе в качестве единицы времени. Стандарт определяет калорию по соотношению 1 *кал* = 4,1868 *дж*.

Приставки для обозначения кратных и дольных единиц измерения

Приставка		Соответствует числу основных единиц	Сокращенное обозначение	
русское	международное		русское	международное
Тера	Tera	10^{12}	*Т*	*T*
Гига	Giga	10^{9}	*Г*	*G*
Мега	Mega	10^{6}	*М*	*M*
Кило	Kilo	10^{3}	*к*	*K*
Гекто	Hekto	10^{2}	*г*	*h*
Дека	Deka	10	*дк*	*dk*
Деци	Deci	10^{-1}	*д*	*d*
Санти	Centi	10^{-2}	*с*	*c*
Милли	Milli	10^{-3}	*м*	*m*
Микро	Mikro	10^{-6}	*мк*	μ
Нано	Nano	10^{-9}	*н*	*n*
Пико	Piko	10^{-12}	*п*	*p*

Латинский алфавит

Aa — а
Bb — бе
Cc — це
Dd — де
Ee — е
Ff — эф
Gg — ге
Hh — аш
Ii — и
Jj — йот
Kk — ка
Ll — эль
Mm — эм
Nn — эн
Oo — о
Pp — пэ
Qq — ку
Rr — эр
Ss — эс
Tt — тэ
Uu — у
Vv — ве
Ww — дубль-ве
Xx — икс
Yy — игрек
Zz — зет

Греческий алфавит

Α α — альфа
Β β — бэта
Γ γ — гамма
Δ δ — дельта
Ε ε — эпсилон
Ζ ζ — дзета
Η η — эта
Θ ϑ — тэта
Ι ι — иота
Κ κ — каппа
Λ λ — ламбда
Μ μ — мю
Ν ν — ню
Ξ ξ — кси
Ο ο — омикрон
Π π — пи
Ρ ρ — ро
Σ σ — сигма
Τ τ — тау
Υ υ — ипсилон
Φ φ — фи
Χ χ — хи
Ψ ψ — пси
Ω ω — омега

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Путилов. Курс физики, тт. 1, 2, 3. ГИТТЛ, М., 1957—1960.
2. С. Э. Фриш и А. В. Тиморева. Курс общей физики, тт. 1, 2, 3. ГИТТЛ, М.
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Физматгиз, М., 1958.
4. Г. А. Зисман и О. М. Тодес. Курс общей физики, тт. 1, 2. Физматгиз, 1958.
5. О. Д. Хвольсон. Курс физики, тт. 1—7. Госиздат, Берлин, 1923.
6. Курс физики под ред. Н. Д. Папалекси, тт. 1, 2. М., 1947.
7. С. А. Арцыбашев. Курс физики, тт. 1, 2. Учпедгиз, М., 1956.
8. С. Э. Хайкин. Механика. ГИТТЛ, М., 1947.
9. С. П. Стрелков. Механика. Физматгиз, 1955.
10. Л. Лойцянский и А. Лурье. Курс теоретической механики, тт. 1, 2. Гостехиздат, 1955.
11. Е. Л. Николаи. Курс теоретической механики. ГИТТЛ, 1957, тт. 1, 2.
12. И. М. Воронков. Курс теоретической механики. ГИТТЛ, М., 1957.
13. А. А. Космодемьянский. Курс теоретической механики. Учпедгиз, 1949.
14. Е. А. Штрауф. Молекулярная физика. ГТТИ, 1949.
15. А. Б. Млодзеевский. Молекулярная физика. ГТТИ, 1933.
16. А. Б. Млодзеевский. Термодинамика. Учпедгиз, 1948.
17. Дж. Робертс. Теплота и термодинамика. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
18. Е. А. Штрауф. Электричество и магнетизм. ГТТИ, 1950.
19. Р. Поль. Молекулярная физика. ИЛ.
20. С. Г. Калашников. Электричество. ГИТТЛ, 1955.
21. И. Е. Тамм. Основы теории электричества. Гостехиздат, 1948.
22. Г. С. Ландсберг. Оптика. Гостехиздат, 1952.
23. Р. Вуд. Физическая оптика. ОНТИ, 1938.
24. М. Борн. Оптика. ОНТИ, 1938.
25. Э. В. Шпольский. Атомная физика, тт. 1, 2. ГИТТЛ, М. — Л., 1949—1950.
26. А. Зоммерфельд. Атомные спектры. ИЛ, 1956.
27. Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики. Изд-во «Высшая школа», 1961.
28. П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики. Физматгиз, 1960.
29. Экспериментальная ядерная физика под ред. Э. Сегре, тт. 1, 2. ИЛ, 1955.
30. Р. Е. Лэпп и Г. Л. Эндрюс. Физика ядерного излучения. Воениздат, 1956.
31. В. В. Маляров. Основы теории атомного ядра. Физматгиз, М., 1959.

32. Ядерная физика, тт. 1—16. Труды Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Атомиздат, М., 1959.
33. Г. Бете и А. Зоммерфельд. Электронная теория металлов. ОНТИ, 1938.
34. У. Данлэп. Введение в физику полупроводников. ИЛ, М., 1959.
35. Под ред. А. Ф. Иоффе. Полупроводники в науке и технике, тт. 1, 2, АН СССР, 1957.
36. А. А. Лебедев. Электронная микроскопия. ГИТТЛ, М., 1955.
37. Бергман. Введение в теорию относительности. ИЛ, 1950.
38. А. Эйнштейн. Сущность теории относительности. ИЛ, 1955.
39. Краткий справочник инженера-физика. Атомиздат, М., 1961.

УКАЗАТЕЛЬ



СОДЕРЖАНИЕ

Динамика

Колебания

Волны

Раздел второй

Молекулярная физика, термодинамика и статистика

Молекулярная физика

Термодинамика

Статистическая физика

Раздел третий

Электричество и магнетизм

Электростатика

Раздел четвертый

Оптика

Элементы геометрической оптики

Волновая и корпускулярная оптика

Раздел пятый

Основы частной (специальной) теории относительности

Раздел шестой

Атомная физика

Раздел седьмой

Основы квантовой механики

Раздел восьмой

Ядерная физика

Раздел девятый

Физика твердого тела

Раздел десятый

Значения мировых постоянных

Николай Иванович Карякин,
Константин Николаевич Быстров,
Петр Семенович Киреев

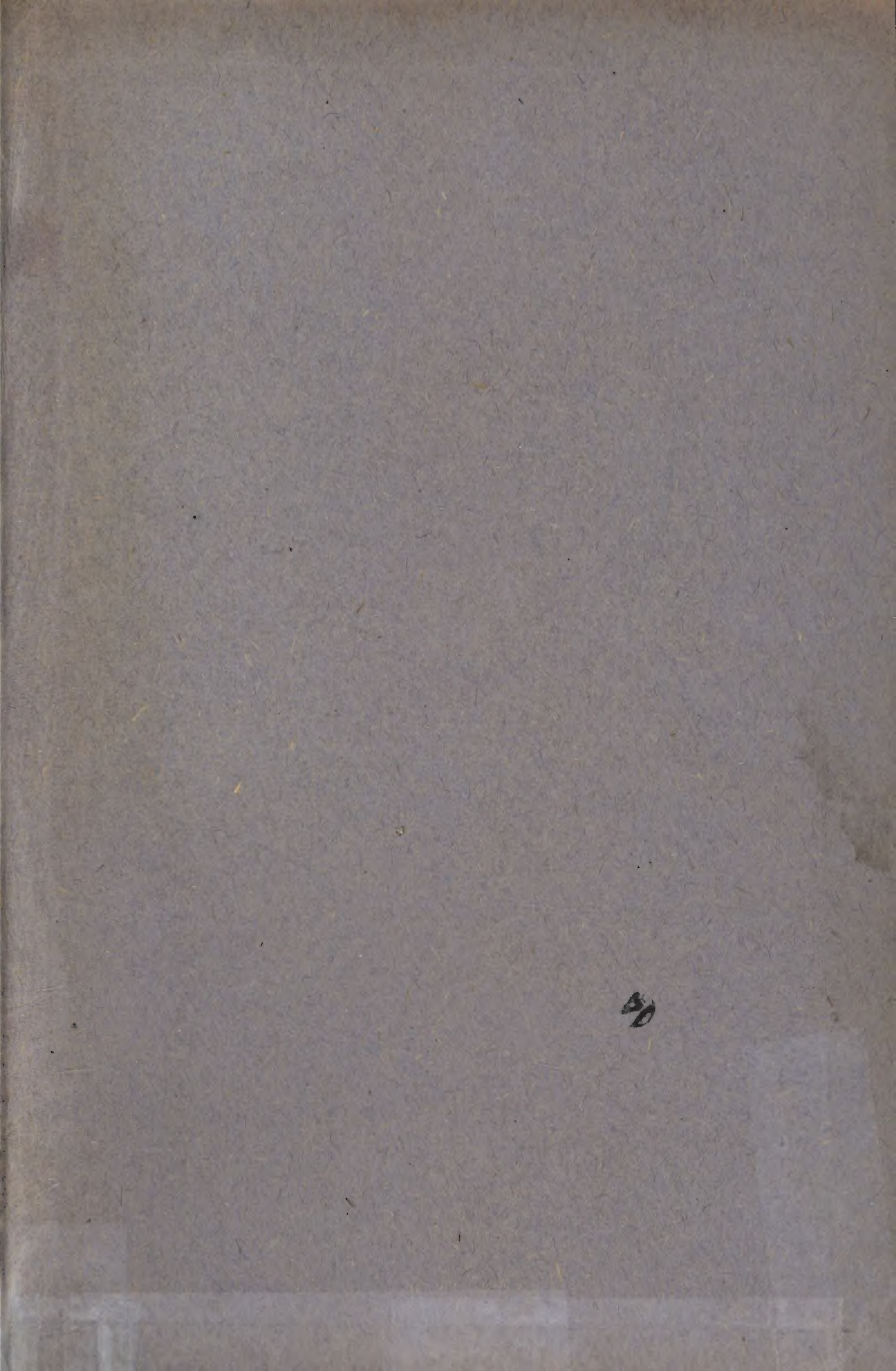
Краткий справочник
по физике

Редактор *Г. М. Страховский*
Редактор издательства *Г. Е. Перковская*
Технический редактор *Л. Л. Ежова*
Корректоры *Л. А. Егорова, Е. А. Ланина*

Сдано в набор 9/XI—1961 г. Подписано к печати 20/IV-62 г.
Бумага 60×90 1/16. 35 печ. л. + цв. вклейка 40,7 уч.-изд. л.
Тираж 250.000 (1—100.000) Т-03653 Изд. № фмх139
Цена 1 р. 36 к.

Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 20

Отпечатано с матриц в 1й типографии Трансжелдориздата МПС
Москва Б. Переяславская ул., 46. Зак. 1783



1 р. 36 коп.

ВЫСШАЯ ШКОЛА · 1962